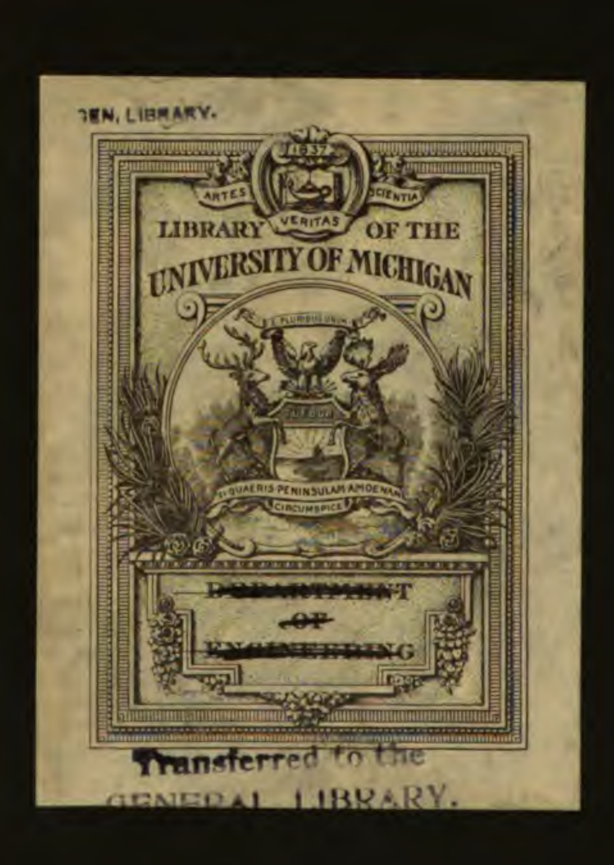


LEHRBUCH DER TECHNISCHEN MECHANIK

VON HJ. TALLQVIST


GEN. LIBRARY.
1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING
Transferred to the
GENERAL LIBRARY.





LEHRBUCH

DER

TECHNISCHEN MECHANIK

VON

HJ. TALLQVIST,

PROFESSOR DER MECHANIK AM POLYTECHNIKUM ZU HELSINGFORS.

I.

GEOMETRISCHE BEWEGUNGSLEHRE. MECHANIK DES MATERIELLEN PUNKTES. STATIK DER STARREN KÖRPER. DYNAMIK DER STARREN KÖRPER.

MIT 473 FIGUREN IM TEXT.

VERLAGSACTIENGESELLSCHAFT HELIOS, HELSINGFORS.

C. SPEIDEL, POLYTECHNISCHE BUCHHANDLUNG, ZÜRICH.

HELSINGFORS
ACTIENGESELLSCHAFT LILIUS & HERTZBERG
1903.

Das Lehrbuch der technischen Mechanik, dessen erster Band jetzt fertig vorliegt, ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser seit einer Reihe von Jahren am finnländischen Polytechnikum in Helsingfors gehalten hat. Ursprünglich ist das Buch in schwedischer Sprache erschienen und wird gegenwärtig ausser in Helsingfors auch an der technischen Hochschule in Stockholm benützt. Wenn der Verfasser sich jetzt mit einer deutschen Ausgabe des Werkes an einen grösseren Leserkreis wendet, so geschieht es einerseits auf den Rat seines verehrten Lehrers, Herrn Dr A. Herzog, Prof. der Mechanik am eidg. Polytechnikum in Zürich und andererseits in der Hoffnung, dass das Buch sich zeitgemässer und praktischer als die älteren Lehrbücher, wie z. B. A. Ritters Lehrbuch der technischen Mechanik erweisen werde. Ausser der Elementar-Mathematik setzt das Studium des Lehrbuches die Kenntnis der Anfangsgründe der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung voraus.

Bei der Behandlung seiner Aufgabe hat der Verfasser der Darstellung der allgemeinen mechanischen Principe etwas mehr Raum zugewiesen als in den meisten Lehrbüchern, die für angehende Techniker bestimmt sind; dadurch dürfte die Einheitlichkeit und der Zusammenhang der Darstellung gewonnen haben; ein besonderer Cursus der sog. analytischen Mechanik ist dank dieser Anordnung nicht unumgänglich erforderlich. Andererseits ist ein bedeutendes Gewicht auf eine hinreichende Anzahl von Anwendungen der vorgetragenen Theorien auf einzelne Probleme gelegt worden. Neben den analytischen Methoden

wurde ein umfassender Gebrauch von graphischen Methoden gemacht. Der Stoff gewinnt durch diese letzteren an Interesse und zugleich wird eine Grundlage für die späteren Studien der graphischen Statik gelegt. Zur Erleichterung des Verständnisses geht die Darstellung meistens vom einzelnen zum allgemeinen über; wo ein entgegengesetzter Entwickelungsgang jedoch nützlicher und lehrreicher erschien, wurde er befolgt, wie z. B. in der Dynamik der starren Körper. Diejenigen Teile der Mechanik, welche die meisten praktischen Anwendungen besitzen, wie die Statik der ebenen Kräftesysteme, die Lehre von der Reibung und die Festigkeitslehre, sind ein wenig ausführlicher als die übrigen Teile behandelt worden. Das Buch enthält etwas mehr als der angehende Techniker streng genommen nötig hat und als in den Vorlesungen gewöhnlich vorgetragen wird; es beabsichtigt in der That auch reiferen Technikern als eine Art Nachschlagebuch zu dienen, wenn es gilt, für irgend einen Zweck die Herleitung einer Formel oder eines Satzes zu finden. Bei einem ersten Studium kann man manches weglassen; die mit feinerem Text gedruckten Abschnitte geben in dieser Hinsicht eine gewisse Anleitung. Durch die überall hinzugefügten Anwendungen der allgemeinen Sätze, welche sich keineswegs auf numerische Einsetzungen in die gefundenen Formeln beschränken, soll der Leser Gelegenheit erhalten Aufgaben der Mechanik selbständig zu behandeln. Eine weitere Anleitung hierzu bieten die am Ende der einzelnen Abschnitte vorkommenden Beispiele.

Bei der Ausarbeitung des Lehrbuches sind mehrere Werke benützt worden, u. a. das Lehrbuch der Mechanik von Dahlander (schwedisch), die Ritter'schen Lehrbücher der technischen, der analytischen und der Ingenieur-Mechanik, Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, die theoretische Maschinenlehre sowie die Theorie der Elasticität und Festigkeit von Grashof, Mehrtens Handbuch der technischen Mechanik, Hennebergs Lehrbuch der technischen

Mechanik, die Anfangsgründe der Festigkeitslehre sowie die Lehre von der Reibung von Westin (beide schwedisch), die Hydromechanik von Rühlmann etc. Einen sehr grossen Nutzen hat der Verfasser aus Prof. Herzogs Vorlesungen der technischen Mechanik gezogen; in der That sind umfangreiche Teile besonders der Statik und der Festigkeitslehre nach dem Muster dieser vortrefflichen Vorlesungen redigirt worden. Prof. Herzog hat ausserdem die Güte gehabt, das Manuscript durchzulesen und den deutschen Text zu berichtigen; ich erfülle hier eine liebe Pflicht ihm dafür meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Auch dem Verlage bin ich für die in jeder Hinsicht befriedigende Ausstattung des Buches zum Danke verpflichtet.

Der zweite Band, die Elasticitätstheorie und Festigkeitslehre und die Hydromechanik sowie ein Register umfassend, wird noch innerhalb dieses Jahres erscheinen. Mögen die Bücher den Studierenden der schönen Wissenschaft der Mechanik zum Nutzen gereichen.

Helsingfors, im September 1903.

Der Verf.

Inhalt des ersten Bandes.

Erster Teil.

Geometrische Bewegungslehre.

Erster Abschnitt.

Bewegung des geometrischen Punktes.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung unveränderlicher geometrischer Punktsysteme und Körper.

Dritter Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines unveränderlichen geometrischen Punktsystems. Relative Bewegung.

Zweiter Teil.

Mechanik des materiellen Punktes.

Vierter Abschnitt.

Grundbegriffe und allgemeine Lehrsätze.

Fünfter Abschnitt.

Bewegung des materiellen Punktes.

Dritter Teil.

Statik der starren Körper.

Sechster Abschnitt.

Kräfte, die auf einen starren Körper wirken. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

Siebenter Abschnitt.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

Achter Abschnitt.

Gleichgewicht unterstützter Körper.

Neunter Abschnitt.

Das Seilpolygon und die Kettenlinie.

Zehnter Abschnitt.

Princip der virtuellen Arbeit.

Elfter Abschnitt.

Die Lehre von der Reibung.

Vierter Teil.

Dynamik der starren Körper.

Zwölfter Abschnitt.

Die Lehre vom Trägheitsmoment.

Dreizehnter Abschnitt.

Allgemeine Lehrsätze.

Vierzehnter Abschnitt.

Bewegung starrer Körper.

Fünfzehnter Abschnitt.

Die Lehre vom Stosse.

Einleitung.

§ 1.

Der gewöhnlichen Betrachtungsweise gemäss giebt es in der Natur Materie, welche sich auf die sog. Körper verteilt und von sog. Kräften beeinflusst wird. Hierbei entsteht Bewegung der Materie, falls sie sich in Ruhe befindet, und eine Änderung der Bewegung, falls die Materie schon in Bewegung begriffen ist. Ein grosser Teil der Erscheinungen, welche in der Natur beobachtet werden, sind Bewegungserscheinungen, und je weiter die Naturerkenntnis sich entwickelt hat, um so mehr Erscheinungen hat man als von Bewegungen abhängig zu erklären versucht. Die Erfahrung zeigt, dass die Bewegungserscheinungen bestimmten Gesetzen gehorchen; sie werden von einer besonderen Wissenschaft, der Mechanik, behandelt.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung.

Es giebt zwei Arten der Mechanik, die rationelle oder reine Mechanik und die angewandte Mechanik. Die rationelle Mechanik hat als Grundlage einige auf Grund der Erfahrung aufgestellte Principe sehr allgemeinen Charakters, nach welchen die Bewegung in gewissem Masse unabhängig von der Beschaffenheit der bewegten Materie und von der Art der wirkenden Kräfte ist. Es gelingt auf diese Weise die Bewegungsprobleme in mathematische Proleme zu verwandeln, welche die Mechanik möglichst vollständig durchzuführen hat; ausserdem hat

sie die Aufgabe die Gesetze der Bewegung aufzustellen. Die Resultate folgen aus den Grundprincipen mit demselben Grade von Strenge wie innerhalb der Mathematik. Die angewandte Mechanik ist dagegen eine Anwendung der Lehren der rationellen Mechanik auf Aufgaben innerhalb verschiedener Gebiete, zu welchen man beim Studium der Naturerscheinungen geführt wird, insbesondere in der Astronomie und in der Physik, oder auf welche man stösst, wenn man bestrebt ist, sich die Kräfte der Natur nutzbar zu machen, wie in der in unserer Zeit weitumfassenden Technik mit allen ihren Zweigen.

Unter technischer Mechanik pflegt man eine Zusammenstellung einiger Hauptsätze aus der reinen Mechanik und ihrer Anwendungen auf technische Probleme zu verstehen. Das Gebiet der technischen Mechanik ist deshalb nicht streng begrenzt; auch haben sich einige Zweige, wie besonders die graphische Statik, zu eigenen Wissenschaften entwickelt. In der technischen Mechanik spielt die Art der betrachteten Körper eine bedeutende Rolle, je nachdem sie fest, flüssig oder gasförmig sind. Bei den festen Körpern unterscheidet man die absolut festen oder starren Körper und die elastischen Körper. Die Mechanik der gasförmigen Körper gehört mehr der Physik, hauptsächlich der Wärmelehre an, und wird in dieses Lehrbuch nicht aufgenommen.

Die rationelle Mechanik hat mehrere ihrer Grundbegriffe mit anderen Wissenschaften gemeinsam. Um die Örter und die Ortsveränderungen der bewegten Körper definiren zu können macht die Mechanik von den Grössenbegriffen der Geometrie Gebrauch. Die Mechanik ist somit verwandt mit der Geometrie; viele ihrer Lehrsätze haben sogar einen rein geometrischen Hauptinhalt. Der Astronomie und deren Lehre von der Zeitbestimmung entlehnt die Mechanik den Zeitbegriff, einen Grundbegriff der Mechanik, welcher es möglich

macht bestimmte Örter der in Bewegung befindlichen Körper als zu bestimmten Zeitpunkten gehörend und bestimmte Ortsveränderungen als innerhalb bestimmter Zeiträume vorsichgehend zu betrachten. Aus diesen Grundbegriffen leitet die Mechanik eine Anzahl eigener Begriffe ab, wie diejenigen des Weges, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung, der Winkelgeschwindigkeit, der Winkelbeschleunigung u. s. w. Auf der durch diese Begriffe geschaffenen Basis lassen sich eine Anzahl von Bewegungsuntersuchungen ausführen, welche zusammen die sog. geometrische Bewegungslehre oder Kinematik (auch Phoronomie) bilden. Innerhalb der geometrischen Bewegungslehre, welche der jüngste Teil der Mechanik ist, werden nur die geometrischen Charaktere der Bewegung in Betracht gezogen, ohne dass man nach den Ursachen der Bewegung frägt. Endlich übernimmt die Mechanik aus der Physik die Begriffe der Kraft und der Masse; hierdurch wird es möglich die Bewegung in Beziehung zu ihren Ursachen, den Kräften, zu bringen. Die entsprechende Abteilung der Mechanik heisst Bewegungslehre in beschränkterem Sinne oder Kinetik.

Ein System von Kräften ist entweder im Gleichgewichte oder nicht im Gleichgewichte. In dem ersteren Falle hat man ein statisches, in dem letzteren ein dynamisches Problem. Die Bewegungslehre in beschränkterem Sinne umfasst somit die Statik und die Dynamik.

Wie aus dem obigen hervorgeht, sind die Grundlagen der Mechanik teils geometrischer, teils physikalischer Natur. Bei der Behandlung der Mechanik wird in ausgedehntem Masse von den Lehrsätzen der Mathematik Gebrauch gemacht. Jedoch haben auch das Experiment und die Erfahrung eine grosse Bedeutung für die angewandte Mechanik. Unsere Kenntnis der Eigenschaf-

ten der Körper in der Natur ist bei weitem nicht so vollkommen, dass man alle hierhergehörenden Fragen auf rein deduktivem Wege behandeln könnte.

Für die technische Mechanik wird hier folgende Haupteinteilung angenommen:

Erster Teil: Geometrische Bewegungslehre.
Zweiter Teil: Mechanik des materiellen Punktes.
Dritter Teil: Statik der starren Körper.
Vierter Teil: Dynamik der starren Körper.
Fünfter Teil: Theorie der Elasticität und Festigkeit.
Sechster Teil: Hydromechanik.

Erster Teil.

Geometrische Bewegungslehre.

Erster Abschnitt.

Bewegung des geometrischen Punktes.

§ 2.

Gegenstand der geometrischen Bewegungslehre.

Beschreibung der Bewegung, Bewegungsobiekt.

In der Einleitung ist hervorgehoben worden, dass die geometrische Bewegungslehre die Untersuchung der Bewegung ohne Rücksicht auf ihre Ursachen zur Aufgabe hat. Es wird darin die Bewegung hinsichtlich ihrer geometrischen Eigenschaften beschrieben. Die angewandten Grundbegriffe sind die rein geometrischen Begriffe und der Zeitbegriff. Die in Bewegung befindlichen Objekte werden als geometrische Grössen aufgefasst; sie sind der geometrische Punkt, das geometrische Punktsystem und der geometrische Körper. Das einfachste Bewegungsobjekt ist der geometrische Punkt; eine endliche oder eine unendliche Anzahl geometrischer Punkte bildet ein geometrisches Punktsystem. Ein geometrischer Körper kann als ein System von unendlich vielen geometrischen Punkten aufgefasst werden. Ein Punktsystem ist entweder unveränderlich oder

veränderlich. Man nennt es unveränderlich, wenn alle seine Punkte während der Bewegung ihre gegenseitigen Abstände unverändert beibehalten; ist dies nicht der Fall, so heisst das Punktsystem veränderlich. Im folgenden wird hauptsächlich die Bewegung unveränderlicher Punktsysteme untersucht.

Der Zeitbegriff. Die Einführung des Zeitbegriffes wurzelt darin, dass die Bewegung, welche zur Untersuchung vorliegt, mit einer anderen genau bekannten Bewegung verglichen wird, welche dann Normalbewegung heisst. Indem nämlich eine Bewegung eine Erscheinung eigener Art ist, kann sie nur dadurch untersucht werden, dass sie mit einer Erscheinung von derselben Art, d. h. mit einer gewissen Bewegung verglichen wird. Die Normalbewegung ist die Drehung der Erde um ihre Axe. Durch die Bewegung der Zeiger einer Uhr wird die Drehung der Erde mehr oder weniger gut nachgeahmt. Die Uhren werden zeitweilig direkt oder indirekt justirt. Die Zeit rechnet man von einem gewissen Anfangszeitpunkte aus, welcher in verschiedenen Problemen verschieden gewählt werden kann. Zur Bezeichnung der Zeit benützt man gewöhnlich den Buchstaben t, so dass also t eine stetig wachsende Veränderliche darstellt.

Bei vielen Problemen, wo es sich um die Bewegung eines geometrischen Körpers handelt, genügt es die Formeln für die Bewegung des geometrischen Punktes zu gebrauchen. So z. B. wenn die Bewegung eines Körpers eine translatorische ist (§ 19 unten), wobei alle Punkte dieselbe Bewegung haben, oder wenn die Verschiedenheit der Bewegungen der einzelnen Punkte im Verhältnis zu der Bewegung des Körpers im ganzen nicht in Betracht kommt, was z. B. oft der Fall ist, wenn die Dimensionen des Körpers klein gegen die Ausdehnung der Bewegung sind. Ähnliches gilt von einem materiellen Systeme oder einem materiellen Körper, dessen Bewegung oft durch die Bewegung eines seiner Punkte ersetzt

wird. Als Beispiele mögen die Bewegungen einer Kanonenkugel, eines Eisenbahnzuges, eines Schiffes, eines Himmelskörpers u. s. w. dienen.

§ 3.

Die Bewegung in der Bahn.

Ein in Bewegung befindlicher Punkt beschreibt eine Linie, welche die Bahn des Punktes heisst. Die einfachste Bahn ist die geradlinige; die Bahn kann aber auch eine ebene Curve oder eine Raumcurve sein. In derselben Bahn sind unendlich viele Bewegungen möglich. Am zweckmässigsten untersucht man deshalb zuerst die Bewegung in der Bahn, ohne Rücksicht auf die Form und die Lage der Bahn; nachher folgt eine Untersuchung der Bewegung des geometrischen Punktes sowohl hinsichtlich der Form und Lage der Bahn wie hinsichtlich der Bewegung in dieser Bahn.

Die Lage in der Bahn.

Die Bewegung eines Punktes M in seiner Bahn ist bekannt, sobald für jeden Zeitpunkt t die Lage des Punktes in der Bahn angegeben werden kann. Die Lage wird durch den von einem bestimmten Anfangspunkte O aus gerechneten Bogen OM der Bahnlinie bestimmt (Fig. 1). Der Bogen OM soll positiv in dem einen und negativ in dem entgegengesetzten Sinne gerechnet werden; er wird nebst seinem Vorzeichen mit s bezeichnet und soll Wegabstand heissen. Der Wegabstand s wird in Längeneinheiten, z. B. m. (Meter) gemessen; t hat als Einheit die Zeiteinheit, z. B. die Secunde. Die Grösse s hängt in irgend einer Weise von t ab; als analytischer Ausdruck dieser Abhängigkeit dient eine Gleichung

Fig. 1.

Der Wegabstand.

Gesetz der Bewegung.

$$s = f(t), \tag{1}$$

welche den Wegabstand als Function der Zeit angiebt. Die Gleichung (1) stellt das Gesetz der Bewegung in der Bahn dar.

Umkehrpunkt. In jedem Augenblicke geschieht die Bewegung in dem einen oder anderen Sinne, so dass s entweder wächst oder abnimmt, algebraisch verstanden. Wenn die Bewegung in einem gewissen Zeitmomente ihren Sinn ändert, so dass s vom Zunehmen zum Abnehmen übergeht oder umgekehrt, so hat man einen sog. Umkehrpunkt der Bewegung.

Berechnung der Weglänge. Wenn das Gesetz der Bewegung in der Bahn bekannt ist, so kann die Weglänge berechnet werden, welche in einem gegebenen Zeitintervalle, von t_0 bis t, zurückgelegt wird. Hierbei muss in Betracht genommen werden, ob Umkehrpunkte innerhalb des gegebenen Zeitintervalles vorhanden sind oder nicht. Wenn es keinen solchen Punkt giebt, so ist die während des betrachteten Zeitintervalles zurückgelegte Weglänge gleich dem numerischen Werte der Grösse

$$s - s_0 = f(t) - f(t_0),$$

worin s und s_0 die zu den Zeiten bez. t und t_0 gehörenden Wegabstände bezeichnen. Der numerische Wert oder der absolute Betrag werde wie gewöhnlich durch das Zeichen $| \, |$ angegeben, so dass also die Weglänge $|s - s_0|$ ist. Man kann aber auch in diesem Falle immer den positiven Bewegungssinn so festlegen, dass s mit der Zeit wächst, und hat dann einfach die Weglänge gleich $s - s_0$.

Giebt es dagegen Umkehrpunkte während der Zeit $t - t_0$, so muss dieser Zeitraum bei der Berechnung der Weglänge in kleinere Zeitintervalle zerlegt werden, welche durch diejenigen Zeitpunkte von einander getrennt werden, denen Umkehrpunkte entsprechen. Man berechnet dann die Weglänge innerhalb jedes Zeitintervalles für sich und addirt die Resultate. Beispielsweise sei N in

der Figur 2 ein zu der Zeit t_1 gehörender Umkehrpunkt in dem Abstande s_1 von O. Der Punkt bewegt sich zuerst von M_0 nach N und dann von N nach M zurück. Für die zurückgelegte Weglänge folgt dann

Fig. 2.

$$|s_1 - s_0| + |s - s_1| = (s_1 - s_0) + (s_1 - s) = 2\,s_1 - s_0 - s = 2\,f(t_1) - f(t_0) - f(t).$$

In ähnlicher Weise könnte man die Weglänge berechnen, wenn mehrere Umkehrpunkte vorkommen würden.

§ 4.

Diagramm der Bewegung.

Diagramm.

Die Bewegung eines Punktes in seiner Bahn wird graphisch mit Hülfe eines sog. D i a g r a m m e s veranschaulicht. Zu diesem Zwecke nimmt man in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme (Fig. 3) die Zeit t als Abscisse und den zugehörigen Wegabstand s als Ordinate. Dabei ergiebt sich eine Curve, die Diagrammlinie, welche die Abhängigkeit zwischen t und s, d. h. die Function

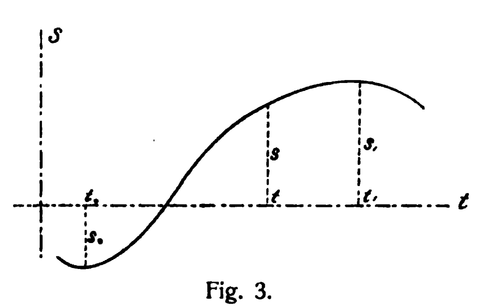


Fig. 3.

$$s = f(t)$$

graphisch darstellt.

Den Umkehrpunkten der Bewegung entsprechen Punkte der Diagrammlinie, in welchen die Ordinate s ein Maximum oder Minimum ist, wie bez. s_1 und s_0 in der Figur.

Zum Unterschiede von anderen, im folgenden zu erklärenden Diagrammdarstellungen soll das jetzt betrachtete Diagramm das Diagramm der Bewegung heissen. Die analytische und die graphische Darstellung der Bewegung eines Punktes in seiner Bahn vervollständigen einander gegenseitig und tragen dazu bei, eine exacte Vorstellung von der Bewegung aufkommen zu lassen.

§ 5.

Gleichförmige Bewegung.

Einteilung der Bewegungen.

Die Bewegung eines Punktes in seiner Bahn heisst gleichförmig, wenn in gleich grossen Zeitabschnitten stets gleich grosse Weglängen zurückgelegt werden.

Ungleichförmig heisst dagegen die Bewegung, wenn sie zu keiner Zeit gleichförmig ist.

Man wendet auch die Benennungen unveränderliche und veränderliche Bewegung an.

Weil das Verhältnis zwischen dem Wege und der Zeit in der gleichförmigen Bewegung unveränderlich ist, wird das Gesetz der gleichförmigen Bewegung durch die Gleichung

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=c, \tag{2}$$

oder

$$s=s_0+c(t-t_0) \tag{3}$$

ausgedrückt, wobei t_0 und s_0, t und s zusammengehörende Werte der Zeit und des Wegabstandes bezeichnen; t_0 und s_0 werden als unveränderlich, t und s als veränderlich betrachtet. Wenn $t_0=0$ ist, so folgt

$$s=s_0+ct,$$

und falls ausserdem $s_0=0$ ist, so wird

$$\frac{s}{t} = c \text{ und } s = ct. \tag{3}$$

Der Punkt beginnt dann zur Zeit $t = o$ seine Bewegung von dem Punkte O aus.

In der gleichförmigen Bewegung ist nach dem Obigen der Wegabstand s eine ganze Function ersten Grades von t und umgekehrt stellt eine lineare Gleichung zwischen s und t eine gleichförmige Bewegung dar.

Geschwindigkeit.

Das constante Verhältnis c zwischen dem Wege und der Zeit in der gleichförmigen Bewegung heisst Geschwindigkeit in der Bahn. Die Grösse c ist positiv oder negativ, je nachdem der Bogen s wächst oder abnimmt, und giebt somit durch ihr Vorzeichen denjenigen Sinn an, in welchem die Bewegung geschieht. Weil keine Umkehrpunkte in der gleichförmigen Bewegung vorhanden sind, kann der positive Bewegungssinn immer so gewählt werden, dass c positiv ist, vorausgesetzt jedoch, dass es sich um eine einzelne Bewegung, nicht um mehrere Bewegungen in derselben Bahn handelt.

Einheit der Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit wird als eine Grösse besonderer Art durch ihre eigene Einheit gemessen. Weil die Geschwindigkeit der Quotient einer Länge durch eine Zeit ist, so ist auch die Einheit der Geschwindigkeit gleich dem Quotienten aus der Längeneinheit durch die Zeiteinheit.

$$\text{Geschwindigkeitseinheit} = \frac{\text{Längeneinheit}}{\text{Zeiteinheit}},$$

z. B.

$$\frac{\text{m}}{\text{Sec}} \text{ oder } \frac{\text{km}}{\text{Stunde}}.$$

Dimensionen der Einheiten.

Wenn eine abgeleitete Einheit (hier die Einheit der Geschwindigkeit) in der obigen Weise vermittelst gewisser Grundeinheiten (hier der Einheiten für die Länge und für die Zeit) angegeben wird, so ergeben sich unmittelbar ihre sog. Dimensionen;

darunter sind die Potenzen verstanden, in welchen die abgeleitete Einheit die Grundeinheiten enthält. So ist z. B. die Einheit der Geschwindigkeit von der Dimension 1 in Bezug auf die Einheit der Länge und von der Dimension − 1 in Bezug auf die Einheit der Zeit. Es soll immer die Einheit einer Grösse angegeben werden, auch wenn es sich um eine abgeleitete Einheit handelt, weil ein anderes Verfahren ebenso unvollständig wäre wie z. B. die Angabe des Zahlwertes einer Länge ohne Nennung der Längeneinheit oder des Zahlwertes einer Fläche ohne Angabe der Flächeneinheit. Wenn die Dimensionen bekannt sind, unterliegt es keiner Schwierigkeit von gewissen Grundeinheiten zu anderen überzugehen.

Mit Hülfe der Formeln (2) und der specielleren, oft gebrauchten Formeln (3) können alle die gleichförmige Bewegung betreffenden Aufgaben behandelt werden.

Diagramm der gleichförmigen Bewegung.

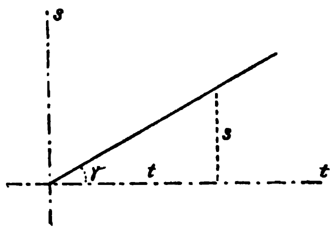


Fig. 4.

Das Diagramm der gleichförmigen Bewegung besteht aus einer geraden Linie, welche einen gewissen Winkel γ mit der t-Axe einschliesst (Fig. 4). Wenn die Gleichung der Bewegung

$$s = c\,t$$

ist, so geht die Gerade durch den Anfangspunkt. Zwischen dem Winkel γ und der Geschwindigkeit c hat man die Relation

$$c = \operatorname{tg} \gamma.$$

Je kleiner die Neigung der Diagrammlinie gegen die t-Axe ist, um so kleiner ist die Geschwindigkeit, und je grösser die Neigung ist, um so grösser ist die Geschwindigkeit. Mit $\gamma = 0$ bleibt s unverändert, d. h. der Punkt verharrt in Ruhe. Bei negativer Geschwindigkeit ist γ negativ.

Eine Anzahl nach einander folgender gleichförmiger Bewegungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten wird durch eine gebrochene Linie dargestellt. Wenn die gebrochene Gerade zu der t-Axe parallele Stücke enthält, so ist der Punkt in Ruhe während der entsprechenden Zeitabschnitte (Fig. 5). Es wird z. B. eine graphische Darstellung dieser Art angewandt um den Verkehr auf einer Eisenbahnstrecke deutlich zu veranschaulichen.

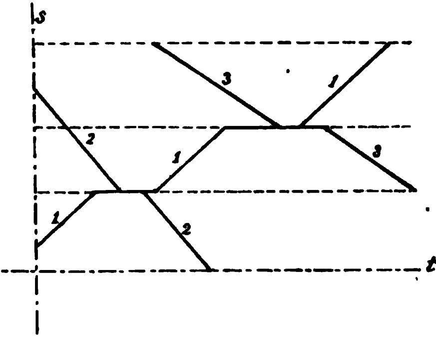


Fig. 5.

Die Figur 5 giebt den Fahrplan dreier Züge an, unter welchen 2 und 3 sich in einer Richtung entgegengesetzt der Bewegungsrichtung von 1 bewegen und die sich an den Haltestellen begegnen.

Anwendungen.

Ein Eisenbahnzug legt mit gleichförmiger Bewegung 150 km in 3 St. 15 Min. zurück. Wie gross ist dessen Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ als Einheit?

Die Formel (3)

$$c = \frac{s}{t}$$

liefert für

$$s = 150 \text{ km}; \; t = 3.25 \text{ St.}$$

$$c = \frac{150}{3.25} = 46.15 \; \frac{\text{km}}{\text{St.}}$$

$$1 \frac{\text{km}}{\text{St.}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ Sec}} = 0.2778 \; \frac{\text{m}}{\text{Sec}}.$$

$$c = 12.82 \; \frac{\text{m}}{\text{Sec}}.$$

2) In welcher Zeit durchfährt ein Dampfschiff eine 5 Meilen lange Strecke (1 Meile = 10 km), wenn es die Geschwindigkeit von 12 Knoten besitzt (1 Knoten Fahrt = $1.8522 \frac{\text{km}}{\text{St.}}$)?

3) Ein Radfahrer bewegt sich mit der Geschwindigkeit $4.5 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ und ruht nach drei Stunden Fahrt während einer halben Stunde. Man berechne den in 10 Stunden zurückgelegten Weg und construire das Diagramm der Bewegung.

§ 6.

Ungleichförmige Bewegung.

Die Gleichung

$$s = f(t)$$

möge eine ungleichförmige oder veränderliche Bewegung in der Bahn darstellen. Es seien t und s, sowie t' und s' zusammangehörende Werte der Zeit und des Wegabstandes, wobei t' eine spätere Zeit als t darstelle. Ferner sollen keine Umkehrpunkte innerhalb des Zeitabschnittes $t'-t$ vorkommen. Man nennt das Verhältnis

$$(4) \qquad \bar{u} = \frac{s'-s}{t'-t} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$$

Mittlere Geschwindigkeit.

zwischen dem Zuwachse des Wegabstandes und der Zeit die mittlere Bahngeschwindigkeit während des Zeitintervalles $t'-t$. Die mittlere Geschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit in einer gleichförmigen Bewegung, in welcher der Weg $s'-s$ in der Zeit $t'-t$ zurückgelegt wird.

Lässt man den Zeitpunkt t' sich mehr und mehr dem Zeitpunkte t nähern, so werden die Grössen $\triangle s$ und $\triangle t$ kleiner und kleiner. Wenn sich $\triangle t$ der Null nähert, so nähert sich aber das Verhältnis $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ einem bestimmten Grenzwerte, welcher die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung zur Zeit t heisst.

Unter der Geschwindigkeit einer Bewegung zu einer Zeit t wird also der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit in dem nachfolgenden Zeitintervalle $t'-t$ verstanden, wenn t' sich t nähert und schliesslich mit t zusammenfällt.

Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit zu einer Zeit t werde mit u bezeichnet, so dass also

$$u = \lim_{(\triangle t = 0)} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{ds}{dt} = f'(t), \tag{5}$$

ist, d. h. *die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Wegabstandès in Bezug auf die Zeit.*

Diagramm.

Das Diagramm der ungleichförmigen Bewegung ist eine krumme Linie (Fig. 6). Die Sehne, welche die zu den Zeiten t und t' gehörenden Punkte A und A' der Diagrammlinie verbindet, schliesst mit der t-Axe einen Winkel $\bar{a}$ ein, dessen Tangente gleich der mittleren Geschwindigkeit während des Zeitintervalles $t'-t$ ist.

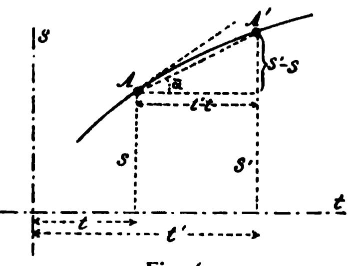


Fig. 6.

$$\bar{u} = \frac{s'-s}{t'-t} = \text{tg}\,\bar{a}$$

Lässt man den Punkt A' sich dem Punkte A nähern, so nähert sich die Sehne AA' der Tangente der Diagrammlinie im Punkte A. Wenn der Winkel zwischen dieser Tangente und der positiven Abscissenaxe mit a bezeichnet wird, so ergiebt sich

$$u = \frac{ds}{dt} = \text{tg}\, a.$$

Zu einer bestimmten Zeit t ist also die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung gleich der trigonometri-

schen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Tangente der Diagrammlinie in dem entsprechenden Punkte mit der t-Axe einschliesst.

In einem Umkehrpunkte ist die Tangente der Diagrammlinie parallel der t-Axe, weil die Ordinate ein Maximum oder Minimum ist, somit der Winkel α gleich Null und die Geschwindigkeit Null (siehe p. 9).

Wenn die Bewegung in einem gewissen Augenblicke in eine gleichförmige Bewegung übergehen würde, so wäre die Fortsetzung der Diagrammcurve eine Gerade, welche die Curve in demjenigen Punkte berührt, wo der Uebergang geschieht. Die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung ist identisch mit der Bahngeschwindigkeit in dem betreffenden Punkte.

Es wird stets vorausgesetzt, dass keine plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen in der Bewegung vorkommen.

§ 7.

Diagramm der Geschwindigkeit.

In derselben Weise, wie der Wegabstand s durch eine Curve dargestellt worden ist, kann auch die Geschwindigkeit u in der Bahn durch eine Curve veranschaulicht werden. Man betrachtet t als Abscisse und u als Ordinate und erhält das sog. Diagramm der Geschwindigkeit (Fig. 7). Daraus ist die Änderung der Geschwindigkeit von einer Zeit zu einer anderen ersichtlich. Die Bewegung geschieht in positivem Sinne während derjenigen Intervalle, innerhalb welcher die Diagrammlinie oberhalb der t-Axe liegt und in negativem Sinne während derjenigen Intervalle, innerhalb welcher die Diagrammlinie unterhalb

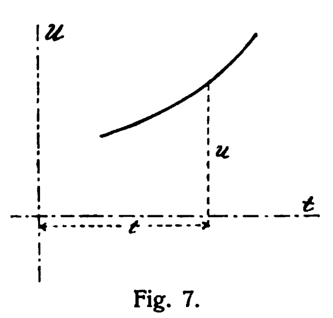


Fig. 7.

der t-Axe liegt. Die Schnittpunkte der Diagrammlinie mit der t-Axe geben diejenigen Zeitpunkte an, in welchen u gleich Null ist, wozu besonders alle Umkehrpunkte der Bewegung gehören.

Berechnung von s aus dem Diagramme der Geschwindigkeit 1:o bei gleichförmiger Bewegung.

Das Geschwindigkeitsdiagramm der gleichförmigen Bewegung ist eine zur t-Axe parallele gerade Linie mit der Gleichung $u = c$ (Fig. 8). Für den Flächeninhalt eines Rechteckes, welches zwischen der Diagrammlinie, der t-Axe und den Ordinaten bei t_0 und t liegt, erhält man den Wert $A = c\ (t - t_0)$, und somit nach (2)

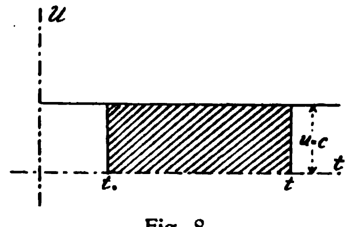


Fig. 8.

$$A = s - s_0.$$

Der Inhalt dieser Fläche, dem das positive oder negative Vorzeichen beigelegt wird, je nachdem die Fläche oberhalb oder unterhalb der Abscissenaxe liegt, ist also gleich dem Zuwachse des Wegabstandes.

2:o bei ungleichförmiger Bewegung.

Für eine beliebige Bewegung in der Bahn gilt der Satz: ***Die Veränderung des Wegabstandes in einem Zeitabschnitte ist gleich dem Inhalte derjenigen Fläche, welche zwischen der Diagrammlinie der Geschwindigkeit, der Axe der Abscissen und den Ordinaten am Anfang und am Ende des Zeitabschnittes gelegen ist.*** Zum Beweise des Satzes wird der betreffende Zeitabschnitt $t - t_0$ in kleinere Intervalle eingeteilt, man denkt sich ferner die wirkliche Bewegung durch eine andere ersetzt, welche innerhalb jedes Teilintervalles gleichförmig ist, die wirkliche Geschwindigkeit der Bewegung im Anfangspunkte des Intervalles besitzt und am Ende des Intervalles ihre Geschwindigkeit plötzlich um einen kleinen Betrag verändert. Innerhalb jedes Teilintervalles wird die Veränderung des Wegabstandes s durch die Fläche eines Rechteckes gemessen. Die Rechtecke bilden die untere treppenförmige Figur

in der Figur 9 und geben zusammen einen Flächeninhalt, welcher etwas kleiner als der Inhalt A der von der Diagrammlinie begrenzten Figur ist. Würde man dagegen während der einzelnen Teilintervalle gleichförmige Bewegungen mit der Endgeschwindigkeit des Intervalles annehmen, so erhielte man die Veränderung des Wegabstandes gleich dem Flächeninhalte der oberen treppenförmigen Figur und etwas grösser als A. Nimmt man dann die Teilintervalle kleiner und kleiner, so geht schliesslich an der Grenze die aus gleichförmigen Bewegungen zusammengesetzte Bewegung in die wirkliche ungleichförmige Bewegung über; die beiden treppenförmigen Linien fallen mit der Curve zusammen und die von ihnen nach oben begrenzten Flächen bekommen den Inhalt A, welchen sie die ganze Zeit von beiden Seiten zwischen sich eingeschlossen haben. Hiermit ist gezeigt, dass die Relation

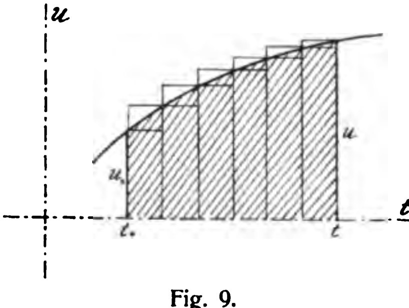


Fig. 9.

$$A = s - s_0$$

allgemein besteht. Wie schon oben bei der gleichförmigen Bewegung hervorgehoben wurde, muss A nach den Umständen positiv oder negativ gerechnet werden. Nimmt man alle Flächeninhalte sowohl oberhalb wie unterhalb der t-Axe positiv, so bekommt man die in dem Zeitintervalle zurückgelegte Weglänge.

Analytische Ableitung von s aus u.

Diese Resultate werden auch analytisch erhalten. Wenn die Geschwindigkeit u als Function der Zeit bekannt ist

$$u = \varphi(t),$$

so giebt die Formel (5)

$$u = \frac{ds}{dt},$$

woraus

$$ds = u\,dt = \varphi(t)\,dt$$

und durch Integration

$$s = \int \varphi(t)\,dt + \text{Constante}$$

folgt. Die Integrationsconstante wird dadurch bestimmt, dass die Werte t_0 und s_0 einander entsprechen müssen, und das Gesetz der Bewegung erhält die Form

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} u\,dt = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt. \tag{6}$$

Nach den Regeln der Integralrechnung bezeichnet dieses bestimmte Integral den Inhalt einer Fläche, welche zwischen der t-Axe, den Ordinaten für t_0 und t und der Curve

$$u = \varphi(t),$$

d. h. der Diagrammlinie der Geschwindigkeit gelegen ist.

§ 8.

Gleichförmig veränderliche Bewegung.

Die einfachste veränderliche Bewegung in der Bahn ist die gleichförmig veränderliche Bewegung. *Eine Bewegung heisst gleichförmig veränderlich, wenn die Geschwindigkeit in gleich langen Zeitabschnitten sich immer um gleich grosse Beträge ändert.* Wird die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit mit a bezeichnet, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung

$$u - u_0 = a(t - t_0), \tag{7}$$

worin t_0 und u_0, t und u zusammengehörende Werte sind; die ersteren sind unveränderlich, die letzteren veränderlich. Hieraus folgt

$$u = \varphi(t) = u_0 + a(t - t_0),$$

d. h. die Geschwindigkeit der gleichförmig veränderlichen Bewegung ist eine ganze Function ersten Grades in Bezug auf die Zeit.

Beschleunigung in der Bahn.

Die Grösse a, welche den Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit angiebt, heisst die Beschleunigung in der Bahn.

Beschleunigte und verzögerte Bewegung.

Wenn der numerische Wert der Geschwindigkeit mit der Zeit wächst, so heisst die Bewegung gleichförmig zunehmend oder beschleunigt; nimmt dagegen der numerische Wert der Geschwindigkeit mit wachsender Zeit ab, so nennt man die Bewegung gleichförmig abnehmend oder verzögert. Wie eine nähere Untersuchung zeigt, sind u und a in dem ersteren Falle entweder beide positiv oder beide negativ, in dem letzteren Falle dagegen von verschiedenem Vorzeichen.

Einheit der Beschleunigung.

Nach der Formel (7) ist die Beschleunigung gleich dem Quotienten aus einer Geschwindigkeit und einer Zeit, somit auch gleich dem Quotienten einer Länge durch das Quadrat einer Zeit (Siehe die Formel (12) unten). Es ist somit die entsprechende Einheit

$$\text{Einheit der Beschleunigung} = \frac{\text{Längeneinheit}}{(\text{Zeiteinheit})^2},$$

z. B.

$$\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2} \text{ oder } \frac{\text{km}}{\text{Min}^2}.$$

Die Beschleunigung hat folglich die Dimension 1 in Bezug auf die Längeneinheit und die Dimension −2 in Bezug auf die Zeiteinheit.

Gleichungen der Bewegung.

Nimmt man in der Gleichung (7) der Einfachheit wegen $t_0 = 0$ und bezeichnet die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit u_0 mit c, so erhält man

(8) $$u = c + at.$$

Aus diesem Gesetze der Geschwindigkeit kann die Bewegungsgleichung $s = f(t)$ auf verschiedene Arten erhalten werden. Am einfachsten findet man s durch eine Integration; nach (5) ist

$$\frac{ds}{dt} = c + at$$

und somit ergiebt sich

$$s = s_0 + c\,t + \tfrac{1}{2}\,at^2,$$

worin s_0 der der Zeit $t = 0$ entsprechende Wegabstand ist. In der gleichförmig veränderlichen Bewegung ist s nach dem obigen eine ganze Function zweiten Grades von t. Nimmt man den Anfangspunkt O der Wegabstände so an, dass $s_0 = 0$ wird, d. h. lässt die Bewegung zur Zeit $t = 0$ in diesem Punkte beginnen, so hat man einfacher

(9) $$s = c\,t + \tfrac{1}{2}\,at^2.$$

Diagramm der Geschwindigkeit.

Dieselbe Formel würde man durch Benützung des Geschwindigkeitsdiagrammes erhalten. Die Gleichung (8) zeigt, dass die Diagrammlinie eine Gerade ist (Fig. 10). Ihr Neigungswinkel β mit der t-Axe bestimmt man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u-c}{t} = a,$$

welche zeigt, dass die Beschleunigung in der Bahn

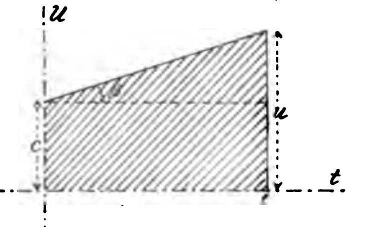


Fig. 10.

gleich der trigonometrischen Tangente dieses Neigungswinkels ist. Der Wert von s muss nach p. 17 gleich dem Inhalte der schraffirten Trapezfläche sein, somit

$$s = \frac{u + c}{2} t, \tag{10}$$

woraus nach Einsetzung des Ausdruckes (8) für u die Formel (9) hervorgeht.

Wenn man t zwischen den Gleichungen (8) und (10) eliminirt, so findet man die Formel

$$s = \frac{u^2 - c^2}{2a}. \tag{11}$$

Die Formeln (8) und (9) sind als Grundformeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung zu betrachten. Eine von ihnen kann durch die Formel (10) oder (11) ersetzt werden. Die vier Formeln enthalten fünf Grössen t, s, c, u und a, aus welchen zwei berechnet werden können, wenn die drei anderen bekannt sind. Vermittelst dieser Formeln lassen sich auch alle Probleme der gleichförmig veränderlichen Bewegung behandeln.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit c gleich Null ist, so ergeben die Formeln (8) und (9) die specielleren Formeln

$$u = at,$$
$$s = \tfrac{1}{2} at^2, \tag{12}$$

während aus (10) und (11)

$$s = \frac{u}{2} t = \frac{u^2}{2a} \quad \text{und} \quad u = \pm \sqrt{2as}$$

folgen.

Einige in diesen Formeln enthaltene Bewegungsgesetze sollen bei der verticalen Fall- und Wurfbewegung näher entwickelt werden.

§ 9.

Verticale Fall- und Wurfbewegung.

Beschleunigung der Schwere.

Die Erfahrung zeigt, dass die Bewegung eines im luftleeren Raume längs einer Verticalen frei fallenden Körpers gleichförmig beschleunigt ist. Die Beschleunigung dieser Fallbewegung ist die sog. Beschleunigung der Schwere, hat die Richtung des Lotes und verändert ihre Grösse nur wenig von einem Punkte der Erdoberfläche zu einem anderen. Sie wird mit g bezeichnet und hat im Mittel den Wert (Siehe auch § 46 unten)

$$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}.$$

Fallbewegung.

Für einen Körper, welcher zur Zeit $t = 0$ zu fallen beginnt, hat man die Gleichungen

$$u = gt,$$
$$s = \tfrac{1}{2} gt^2,$$

wobei s vom höchsten Punkte positiv nach unten gerechnet wird. Hieraus folgen die Gesetze:

Die Fallgeschwindigkeiten sind proportional den Zeiten. Am Ende der ersten Zeiteinheit sind die Zahlwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung gleich gross.

Die zurückgelegten Weglängen sind proportional den Quadraten der dazu gebrauchten Zeiten. Der ersten Secunde entspricht ein Weg $\frac{g}{2}$.

Die in den successiven Zeiteinheiten zurückgelegten Wege verhalten sich wie die ungeraden ganzen Zahlen. Der n:ten Secunde entspricht in der That die Weglänge

$$\frac{g}{2} n^2 - \frac{g}{2}(n-1)^2 = \frac{g}{2}(2n-1).$$

Der verticale Wurf.

Wenn ein Körper zur Zeit $t = o$ mit der Anfangsgeschwindigkeit c lotrecht nach oben geworfen wird, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$u = c - gt,$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2} gt^2,$$

worin der Wegabstand s vom Anfangspunkte positiv nach oben gerechnet wird. Die Bewegung des Körpers ist verzögert bis zur Zeit $T = \frac{c}{g}$, zu welcher die Geschwindigkeit gleich Null wird und die Bewegung ihren Sinn umkehrt, so dass der Körper jetzt mit beschleunigter Bewegung zu fallen beginnt. Der Abstand des Umkehrpunktes vom Anfangspunkte der Bewegung, die sog. Wurfhöhe hat den Wert

$$H = \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{g}.$$

Die Formeln gelten auch für die Bewegung nach abwärts, vorausgesetzt, dass s noch wie früher gerechnet wird.

Durch Elimination von t aus den Ausdrücken für u und s ergiebt sich

$$s = \frac{c^2 - u^2}{2g},$$

woraus ferner

$$u = \pm \sqrt{c^2 - 2gs}$$

folgt. Das Zeichen $+$ gilt für die Bewegung nach aufwärts, das Zeichen $-$ für die Bewegung nach unten. Numerisch sind aber die beiden Geschwindigkeiten in demselben Bahnpunkte gleich gross. Die Geschwindigkeit u nach unten würde man auch aus der Fallhöhe $H - s$ berechnen, und zwar ergäbe sich

$$u = -\sqrt{2g(H-s)} = -\sqrt{2g\left(\frac{c^2}{2g}-s\right)} = -\sqrt{c^2-2gs},$$

wie soeben gefunden.

Es wird dieselbe Zeit für die Bewegung von einem Punkte der Verticalen zu dem höchsten Punkte wie zurück zu demselben Punkte gebraucht, was daraus folgt, dass die Zeiten

$$t = T - \tau = \frac{c}{g} - \tau$$

und

$$t = T + \tau = \frac{c}{g} + \tau$$

entgegengesetzte Werte von u liefern. Besonders ist die ganze Wurfzeit gleich der doppelten Steigzeit, d. h.

$$2\,T = 2\,\frac{c}{g}.$$

Geschwindigkeitshöhe.

Diejenige Höhe $h = \frac{1}{2}\frac{u^2}{g}$, bis zu welcher ein mit der Geschwindigkeit u nach oben geworfener Körper steigt, oder von welcher ein Körper fallen muss, um die Geschwindigkeit u zu erlangen, heisst die zu der Geschwindigkeit u gehörende Geschwindigkeitshöhe.

Anwendungen.

1) Man berechne die mittlere Geschwindigkeit der gleichförmig veränderlichen Bewegung.

Aus den Formeln

$$s = ct + \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$s' = ct' + \tfrac{1}{2}at'^2$$

wird

$$\bar{u} = \frac{s'-s}{t'-t} = \frac{c(t'-t) + \frac{1}{2}a(t'^2-t^2)}{t'-t} = c + \frac{a}{2}(t'+t)$$

erhalten, was auch so geschrieben werden kann

$$\bar{u} = \tfrac{1}{2}\left[(c + at) + (c + at')\right] = \tfrac{1}{2}(u + u'),$$

d. h. die mittlere Geschwindigkeit während eines beliebigen Zeitabschnittes ist gleich dem aritmetischen Mittel aus der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit.

2) In einer während der Zeit t vorsichgehenden gleichförmig veränderlichen Bewegung sind die Anfangsgeschwindigkeit c und der Weg s bekannt. Es werden die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit gesucht. Man nehme speciell $s = 1$ km, $t = 20$ Sec., $c = 100\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$.

Aus den Formeln

$$u = c + at,$$
$$s = ct + \tfrac{1}{2}at^2$$

wird durch Auflösung in Bezug auf a und u

$$a = \frac{2(s - ct)}{t^2},$$

$$u = \frac{2s - ct}{t}$$

abgeleitet. Mit den numerischen Werten folgt

$$a = -5\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2},$$

$$u = 0\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}}.$$

Die Bewegung ist verzögert, und der Umkehrpunkt wird am Ende des Zeitintervalles erreicht.

3) Man construire das Diagramm der Bewegung eines vertical nach oben geworfenen Körpers.

Die Gleichung

$$s = ct - \tfrac{1}{2}gt^2$$

stellt mit t als Abscisse, s als Ordinate eine Parabel dar (Fig. 11), welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Ersetzt man t durch x und s durch y, so wird die Gleichung einfach in

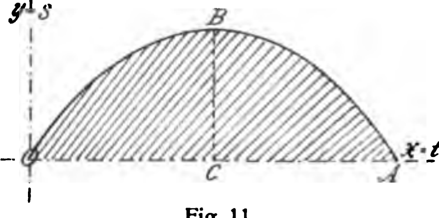


Fig 11.

$$\left(x-\frac{c}{g}\right)^2=-\frac{2}{g}\left(y-\frac{c^2}{2g}\right)$$

transformirt. Die Axe der Parabel ist parallel der y-Axe; der Scheitelpunkt hat die Coordinaten

$$OC=\frac{c}{g}=T=\text{der halben Wurfzeit},$$

$$CB=\frac{c^2}{2g}=H=\text{der Wurfhöhe},$$

und die Parabel schneidet die x-Axe wieder in dem Abstande

$$OA=2\,T=\text{der Wurfzeit}$$

von O aus.

§ 10.

Ungleichförmig veränderliche Bewegung.

Die betrachtete gleichförmig veränderliche Bewegung in der Bahn stellt eine specielle Art der veränderlichen Bewegung dar. Im allgemeinen ist die veränderliche Bewegung ungleichförmig veränderlich. ***Unter einer ungleichförmig veränderlichen Bewegung wird eine Bewegung verstanden, welche zu keiner Zeit gleichförmig veränderlich ist.*** Bei einer derartigen Bewegung gilt für die Geschwindigkeit ein Gesetz

$$u=\varphi(t), \tag{13}$$

worin u keine ganze Function ersten Grades von t ist. Ebenso wie der Begriff der Geschwindigkeit von der gleichförmigen auf die ungleichförmige Bewegung übernommen worden ist, wird der Begriff der Beschleunigung von der gleichförmig veränderlichen auf die ungleichförmig veränderliche Bewegung verallgemeinert.

Mittlere Beschleunigung.

Es seien u und u' die zu den Zeitpunkten t und t' gehörenden Geschwindigkeiten. Man nennt alsdann den Quotienten

$$\bar{a} = \frac{u'-u}{t'-t} = \frac{\triangle u}{\triangle t} \tag{14}$$

aus dem Zuwachse der Geschwindigkeit und der dazu verbrauchten Zeit die mittlere Beschleunigung während des Zeitabschnittes $t'-t$. Diese mittlere Beschleunigung ist gleich der Beschleunigung einer gleichförmig veränderlichen Bewegung, in welcher die Geschwindigkeit während der Zeit $t'-t$ um den Betrag $u'-u$ zunehmen würde.

Lässt man den Zeitpunkt t' sich mehr und mehr dem Zeitpunkte t nähern, so werden die Änderungen $\triangle u$ und $\triangle t$ kleiner und kleiner; ihr Verhältnis nähert sich einem bestimmten Grenzwerte, welcher die Beschleunigung in der Bahn bei der ungleichförmig veränderlichen Bewegung ist.

Beschleunigung.

Unter der Beschleunigung einer Bewegung zu einer Zeit t versteht man den Grenzwert der mittleren Beschleunigung in einem nachfolgenden Zeitintervalle $t'-t$, wenn t' sich t nähert und schliesslich damit zusammenfällt.

Die Beschleunigung zu einer Zeit t werde mit a bezeichnet. Dann ist

$$a = \lim_{(\angle t = 0)} \frac{\triangle u}{\triangle t} = \frac{du}{dt} = \varphi'(t), \tag{15}$$

d. h. ***die Beschleunigung in der Bahn ist gleich der Ableitung der Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit.***

Auf Grund der Formel (5) folgt ferner

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t), \tag{16}$$

d. h. ***die Beschleunigung in der Bahn ist gleich der zweiten Ableitung des Wegabstandes in Bezug auf die Zeit.***

Anwendung des Diagrammes für u.

Die mittlere Beschleunigung während eines Zeitabschnittes $t'-t$ sowie die Beschleunigung zu einer Zeit t folgen auch aus dem Diagramme der Geschwindigkeit (Fig. 12). Eine Sehne BB', welche die zu den Zeiten t und t' gehörenden Punkte der Diagrammlinie verbindet, schliesst mit der t-Axe einen Winkel $\overline{\beta}$ ein, dessen Tangente gleich der mittleren Beschleunigung während des betreffenden Zeitintervalles ist.

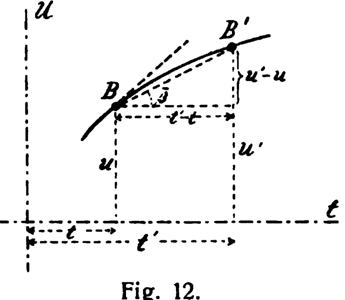


Fig. 12.

$$\overline{a} = \frac{u'-u}{t'-t} = \operatorname{tg} \overline{\beta}.$$

Lässt man nun den Punkt B' sich dem Punkte B nähern, so nähert sich die Sehne BB' der Tangente der Diagrammcurve im Punkte B. Wird der Winkel zwischen dieser Tangente und der t-Axe mit β bezeichnet, so hat man also

$$a = \frac{du}{dt} = \operatorname{tg} \beta.$$

Die Beschleunigung der Bewegung in der Bahn zu einer Zeit t ist somit gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Tangente des Geschwindigkeitsdiagrammes in dem entsprechenden Punkte mit der t-Axe einschliesst.

Wenn eine ungleichförmig veränderliche Bewegung in einem bestimmten Zeitmomente in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung übergeht, so sind die Beschleunigung a und der Winkel β nachher constant, folglich die Fortsetzung des Geschwindigkeitsdiagrammes eine gerade Linie.

Beschleunigte und verzögerte Bewegung.

Die ungleichförmig veränderliche Bewegung ist in einem bestimmten Augenblicke beschleunigt oder zunehmend, falls u und a beide positiv oder beide negativ sind, dagegen verzögert oder abnehmend, wenn u und a verschiedene Vorzeichen besitzen (Vergl. p. 20).

Analytische Bestimmung von u aus a.

Wenn die Beschleunigung einer Bewegung in der Form

$$a = \chi(t),$$

gegeben ist, so folgt aus der Formel

$$a = \frac{du}{dt}$$

$$du = \chi(t)\, dt$$

und durch Integration

$$u = \int \chi(t)\, dt + \text{Const.}$$

Sollen ferner die Werte t_0 und u_0 einander entsprechen, so erhält man durch die Bestimmung der Integrationsconstanten für die Geschwindigkeit den Ausdruck

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} \chi(t)\, dt. \tag{17}$$

Nachdem die Geschwindigkeit gefunden ist, erhält man durch eine zweite Integration (p. 19) die Gleichung der Bewegung.

Graphische Bestimmung von u.

Auch die Beschleunigung in der Bahn kann vermittelst einer Diagrammcurve dargestellt werden, wobei t als Abscisse, a als Ordinate aufgetragen wird. Aus dieser Diagrammdarstellung erhält man die Geschwindigkeitsänderung gleich dem Inhalte einer Fläche, welche zwischen der Diagrammcurve, der t-Axe und zwei Ordinaten liegt, in ganz derselben Weise wie der Wegabstand aus dem Geschwindigkeitsdiagramme hervorging.

Die drei Gleichungen

$$s = f(t),$$
$$u = f'(t),$$
$$a = f''(t),$$

für den Wegabstand, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung oder die drei entsprechenden graphischen Darstellungen gestatten eine vollständige Untersuchung der Bewegung eines Punktes in seiner Bahn.

Anwendungen.

1) Man bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung

$$s = ct^3.$$

Durch einmalige Differentiation ergiebt sich für die Geschwindigkeit

$$u = \frac{ds}{dt} = 3\,ct^2$$

und durch eine zweite Differentiation für die Beschleunigung

$$a = \frac{du}{dt} = 6\,ct.$$

Die Geschwindigkeit ist somit proportional dem Quadrate der Zeit, die Beschleunigung der Zeit selbst. Beide sind Null für $t = 0$ und haben sonst dasselbe Vorzeichen, so dass die Bewegung also beschleunigt ist.

2) Eliminirt man t zwischen den Gleichungen

$$s = f(t),$$
$$u = f'(t),$$

so folgt eine Gleichung zwischen u und s,

$$u = \varphi(s).$$

Wenn diese Gleichung gegeben ist, so ergiebt sich durch Division der Gleichungen

$$a = \frac{du}{dt},$$

und

$$u = \frac{ds}{dt}$$

zur Berechnung der Beschleunigung die Formel

$$a = u \frac{du}{ds} = u \psi'(s).$$

Die Gleichung

$$u = \psi(s)$$

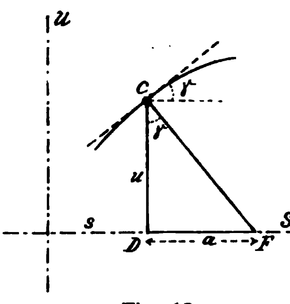


Fig. 13.

stellt mit s als Abscisse, u als Ordinate eine Curve dar. (Fig. 13). Bezeichnet man mit γ den Winkel zwischen der Tangente in C und der s-Axe, so ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{du}{ds}.$$

Es sei CF die Normale der Curve im Punkte C. Dann folgt aus dem Dreiecke DCF

$$DF = u \operatorname{tg} \gamma = u \frac{du}{ds}$$

d. h. die Subnormale DF der Curve ist dem Zahlwerte nach gleich der Beschleunigung der Bewegung in der Bahn.

Wenn zwischen u und s speciell die Relation

$$u = \sqrt{2ps}$$

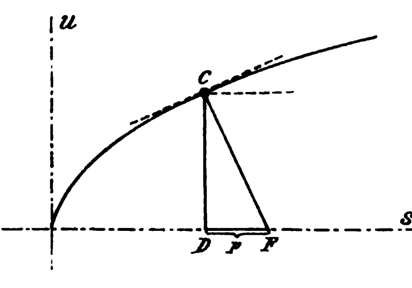


Fig. 14.

besteht, so ist die betreffende Curve eine Parabel (Fig. 14) mit der s-Axe als Axe und dem Scheitel im Coordinatenanfangspunkte. Es folgt dann

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{\frac{p}{2s}}$$

und

$$a = u \frac{du}{ds} = p,$$

d. h. die Bewegung ist gleichförmig veränderlich. Die letzte Gleichung enthält das bekannte Resultat, dass die Subnormale der Parabel constant ist.

Zu der Gleichung der Bewegung selbst kommt man auf folgende Weise. Aus

$$u = \psi(s)$$

und

$$u = \frac{ds}{dt}$$

folgt

$$dt = \frac{ds}{\psi(s)},$$

und durch Integration ergiebt sich

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\psi(s)},$$

wobei t_0 und s_0 einander entsprechen. In dem obigen speciellen Beispiele erhält man mit $t_0 = 0$ und $s_0 = 0$

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2ps}} = \sqrt{\frac{2s}{p}}$$

und

$$s = \tfrac{1}{2} p t^2.$$

§ 11.

Einfache oscillirende Bewegung.

Eine Bewegung in der Bahn sei durch die Gleichung

$$s = r \sin nt$$

dargestellt, wo r und n positive Constanten bezeichnen. Aus dieser Gleichung folgen durch Differentiation die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$u = rn \cos nt,$$
$$a = -rn^2 \sin nt.$$

Man berechnet hieraus folgende einander entsprechende Werte von t, s, u und a.

t	o	$\frac{\pi}{2n}$	$2\frac{\pi}{2n}$	$3\frac{\pi}{2n}$	$4\frac{\pi}{2n}$
s	o	r	o	$-r$	o
u	rn	o	$-rn$	o	rn
a	o	$-rn^2$	o	rn^2	o

Zur Zeit $t = o$ beginnt der Punkt seine Bewegung mit der Geschwindigkeit rn im Punkte O (Fig. 15) und bewegt sich in positivem Sinne mit abnehmender Geschwindigkeit bis zu dem Umkehrpunkte N_1, welcher zur Zeit

Fig. 15.

$\frac{\pi}{2n}$ erreicht wird, kehrt dann mit zunehmender Geschwindigkeit nach O zurück, wobei die Geschwindigkeit in einem Bahnpunkte beim Hin- und Hergang dieselbe absolute Grösse hat. Die Bewegung setzt sich dann nach der negativen Seite fort, wobei der Umkehrpunkt N_2 zur Zeit $3\frac{\pi}{2n}$ erreicht wird. Nach der Zeit $\frac{2\pi}{n}$ ist der Punkt nach O zurückgelangt und beginnt dieselbe Bewegung von neuem. Die Bewegung ist somit eine periodische Schwingung zwischen zwei Punkten und wird zum Unterschiede von anderen complicirteren Schwingungsbewegungen eine einfache oscillirende Bewegung genannt. Wenn die Zeit einer Oscillation hin und zurück $\frac{2\pi}{n}$ mit T (Oscillationsdauer, Schwingungszeit) bezeichnet wird, so erhält man für die Gesetze der Bewegung die Ausdrücke

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{18}$$

$$u = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \tag{19}$$

(20) $$a = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Der grösste Wert r des Abstandes s vom Schwingungsmittelpunkte O heisst Amplitude oder Schwingungsweite.

Aus den Gleichungen (18) und (20) folgt

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} s.$$

Die Beschleunigung der oscillirenden Bewegung ist somit proportional dem Abstande s vom Schwingungsmittelpunkte O und stets gegen O gerichtet.

Periodische Bewegung.

Die periodischen Bewegungen, unter welchen die einfache oscillirende Bewegung einen speciellen Fall darstellt, sind von besonderer Bedeutung, weil mehrere der Bewegungserscheinungen in der Natur sowie die meisten Bewegungen der Maschinen zu ihnen gehören. Die Bewegung eines Körpers heisst periodisch, falls er nach einer bestimmten Zeit immer in denselben Bewegungszustand zurückkehrt, d. h. wenn alle seine Punkte dieselben Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erlangen.

§ 12.

Die Projectionen der Bewegung.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.

Alle bisherigen Betrachtungen haben der Bewegung eines Punktes in seiner Bahn, unabhängig von der Form der Bahn, gegolten. Für eine grosse Anzahl von Aufgaben ist aber eine solche Untersuchung der Bewegung ungenügend; es muss die Bewegung des Punktes so angegeben werden, dass auch seine Bahn bestimmt wird.

Geradlinige Bewegung.

Wenn die Bahn geradlinig ist, so wird die Bewegung vollständig bestimmt durch die Angabe der Lage der

Bahn und der Gleichung der Bewegung in der Bahn. Wenn nichts besonderes über die Form der Bahn angegeben ist, so stellt man sich die Bahn am besten als geradlinig vor. So bezeichnet beispielsweise die Benennung gleichförmige Bewegung fast immer eine geradlinige gleichförmige Bewegung, falls nichts hinzugefügt ist, wie z. B. gleichförmige Bewegung in einem Kreise.

Krummlinige Bewegung.

Wenn die Bahn eine krumme Linie ist, so lässt sich zwar die Bewegung vollständig definiren durch die Angabe der Lage und Form der Bahnlinie sowie der Gleichung der Bewegung in der Bahn. Meistens ist es aber einfacher die Bewegung durch ihre sog. Projectionsbewegungen zu bestimmen.

Ebene Bahn.

Es werde zuerst die Bewegung eines Punktes in einer ebenen Bahncurve betrachtet. In der Ebene der Curve werden zwei Coordinatenaxen gewählt (Fig. 16), welche mit einander einen Winkel v einschliessen. Die Lage eines Punktes M der Bahncurve wird durch die beiden Punkte A und B bestimmt, welche seine beiden parallel den Coordinatenaxen gezeichneten Projectionen darstellen. Wenn der Punkt M sich bewegt, so bewegen sich die beiden Projectionspunkte A und B längs der Coordinatenaxen. Diese Bewegungen heissen die Projectionsbewegungen von M und finden mit der Bewegung von M gleichzeitig statt. Die beiden Projectionsbewegungen bestimmen vollständig die Bewegung von M, indem zwei gleichzeitige Lagen von A und B die Lage von M eindeutig bestimmen.

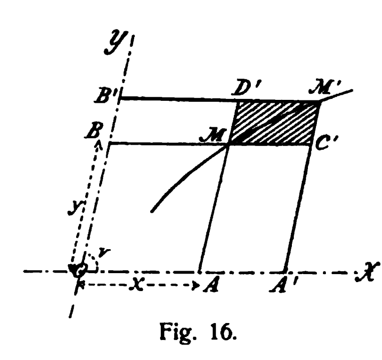


Fig. 16.

Es kann die krummlinige Bewegung noch in einer anderen Weise als von zwei geradlinigen Bewegungen

abhängend aufgefasst werden. Der Punkt M bewegt sich längs der Geraden BC', welche sich parallel zu sich selbst verschiebt, so dass ihre Punkte mit der y-Axe parallele Geraden beschreiben. Wenn M sich um das Stück $MC' = AA'$ bewegt hat, so ist die Bahnlinie um das Stück $MD' = BB'$ fortgeschritten, so dass M' die neue Lage des Punktes ist.

Zu demselben Resultate kommt man, wenn man sich AM als eine Bahnlinie vorstellt, auf der der Punkt M sich bewegt, während sich diese Bahnlinie so verschiebt, dass ihre Punkte zu der x-Axe parallele Geraden beschreiben. Die erstere Bewegung ist dieselbe wie die Projectionsbewegung auf der y-Axe, die zweite Bewegung stimmt mit der Projectionsbewegung auf der x-Axe überein.

Resultirende Bewegung. Bewegungs-componenten.

Die Bewegung des Punktes M, heisst die resultirende Bewegung oder die aus den beiden Projectionsbewegungen von A und B zusammengesetzte Bewegung. Umgekehrt sagt man, dass die beiden letzteren durch eine Zerlegung der Bewegung des Punktes M entstehen und deren Componenten sind.

Parallelogramm der Bewegungen.

Zur Zusammensetzung oder Zerlegung dient das Parallelogramm $MC'M'D'$, welches das Parallelogramm der Bewegungen heisst. In ihm sind die beiden der Zeit $t'-t$ entsprechenden Wege MC' und MD' zwei in M zusammenstossende Seiten; ferner sind die Anfangs- und Endlage des beweglichen Punktes zwei Gegenecken M und M' des Parallelogrammes.

Gleichungen der Bewegung.

Analytisch werden die beiden Projectionsbewegungen durch die Gleichungen

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \tag{21}$$

dargestellt, worin x und y Wegabstände sind, welche vom Coordinatenanfangspunkte positiv in dem Sinne je einer

positiven Coordinatenaxe gerechnet werden. Es folgt die Gleichung der krummlinigen Bahn durch Elimination von t zwischen den beiden Gleichungen (21), in irgend einer Form

$$F(x, y) = 0.$$

Anwendungen.

1) Die beiden Projectionsbewegungen seien gleichförmig und mögen die Gleichungen

$$x = c_1 t,$$
$$y = c_2 t$$

besitzen.

Als Gleichung der Bahn folgt dann

$$\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1},$$

$$c_1 y - c_2 x = 0,$$

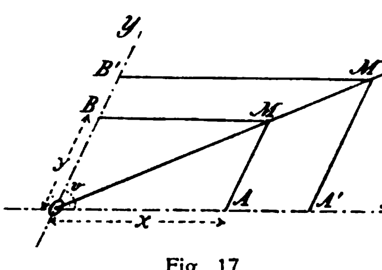


Fig. 17.

d. h. die Bahn ist eine Gerade durch den Anfangspunkt (Fig. 17). Bezeichnet man mit s den Abstand OM, so folgt aus dem Dreiecke OAM

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy \cos v} =$$
$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\,c_1 c_2 \cos v}\,.\,t,$$

d. h. die Bewegung ist selbst gleichförmig und hat die Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\,c_1 c_2 \cos v}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken OAM und $OA'M'$ ergiebt sich

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OM'}{OA'},$$

und

$$\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'} = \text{const.} = c.$$

Die Gleichung der Bewegung in der Bahn ist

$$s = ct.$$

2) Eine gleichförmige Bewegung in einem Kreise wird auf eine Gerade in der Ebene des Kreises projiciirt; man untersuche die Projectionsbewegung.

Auf der Geraden erhält man zwei äusserste Punkte A' und B', welche den Punkten A und B des Kreises entsprechen und Umkehrpunkte der Projectionsbewegung sind (Fig. 18). Bei der Bewegung des Punktes M im Kreise wächst der Winkel $v = COM$, welchen der Radius OM mit einem festen Radius OC bildet, welcher senkrecht zu der Projectionsaxe $B'A'$ genommen wird, proportional der Zeit. Nimmt man $t = o$ an, wenn M mit C zusammenfällt, so folgt

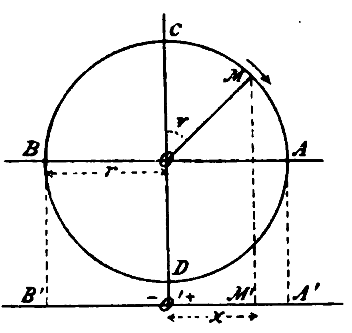


Fig. 18.

$$v = nt,$$

und wenn die Zeit eines Umlaufs mit T bezeichnet wird, so ergiebt sich

$$2\pi = nT,$$

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

und

$$v = 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ferner hat man für den Wegabstand x der Projectionsbewegung, welcher von dem Projectionspunkte O' von O aus gerechnet wird,

$$x = r\cos(90° - v) = r\sin v,$$

$$x = r\sin 2\pi \frac{t}{T},$$

woraus hervorgeht, dass die Bewegung eine einfache oscillirende Bewegung ist (p. 34). *Es ist somit die Projection einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise auf eine beliebige Gerade in der Ebene des Kreises eine einfache oscillirende Bewegung.*

Wenn man zwei beliebig gewählte, zu einander senkrechte Durchmesser des Kreises als Coordinatenaxen wählt, (Fig. 19), so wird die gleichförmige Bewegung im Kreise durch die Gleichungen

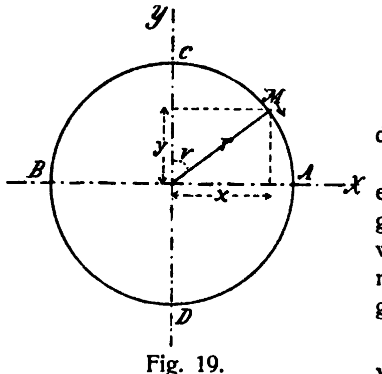


Fig. 19.

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

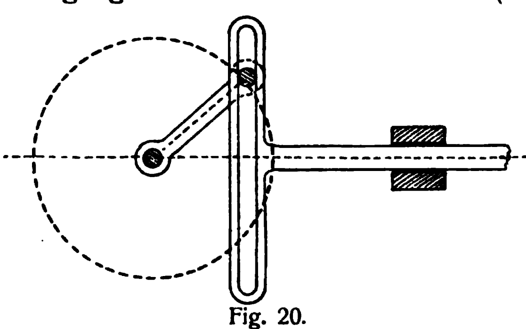
$$y = r \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt.

Die Figur 20 veranschaulicht eine einfache oscillirende Bewegung der Punkte einer Stange, welche entsteht, wenn die Kurbel mit constanter Geschwindigkeit gedreht wird.

Räumliche Bahn.

Zur Darstellung der Bewegung eines Punktes auf einer Curve im Raume benützt man die Projectionen der Bewegung auf drei Coordinatenaxen (Fig.[1] 21). Durch den Punkt M werden drei zu je einer Coordinatenebene parallele Ebenen geführt, welche auf den Coordinatenaxen bez. die Punkte A, B und C abschneiden. Man hat dann vier gleichzeitige Bewegungen, unter welchen die Bewegungen von A, B und C die Bewegung von M vollständig bestimmen.


Fig. 20.

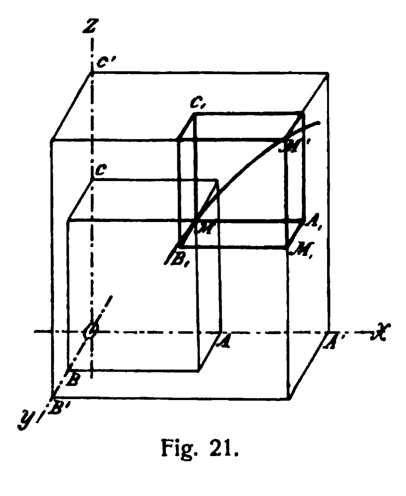


Fig. 21.

Parallelepiped der Bewegungen.

Die Bewegung von M heisst zusammengesetzt aus den drei Bewegungen längs der Coordinatenaxen, welche wieder die Componenten

der Bewegung von M genannt werden. Die Beziehungen zwischen den vier Bewegungen können auf folgende Weise aufgefasst werden. Der Punkt M kommt aus der Lage M in die Lage M', indem er sich in der Ebene A_1MB_1 bewegt, während sich diese Ebene parallel zu sich selbst verschiebt, so dass alle ihre Punkte sich parallel der z-Axe bewegen. Wenn M in der Ebene von M nach M_1 gekommen ist, wobei die Projectionen auf die x- und die y-Axe bez. $MA_1 = AA'$ und $MB_1 = BB'$ sind, so hat die Ebene sich parallel der z-Axe um $M_1M' = CC'$ verschoben. Zu demselben Resultate würde man kommen, wenn man die bewegliche Ebene parallel zu einer der anderen Coordinatenebenen wählen würde. Die Punkte M und M' sind Gegenecken in einem Parallelepiped, in welchem die in M zusammenstossenden drei Kanten die gleichzeitigen Wege in den drei Projectionsbewegungen darstellen. Dieses Parallelepiped, durch welches eine beliebige Lage des Punktes in seiner Bewegung gefunden wird, wenn die Projectionsbewegungen bekannt sind, heisst Parallelepiped der Bewegungen.

Gleichungen der Bewegung.

Analytisch stellt man die drei Projectionsbewegungen durch die Gleichungen

$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t) \tag{22}$$

dar. Zwei von diesen Gleichungen, z. B.

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t),$$

definiren nach (21) eine Bewegung in einer Coordinatenebene, hier in der xy-Ebene, welche die Projectionsbewegung des Punktes auf die Ebene heisst. Durch die Projectionsbewegung auf eine Ebene (die xy-Ebene) sowie auf eine Axe (die z-Axe), welche nicht in der Ebene liegt, wird die Bewegung des Punktes M ebenfalls völlig bestimmt.

Durch Elimination von t zwischen den Gleichungen (22) folgen zwei Gleichungen

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$

welche zwei krumme Flächen und zusammen die Bahncurve des Punktes darstellen. Enthalten die Gleichungen nur zwei Coordinaten, so stellen sie zwei Cylinderflächen dar, deren Erzeugende zu je einer Coordinatenaxe parallel sind.

§ 13.

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Geschwindigkeit.

Unter der Geschwindigkeit einer beliebigen krummlinigen Bewegung wird der absolute Wert der Geschwindigkeit in der Bahn verstanden. Wenn also s der zur Zeit t gehörende Wegabstand ist, so ist die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$u = \lim \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|, \tag{23}$$

wo die Bedeutung des Zeichens $||$ schon auf p. 8 hervorgehoben wurde.

Geschwindigkeit der Projectionsbewegung.

Die Geschwindigkeit hat in jedem Augenblicke die Richtung der Tangente der Bahn nach der Seite, nach welcher die Bewegung erfolgt. Sie wird durch eine Strecke u dargestellt, die man in einem bestimmten Massstabe misst und vom Bahnpunkte M auf der Tangente aufträgt (Fig. 22). Es seien M und M' zwei zu den Zeiten t und t' gehörende Lagen des beweglichen Punktes, A und A' dessen Projectionen auf eine Gerade (Fig. 23). Die Projectionslinien AM und $A'M'$ sind parallel zu einer Ebene gezogen, welche speciell senkrecht zu der Geraden AA' stehen kann. Weil

Fig. 22.

die Sehne k sich der Grösse nach dem Bogen $|\triangle s|$ und der Richtung nach der Tangente in M unbegrenzt nähert, wenn der Punkt M' sich dem Punkte M nähert, so erhält man auch die Geschwindigkeit gleich dem Grenzwerte des Quotienten aus k und $t' - t = \triangle t$ für $\triangle t = o$. Somit ist

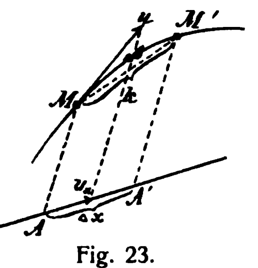


Fig. 23.

$$u = \lim \left|\frac{\triangle s}{\triangle t}\right| = \lim \frac{k}{\triangle t}.$$

Die Sehne k hat die Projection $AA' = \triangle x$ auf die Gerade AA'. Trägt man auf der Sehne von M aus das Stück $\frac{k}{\triangle t}$ und auf AA' von A aus die Grösse $\left|\frac{\triangle x}{\triangle t}\right|$ ab, so ist auch $\left|\frac{\triangle x}{\triangle t}\right|$ die Projection von $\frac{k}{\triangle t}$. Dies gilt noch an der Grenze, wenn M' mit M zusammenfällt; $\frac{k}{\triangle t}$ geht dann in die Geschwindigkeit der Bewegung selbst, $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ in die Geschwindigkeit u_x der Projectionsbewegung über, und man erhält den Satz: *Die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung einer beliebigen Bewegung auf eine Gerade ist in jedem Augenblicke die Projection der Geschwindigkeit der Bewegung.* Dabei beachtet man, dass die Projection u_x sowohl positiv als negativ sein kann, während die Geschwindigkeit u selbst immer positiv gerechnet wird.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Wenn man die Bewegung in einer ebenen Bahncurve wie in § 12 durch ihre beiden Projectionsbewegungen bestimmt, so erhält man in jeder derselben eine Geschwindigkeit, welche die Projection der Geschwindigkeit u der resultirenden Bewegung ist. Diese beiden Geschwindigkeiten mögen mit u_x und u_y bez. bezeichnet werden (Fig. 24). Sie bilden, nach M verschoben, die beiden Seiten eines Parallelogrammes, in welchem u die

Diagonale ist. Das Parallelogramm heisst das **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.** Man nennt ferner u die Resultirende aus u_x und u_y oder zusammengesetzt aus u_x und u_y. Umgekehrt wird eine Geschwindigkeit u vermittelst eines Parallelogrammes in die beiden Componenten u_x und u_y zerlegt. Es folgt hieraus das sog. **Parallelogrammgesetz der Geschwindigkeiten:**

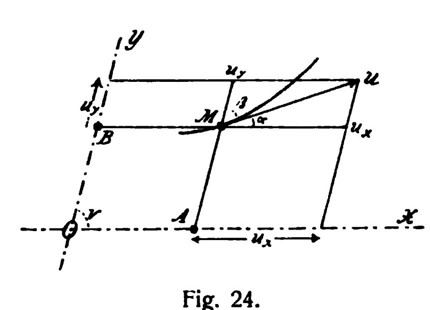


Fig. 24.

Die Resultirende von zwei gegebenen Geschwindigkeiten ist die Diagonale eines Parallelogrammes, in welchem die beiden Geschwindigkeiten ein Paar zusammenstossender Seiten bilden.

Analytische Zerlegung und Zusammensetzung.

Wenn der Winkel zwischen den Coordinatenaxen mit ν, die Winkel, welche die Geschwindigkeit u mit den Axen bildet, bez. mit α und β bezeichnet werden, so ergiebt sich zur rechnerischen Ermittelung von u_x und u_y das System von Gleichungen

$$\alpha + \beta = \nu,$$

$$(24) \qquad u_x = \frac{\sin \beta}{\sin \nu} u,$$

$$u_y = \frac{\sin \alpha}{\sin \nu} u.$$

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so sind die Projectionen ortogonal, und das Parallelogramm für die Zusammensetzung oder Zerlegung der Geschwindigkeiten geht in ein Rechteck über. Die Formeln (24) vereinfachen sich dann und geben zur Berechnung der Geschwindigkeitscomponenten

$$(25)\qquad \begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ, \\ u_x &= u \cos \alpha, \\ u_y &= u \sin \alpha. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzteren folgen umgekehrt

$$(26)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{u_y}{u_x}, \\ u &= \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2} = \frac{u_x}{\cos \alpha} = \frac{u_y}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

zur Berechnung der Richtung und Grösse der resultirenden Geschwindigkeit.

Wenn die beiden Projectionsbewegungen gemäss (21) durch

$$x = f_1(t); y = f_2(t)$$

gegeben sind, so folgen in Uebereinstimmung mit dem Satze auf p. 43 die Geschwindigkeitscomponenten

$$(27)\qquad u_x = \frac{dx}{dt} = f_1'(t);\ u_y = \frac{dy}{dt} = f_2'(t).$$

Unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinatenaxen ist die Grösse der resultirenden Geschwindigkeit

$$(28)\qquad u = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Anwendungen.

1) Die Geschwindigkeit der in § 12. Anw. 1) betrachteten Gleichförmigen Bewegung mit den Gleichungen

$$x = c_1 t;\ y = c_2 t$$

folgt unmittelbar durch Zusammensetzung der beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 der Componentenbewegungen mit Hülfe des Parallelogrammgesetzes (Fig. 25) und hat folglich die Grösse

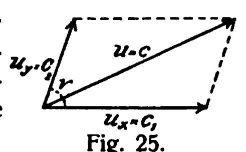


Fig. 25.

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos \nu},$$

was in Uebereinstimmung mit dem früheren Resultate ist.

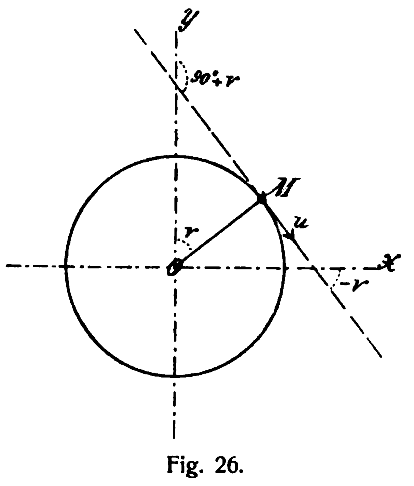


Fig. 26.

2) In der Anw. 2), § 12 findet man für die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung im Kreise, indem die Umlaufszeit T einem Wege $2\pi r$ entspricht,

$$u = \frac{2\pi r}{T}.$$

Die Componenten dieser Geschwindigkeit parallel den beiden Axen (Fig. 26) sind

$$u_x = u \cos v = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$u_y = - u \sin v =$$

$$= - \frac{2\pi r}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Dieselben Werte folgen auch direct durch Differentiation der auf p. 40 gefundenen Bewegungsgleichungen

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y = r \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

Bei einer Bewegung, welche auf ein räumliches Coordinatensystem bezogen wird, hat man drei Componenten der Geschwindigkeit. Für sie gilt das Gesetz des Parallelepipeds der Geschwindigkeiten: *Die Resultirende von drei Geschwindigkeiten ist die Diagonale eines Parallelepipeds, in welchem die drei Geschwindigkeiten zusammenstossende Kanten bilden* (Fig. 27).

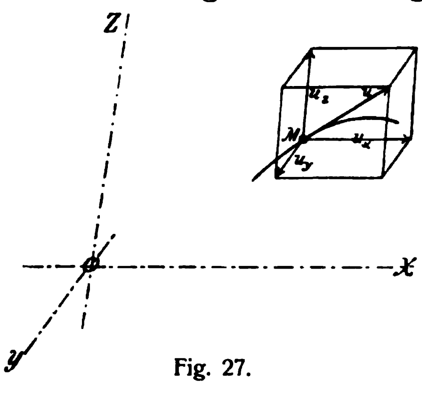


Fig. 27.

Zusammensetzung und Zerlegung im Raume.

Wählt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume und nennt die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit u mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen einschliesst, α, β und γ, so erhält man zur analytischen Berechnung dieser Componenten (Fig. 28) die Formeln

$$u_x = u \cos \alpha,$$
$$(29) \qquad u_y = u \cos \beta,$$
$$u_z = u \cos \gamma.$$

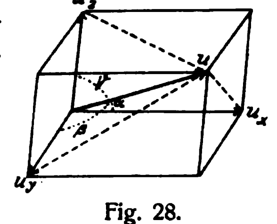


Fig. 28.

Umgekehrt folgt die resultirende Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach aus ihren gegebenen Componenten u_x, u_y und u_z vermittelst des Gleichungssystemes

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2},$$

$$(30) \qquad \cos \alpha = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}.$$

Die erste Gleichung, welche aus (29) und der bekannten Relation der Richtungscosinusse einer Geraden

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

abgeleitet wird, giebt die Grösse, die drei anderen geben die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit.

Es seien die Projectionsgleichungen der Bewegung eines Punktes

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t),$$
$$z = f_3(t).$$

Man hat dann für die Geschwindigkeitscomponenten und die Geschwindigkeit selbst

$$
(31) \qquad
\begin{aligned}
u_x &= \frac{dx}{dt} = f_1'(t),\\
u_y &= \frac{dy}{dt} = f_2'(t),\\
u_z &= \frac{dz}{dt} = f_3'(t).
\end{aligned}
$$

$$u = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Polygon der Geschwindigkeiten. Eine Geschwindigkeit kann die Resultirende von mehr als drei Geschwindigkeiten sein. Es mögen $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ gegebene Geschwindigkeitscomponenten bezeichnen, u ihre Resultirende. Die Zusammensetzung kann graphisch so ausgeführt werden, dass man zuerst zwei Geschwindigkeiten, z. B. u_1 und u_2 nach dem Parallelogrammgesetze zusammensetzt (Fig 29), die erhaltene Resultirende mit einer

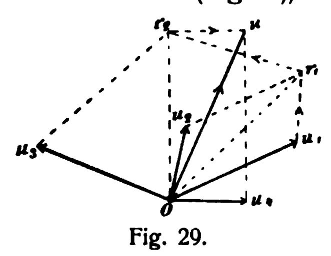


Fig. 29.

dritten Geschwindigkeit, z. B. u_3, die dabei folgende Resultirende mit einer vierten Geschwindigkeit u. s. w. vereinigt. Die zuletzt erhaltene Resultirende ist dann die Resultirende aller n Geschwindigkeiten $u_1\ u_2 \ldots u_n$, d. h. die gesuchte Geschwindigkeit u. Diese etwas umständliche Construction lässt sich aber vereinfachen. Die Figur zeigt, dass man dieselbe resultirende Geschwindigkeit u erhält, indem man den Anfangspunkt O mit dem Endpunkte einer gebrochenen Linie $O\ u_1\ r_1\ r_2 \ldots u$ verbindet, welche so entsteht, dass die gegebenen Geschwindigkeiten mit unveränderter Grösse und Richtung nach einander abgetragen werden (Fig. 30). Es bilden hierbei $u_1\ u_2 \ldots u_n$ und u ein geschlossenes Polygon, welches P o l y g o n d e r G e-

schwindigkeiten heisst. Zur graphischen Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Geschwindigkeiten bekommt man das sog. Polygongesetz: *Die gegebenen Geschwindigkeiten werden mit unveränderter Grösse und Richtung nach einander abgetragen. Dann ist diejenige Strecke, welche den Anfangspunkt der ersten Geschwindigkeit mit dem Endpunkte der letzten Geschwindigkeit vereinigt, ihre Resultirende.* Das Polygon kann ein ebenes oder ein räumliches Polygon sein.

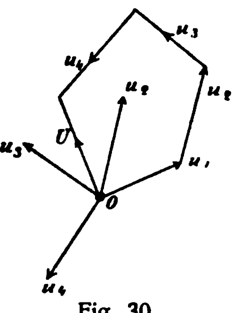


Fig. 30.

Analytisch setzt man die n Geschwindigkeiten am einfachsten nach folgendem Verfahren zusammen. Jede Geschwindigkeit wird in ihre Componenten nach drei auf einander senkrechten Axen zerlegt. Dann werden die auf dieselbe Axe fallenden Componenten addirt, so dass drei Geschwindigkeiten längs der Axen entstehen. Ihre Resultirende ist die gesuchte Geschwindigkeit.

Die Richtungswinkel der Geschwindigkeiten seien:

	u_1	$u_2 \ldots\ldots u_n$,
mit der x-Axe	α_1	$\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$,
„ „ y- „	β_1	$\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$,
„ „ z- „	γ_1	$\gamma_2 \ldots\ldots \gamma_n$.

Dann werden die Componenten

in der x-Axe	$u_1 \cos \alpha_1$	$u_2 \cos \alpha_2$	$\ldots\ldots u_n \cos \alpha_n$,
„ „ y- „	$u_1 \cos \beta_1$	$u_2 \cos \beta_2$	$\ldots\ldots u_n \cos \beta_n$,
„ „ z- „	$u_1 \cos \gamma_1$	$u_2 \cos \gamma_2$	$\ldots\ldots u_n \cos \gamma_n$,

sowie die Summen für dieselbe Axe bez.

$$u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_2 + \ldots + u_n \cos \alpha_n = \Sigma (u \cos \alpha),$$
$$u_1 \cos \beta_1 + u_2 \cos \beta_2 + \ldots + u_n \cos \beta_n = \Sigma (u \cos \beta),$$
$$u_1 \cos \gamma_1 + u_2 \cos \gamma_2 + \ldots + u_n \cos \gamma_n = \Sigma (u \cos \gamma).$$

Die Componenten der gesuchten resultirenden Geschwindigkeit sind nun

$$
U_x = U \cos \alpha = \Sigma (u \cos \alpha),
$$

$$
(32) \qquad U_y = U \cos \beta = \Sigma (u \cos \beta),
$$

$$
U_z = U \cos \gamma = \Sigma (u \cos \gamma).
$$

Nachdem sie gefunden, erhält man aus (30) U der Grösse und Richtung nach, und zwar

$$
U = \sqrt{\{\Sigma (u \cos \alpha)\}^2 + \{\Sigma (u \cos \beta)\}^2 + \{\Sigma (u \cos \gamma)\}^2},
$$

$$
\cos \alpha = \frac{\Sigma (u \cos \alpha)}{U},
$$

$$
(33) \qquad \cos \beta = \frac{\Sigma (u \cos \beta)}{U},
$$

$$
\cos \gamma = \frac{\Sigma (u \cos \gamma)}{U}.
$$

Diese Methode ist natürlich auch für eine kleinere Anzahl von Geschwindigkeiten anwendbar, z. B. für drei Geschwindigkeiten, deren Richtungen schiefe Winkel mit einander einschliessen.

Anwendungen.

1) Es wird die Resultirende gesucht von den drei Geschwindigkeiten

$$
u_1 = 14 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}, \quad u_2 = 18 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}, \quad u_3 = 6 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}
$$

mit den Richtungscosinussen

$$
\cos \alpha_1 = \tfrac{3}{7}, \quad \cos \alpha_2 = \tfrac{8}{9}, \quad \cos \alpha_3 = \tfrac{1}{3},
$$

$$
\cos \beta_1 = \tfrac{2}{7}, \quad \cos \beta_2 = \tfrac{4}{9}, \quad \cos \beta_3 = \tfrac{2}{3},
$$

$$
\cos \gamma_1 = \tfrac{6}{7}, \quad \cos \gamma_2 = \tfrac{1}{9}, \quad \cos \gamma_3 = \tfrac{2}{3},
$$

in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

Es folgen nach (32) die Projectionssummen

$$
U_x = \Sigma (u \cos \alpha) = 6 + 16 + 2 = 24.
$$

$$
U_y = \Sigma (u \cos \beta) = 4 + 8 + 4 = 16,
$$

$$
U_z = \Sigma (u \cos \gamma) = 12 + 2 + 4 = 18;
$$

ferner ergiebt sich für die gesuchte Resultirende

$$
U = \sqrt{24^2 + 16^2 + 18^2} = 34 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}.
$$

$$
\cos \alpha = \tfrac{12}{17}; \quad \cos \beta = \tfrac{8}{17}; \quad \cos \gamma = \tfrac{9}{17}.
$$

2) In einem schiefwinkligen räumlichen Coordinatensystem sind die Winkel zwischen der y- und z-, der z- und x-, der x- und y-Axe bez. ν_1, ν_2 und ν_3 (Fig. 31). Es wird die absolute Grösse einer Geschwindigkeit u gesucht, welche die Componenten u_x, u_y und u_z nach diesen Axen hat.

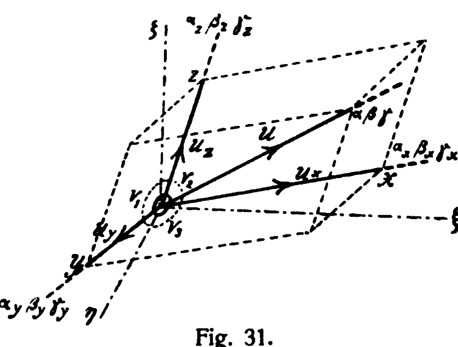


Fig. 31.

Man wählt ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem $O\xi\eta\zeta$, in Bezug auf welches die Axen des schiefen Systemes die Richtungswinkel α_x β_x γ_x für die x-Axe, α_y β_y γ_y für die y-Axe und α_z β_z γ_z für die z-Axe besitzen. Indem man dann die Bedingung ausdrückt, dass die ortogonale Projection von u auf eine Axe $O\xi$, $O\eta$ oder $O\zeta$ gleich der Summe der Projectionen der Componenten u_x, u_y und u_z ist, findet man, wenn die Winkel von u mit den rechtwinkligen Axen mit α β und γ bezeichnet werden,

$$u \cos \alpha = u_x \cos \alpha_x + u_y \cos \alpha_y + u_z \cos \alpha_z,$$
$$u \cos \beta = u_x \cos \beta_x + u_y \cos \beta_y + u_z \cos \beta_z,$$
$$u \cos \gamma = u_x \cos \gamma_x + u_y \cos \gamma_y + u_z \cos \gamma_z.$$

Erhebt man jetzt diese Gleichungen in's Quadrat, addirt sie und beachtet die Formeln der analytischen Geometrie für die Richtungscosinusse einer Geraden sowie für den Winkel zwischen zwei gegebenen Richtungen, so ergiebt sich die Grösse von u aus der Formel

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2 u_y u_z \cos \nu_1 + 2 u_z u_x \cos \nu_2 + 2 u_x u_y \cos \nu_3.$$

§ 14.

Zusammensetzung und Zerlegung von Beschleunigungen.

Totale Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung.

Die Beschleunigung einer beliebigen Bewegung erhält man folgenderweise. Von einem Punkte M aus, welcher die Lage zur Zeit t angiebt, werden die Geschwindigkeiten u zu dieser Zeit und u' zu einer folgenden Zeit $t' = t + \triangle t$ der Grösse und Richtung nach abgetragen (Fig. 32). u kann als eine Seite, u' als die Diagonale

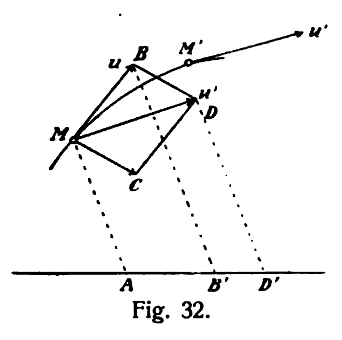


Fig. 32.

eines Parallelogrammes aufgefasst werden, welches vervollständigt wird. Dann ist MC die zweite Seite. Nach dem Parallelogrammgesetze ist u' die Resultirende von der zur Zeit t vorhandenen Geschwindigkeit u und der während der Zeit Δt entstandenen Geschwindigkeit MC. Der Grenzwert des Quotienten zwischen der Geschwindigkeitsänderung MC und der dazu verbrauchten Zeit Δt, wenn Δt sich der Null nähert, wird die Beschleunigung der Bewegung zur Zeit t, genauer die totale Beschleunigung der Bewegung genannt. Bezeichnet man sie mit a, so ist also

$$a = \lim \frac{MC}{\Delta t}.$$

Die totale Beschleunigung hat auch eine bestimmte Richtung. Wenn sich M' dem Punkte M nähert, so nähert sich MC einer gewissen Grenzrichtung, welche gerade diejenige der totalen Beschleunigung ist. Als eine der Grösse und Richtung nach bestimmte Grösse kann die Beschleunigung a durch eine Strecke graphisch angegeben werden.

Ebene Bahn. Wenn die Bahn eines Punktes eben ist, so liegen u und u' in der Ebene der Bahn, somit auch MC und die Beschleunigung a.

Geradlinige Bahn. Geschieht die Bewegung des Punktes längs einer geraden Linie, so fallen u und u' in die Richtung dieser Geraden. Dieselben Richtungen bekommen dann auch MC und die Beschleunigung a, welche jetzt vom Zeichen abgesehen identisch mit der Beschleunigung in der Bahn ist (§ 8). In einer krummlinigen Bewegung sind aber diese beiden Beschleunigungen nicht identisch.

Beschleunigung der Projectionsbewegung.

Die Bewegung des Punktes M werde auf eine Axe AD' projiciirt. Die Geschwindigkeit u giebt dabei die Projection AB', die Geschwindigkeit u' die Projection AD', und $B'D'$ ist gleich der Projection von BD und von MC. Die Projection derjenigen Strecke, welche die totale Beschleunigung a darstellt, ist $\lim \frac{B'D'}{\triangle t}$. Nach dem auf p. 43 gefundenen Satze stellen AB' und AD' die Geschwindigkeiten der Projectionsbewegung zu den Zeiten t und $t + \triangle t$ bez. dar. Es ist $B'D'$ der Geschwindigkeitszuwachs der Projectionsbewegung in der Zeit $\triangle t$, $\frac{B'D'}{\triangle t}$ ihre mittlere Beschleunigung in diesem Zeitabschnitte und $\lim \frac{B'D'}{\triangle t}$ ihre Beschleunigung zur Zeit t. Man erhält somit den Satz:

Bei einer beliebigen Bewegung und ihrer Projection auf eine gerade Linie ist die Beschleunigung der Projectionsbewegung in jedem Augenblicke gleich der Projection der totalen Beschleunigung der Bewegung selbst.

Parallelogramm, Parallelepiped und Polygon der Beschleunigungen.

Auf Grund dieses Satzes ergeben sich zur Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen ganz ähnliche Regeln wie für Geschwindigkeiten. So lautet das Parallelogrammgesetz der Beschleunigungen:

Die Resultirende zweier gegebenen Beschleunigungen ist eine Diagonale eines Parallelogramms, in welchem diese Beschleunigungen die Seiten sind.

Das Parallelepipedgesetz liefert folgenden Satz:

Die Resultirende von drei gegebenen Beschleunigungen ist eine Diagonale eines Parallelepipeds, in welchem diese drei Beschleunigungen zusammenstossende Kanten bilden.

Sind mehr als drei Beschleunigungen gegeben, so kann man sie vermittelst eines Polygons zusammensetzen.

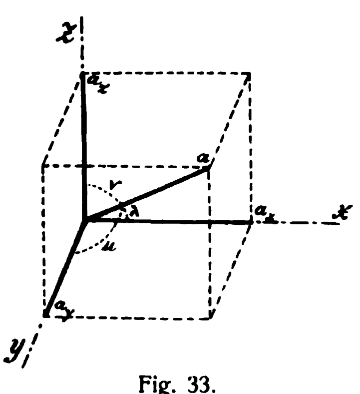


Fig. 33.

Die analytischen Ausdrücke zur Berechnung der resultirenden Beschleunigung sind ganz so gebaut wie diejenigen für die Geschwindigkeiten. So wird z. B. das Formelsystem (29) hier durch

$$\text{(34)} \qquad \begin{aligned} a_x &= a \cos \lambda, \\ a_y &= a \cos \mu, \\ a_z &= a \cos \nu \end{aligned}$$

ersetzt und giebt die Componenten der Beschleunigung nach den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume (Fig. 33). Zur Berechnung der resultirenden Beschleunigung aus ihren drei Componenten hat man ferner ähnlich wie das System (30)

$$\text{(35)} \qquad \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \cos \lambda &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \mu &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned}$$

Da die Geschwindigkeiten der Projectionsbewegungen (22) nach drei Axen gemäss (31) durch

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = f_2'(t), \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = f_3'(t) \end{aligned}$$

gegeben sind, folgt nach (15) für die Componenten der totalen Beschleunigung nach denselben Axen

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t),\\
(36) \qquad a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t),\\
a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t).
\end{aligned}
$$

Anwendungen.

1) Man berechne die Beschleunigung in einer Bewegung mit den Componenten

$$x = \tfrac{1}{2} a_1 t^2,$$
$$y = \tfrac{1}{2} a_2 t^2$$

nach zwei Axen in der Ebene (Fig. 34). Die beiden Componentenbewegungen sind gleichförmig veränderliche Bewegungen (§ 8), welche zur Zeit $t = o$ im Coordinatenanfangspunkte ohne Geschwindigkeit beginnen. Weil ihre Beschleunigungen constant sind, so bleibt auch die vermittelst eines Parallelogramms construirte resultirende Beschleunigung der Grösse und Richtung nach constant. Sie hat die Grösse

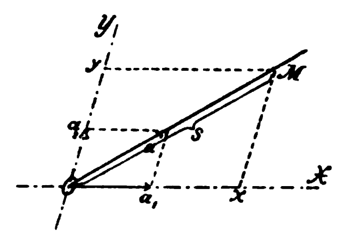


Fig. 34.

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos v},$$

wo v der Winkel zwischen den Coordinatenaxen ist.

Man kann auch die resultirende Bewegung selbst aufsuchen. Aus den Ausdrücken für x und y folgt

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2},$$

so dass also die Bahn eine durch O gehende Gerade ist. Für den Wegabstand $s = OM$ in der Bahn ergiebt sich ferner

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\, xy \cos v} = \tfrac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos v}\,.\, t^2,$$

woraus hervorgeht, dass die resultirende Bewegung eine gleichförmig veränderliche Bewegung mit der oben gefundenen Beschleunigung ist.

2) Ein ähnliches Resultat wie unter (1) folgt für drei gleichförmig veränderliche Bewegungen längs der Axen eines räumlichen Coordinatensystems, falls die Bewegungen ohne Geschwindigkeit im Coordinatenanfangspunkte beginnen, und sogar noch allgemeiner für eine beliebige Anzahl solcher Bewegungen. Die resultirende Bewegung erfolgt längs einer Geraden durch den Coordinatenanfang, wo die Geschwindigkeit gleich Null ist, und besitzt eine Beschleunigung, welche vermittelst der Parallelepiped- oder Polygonregel aus den Beschleunigungen der Componentenbewegungen erhalten wird.

3) Man berechne die totale Beschleunigung der gleichförmigen Bewegung im Kreise aus ihren Componenten.

Die Gleichungen der Bewegung sind nach § 12, Anw. 2)

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y = r \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

und die Componenten der constanten Geschwindigkeit nach § 13 Anw. 2)

$$u_x = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$u_y = -\frac{2\pi r}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Nach den Formeln (36) findet man hieraus für die Componenten der Beschleunigung parallel den Axen bez.

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Der Vergleich dieser Werte mit den Werten von x und y ergiebt

$$a_x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

$$a_y = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y.$$

Die Beschleunigungen der Componentenbewegungen sind also proportional den Abständen vom Kreismittelpunkte O, wie auch unmittel-

bar aus § 11 hervorgeht, indem sie einfache oscillirende Bewegungen mit dem Schwingungsmittelpunkte O darstellen.

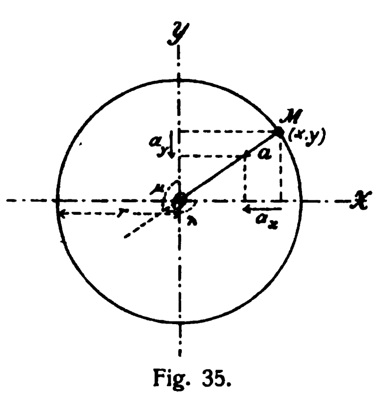


Fig. 35.

Die Gleichung

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{y}{x}$$

zeigt, dass die totale Beschleunigung durch den Kreismittelpunkt geht. Sie ist ebenso wie ihre Componenten nach diesem Mittelpunkte hin gerichtet, und hat die constante Grösse

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Da die Geschwindigkeit

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

ist, folgt daraus

$$a = \frac{u^2}{r}.$$

Die Resultate können folgendermassen zusammengefasst werden: *Bei einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit u in einem Kreise vom Radius r hat die totale Beschleunigung der Bewegung die constante Grösse $\frac{u^2}{r}$ und ist gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet.*

Dasselbe Resultat wird in § 16 auf anderem Wege erzielt.

§ 15.

Parabolische Wurfbewegung.

Die sog. parabolische Wurfbewegung ist ein interessantes Beispiel der Bewegung eines Punktes in einer Ebene; sie möge deshalb etwas ausführlicher behandelt werden.

Bestimmung und Gleichungen der Wurfbewegung.

Sieht man von dem Luftwiderstande ab, so nimmt ein materieller Punkt, welcher von der Erdoberfläche aus mit einer Geschwindigkeit c geworfen wird, die mit der Horizontalebene den Winkel α (den Elevationswin-

k e l) einschliesst, sehr nahe eine Bewegung an, welche aus einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit c in der ursprünglichen Wurfrichtung und der gewöhnlichen Fallbewegung längs der Verticalen (§ 9) zusammengesetzt ist. Die Bewegung erfolgt in derjenigen Verticalebene, welche die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c enthält. Es möge in dieser Ebene eine horizontale x-Axe und eine nach oben gerichtete verticale y-Axe festgelegt werden (Fig. 36).

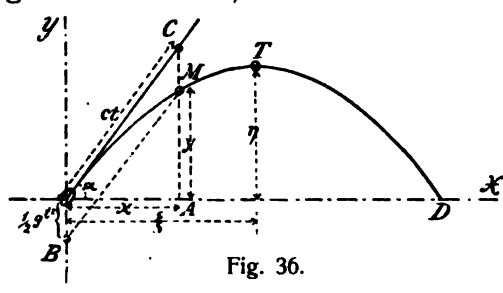


Fig. 36.

Nach einer gewissen Zeit t vom Anfang der Bewegung an gerechnet, ist in der gleichförmigen Bewegung das Stück $OC = ct$, in der Fallbewegung, welche gleichförmig beschleunigt ist, das Stück $OB = \frac{1}{2} gt^2$ zurückgelegt worden, worin g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet (vergl. p. 23). Der Ort M des Punktes zur Zeit t ist die Gegenecke zu O in dem Parallelogramme $OBMC$. Für die Coordinaten des Punktes M in dem gewählten Coordinatensysteme ergeben sich jetzt die Ausdrücke

$$(37) \qquad \begin{aligned} x &= ct \cos \alpha, \\ y &= ct \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

welche die Projectionsbewegungen des Punktes M bez. auf die x- und die y-Axe darstellen. Die erstere ist eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$, die letztere eine gleichförmig veränderliche Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \sin \alpha$ sowie der Beschleunigung g in der Richtung der negativen y-Axe. Am Anfang ist deshalb die verticale Bewegungscomponente eine verzögerte Bewegung.

Die Wurfbahn. Auf Grund der Formeln (37) lässt sich die Wurfbe-

wegung discutiren. Eliminirt man t zwischen beiden Gleichungen, z. B. so, dass man der ersten Gleichung den Wert

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$

entnimmt und ihn in die zweite Gleichung einsetzt, so erhält man die Gleichung der Bahncurve in der Form

$$(38) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, welche die Wurfparabel heisst und der Bewegung ihren Namen gegeben hat. Der Gleichung der Parabel kann man auch die Form geben:

$$y - \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} = - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha\right)^2.$$

Durch Anwendung der Bezeichnungen

$$(39) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha, \\ \eta &= \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

geht sie in

$$(x - \xi)^2 = - \frac{2c^2 \cos^2 \alpha}{g} (y - \eta)$$

über. Es bezeichnen dabei ξ und η die Coordinaten des Scheitels T der Parabel. Die Axe der Parabel ist vertical und die concave Seite nach unten gekehrt. Für den Halbparameter p hat man

$$(40) \qquad p = \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Wurfhöhe.

Der grösste Wert von y ist η, entspricht dem Scheitel der Parabel und heisst Wurfhöhe. Man findet also

$$(41) \qquad \eta = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Wurfweite. Der Abstand des Ausgangspunktes O von dem Punkte D, wo die Parabel das zweite Mal die Horizontale trifft, ist die Wurfweite; sie hat den Wert

$$(42) \qquad 2\xi = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha,$$

wie unmittelbar daraus hervorgeht, dass die Parabel symmetrisch in Bezug auf ihre Axe ist. Denselben Wert findet man auch folgendermassen: Aus der zweiten Gleichung (37) folgt $y = 0$ für $t = 0$, dem Punkte O entsprechend, sowie für

$$t = \frac{2c \sin \alpha}{g} = T,$$

dem Punkte D entsprechend. Mit diesem Werte von T giebt die erste Gleichung (37)

$$x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} = 2\xi,$$

d. h. die Wurfweite. Zugleich erkennt man, dass die *Wurfzeit.* ganze Wurfzeit die Grösse

$$(43) \qquad T = \frac{2c \sin \alpha}{g}$$

hat. Während der halben Wurfzeit

$$\frac{T}{2} = \frac{c \sin \alpha}{g}$$

steigt der Punkt aufwärts, erreicht am Ende dieser Zeit den Scheitel der Parabel und fällt dann während der zweiten Hälfte der Wurfzeit abwärts.

Zu zwei Zeiten

$$t = t_1 \text{ und } t = T - t_1,$$

hat der Punkt in Bezug auf die Axe der Parabel symmetrische Lagen. Aus den Coordinatenwerten für diese Zeiten

$$x_1 = ct_1 \cos a,$$
$$y_1 = ct_1 \sin a - \tfrac{1}{2} g t_1^2,$$

und

$$x_2 = \frac{c^2 \sin 2a}{g} - ct_1 \cos a,$$

$$y_2 = ct_1 \sin a - \frac{g}{2} t_1^2,$$

ergeben sich nämlich die Relationen

$$y_1 = y_2,$$
$$\xi - x_1 = x_2 - \xi.$$

Zur Zeit t sind die Geschwindigkeitscomponenten der Wurfbewegung parallel den Coordinatenaxen (Fig 37) *Geschwindigkeit.*

$$(44) \quad u_x = \frac{dx}{dt} = c \cos a, \qquad u_y = \frac{dy}{dt} = c \sin a - gt,$$

u_y u u_x

Fig. 37.

und die Grösse der Geschwindigkeit u ist

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{c^2 - 2cgt \sin a + g^2 t^2},$$

oder auch

$$u = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Die Geschwindigkeit ist am grössten in den Punkten O und D, wo sie den Wert c hat, und am kleinsten in dem Scheitelpunkte, wo ihr Wert

$$u = u_x = c \cos a$$

ist. In dem Punkte M schliesst die Richtung der Geschwindigkeit mit der x-Axe einen Winkel γ ein, für welchen man

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u_y}{u_x} = \frac{c \sin \alpha - gt}{c \cos \alpha}$$

erhält. Der Richtung nach fällt die Geschwindigkeit mit der Tangente der Parabel zusammen, so dass also diese letztere hierdurch bestimmt wird. Es mag erwähnt werden, dass das Verfahren, nach welchem die Tangente einer ebenen Curve vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten, die Tangente einer Raumcurve vermittelst des Parallelepipeds der Geschwindigkeiten bestimmt wird, nach seinem Entdecker die Tangentenmethode von Roberval heisst.

Beschleunigung. Die Componenten der totalen Beschleunigung der Wurfbewegung ergeben sich durch Differentiation von u_x und u_y und sind

$$(45)\qquad a_x = \frac{du_x}{dt} = 0, \qquad a_y = \frac{du_y}{dt} = -g.$$

Die Beschleunigung ist somit die nach Grösse und Richtung constante, vertical nach unten gerichtete Beschleunigung g der Schwere, ein Resultat, das in der ursprünglichen Definition der Bewegung unmittelbar enthalten ist.

Bei der bisherigen Untersuchung der Wurfbewegung sind der Elevationswinkel α und die Anfangsgeschwindigkeit c als gegeben und constant angenommen worden. Es giebt aber auch Probleme, in welchen diese Grössen gesucht werden oder sich verändern, wie z. B. bei folgender Aufgabe:

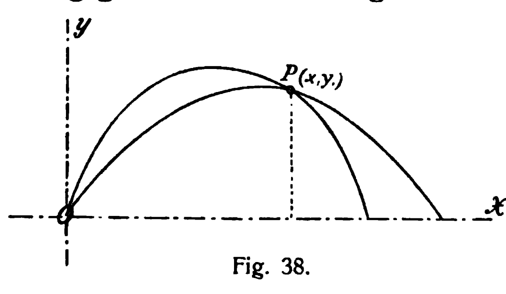


Fig. 38.

Wurfparabeln durch einen gegebenen Punkt P.

Unter welchem Wurfwinkel α soll ein materieller Punkt von O aus (Fig. 38) mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c geworfen werden, damit er einen Punkt P mit den Coordinaten x_1, y_1 erreiche?

Aus der Gleichung (38) der Wurfparabel

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

oder

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

ergiebt sich, indem x_1 und y_1 eingesetzt werden, die Gleichung zweiten Grades in Bezug auf $\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2 c^2}{g x_1} \operatorname{tg} \alpha + 1 + \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2} = 0,$$

also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g x_1} \pm \sqrt{\frac{c^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2} - 1}. \tag{46}$$

Die beiden Wurzeln sind reell; es giebt somit zwei gesuchte Wurfwinkel, falls

$$\frac{c^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2} - 1 > 0$$

ist; dagegen sind beide Wurzeln imaginär und eine Lösung des Problemes ist nicht möglich, falls

$$\frac{c^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2} - 1 < 0$$

ist. Schliesslich fallen die beiden in dem ersten Falle existirenden Wurfparabeln (Fig. 38), welche zu dem Punkte P führen, in eine einzige zusammen, falls

$$\frac{c^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2} - 1 = 0 \tag{47}$$

ist. Die Bedingung (47) giebt in etwas veränderter Form

$$y_1 = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} x_1^2$$

Grenzparabel. und stellt mit x_1, y_1 als laufenden Coordinaten eines Punktes eine Parabel dar, deren Axe mit der y-Axe zusammenfällt, deren Scheitel in dem Abstande

$$h = \frac{c^2}{2g}$$

oberhalb O liegt und welche die x-Axe in zwei Punkten im Abstande

$$b = \frac{c^2}{g}$$

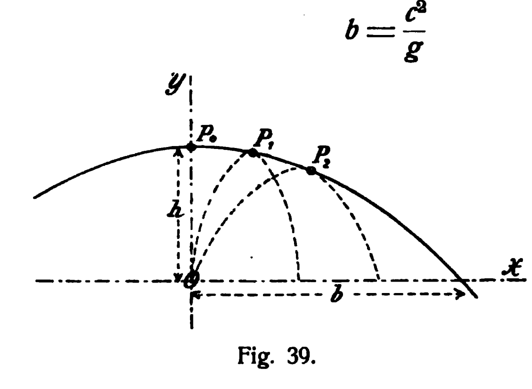


Fig. 39.

von O nach beiden Seiten schneidet (Fig. 39). Diese Parabel teilt die ganze Wurfebene in zwei Teile, einen inneren Teil, welcher alle diejenigen Punkte enthält, welche auf zwei verschiedenen Bahnen mit der Anfangsgeschwindigkeit c erreichbar sind, und einen äusseren Teil, welcher sämmtliche mit dieser Anfangsgeschwindigkeit unerreichbare Punkte enthält. Die äussersten, noch erreichbaren Punkte liegen auf der Grenzparabel selbst, welche deshalb von den einzelnen, der Anfangsgeschwindigkeit c entsprechenden Wurfparabeln berührt wird, somit ihre Umhüllende darstellt. Zu den Wurfparabeln gehört auch die verticale Gerade OP_0, welche doppelt zu denken ist. Wie in § 9 gezeigt, ist in der That

$$h = \frac{c^2}{2g}$$

die Höhe des verticalen Wurfes mit der Geschwindigkeit c.

Die betrachteten Wurfparabeln für dieselbe Geschwindigkeit c im Punkte O, aber verschiedene Wurfwinkel, haben noch mehrere bemerkenswerte Eigenschaften.

Directrix.

Der Scheitel einer Parabel mit dem Wurfwinkel α liegt nach (41) in der Höhe

$$\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha$$

oberhalb der Horizontalen durch O. Ihr halber Parameter ist

$$p=\frac{c^2}{g}\cos^2\alpha,$$

ferner der Abstand zwischen dem Scheitel und der horizontalen Directrix

$$\frac{p}{2}=\frac{c^2}{2g}\cos^2\alpha;$$

somit ist der Abstand zwischen der Directrix und der x-Axe

$$\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{2g}\cos^2\alpha=\frac{c^2}{2g}.$$

Dieser Abstand ist also vom Winkel α unabhängig, d. h. ***sämtliche derselben Anfangsgeschwindigkeit c entsprechende Wurfparabeln haben eine gemeinsame Directrix.*** Diese Directrix berührt die Grenzparabel in ihrem Scheitel P_0 (Fig. 40).

Der Ort der Scheitel.

Nach (39) sind die Coordinaten des Scheitels einer Wurfparabel

$$(48)\qquad \begin{aligned}\xi&=\frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha,\\ \eta&=\frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Wenn man α zwischen diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man die Gleichung

$$(49) \qquad \xi^2 + 4\eta^2 - 2\frac{c^2}{g}\eta = 0,$$

welche ***eine Ellipse darstellt, auf der alle Scheitelpunkte liegen.*** Die kleinere Axe der Ellipse fällt mit der Strecke

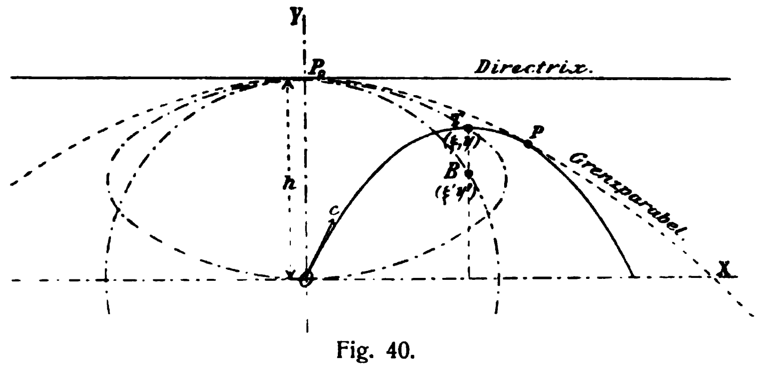


Fig. 40.

OP_0 zusammen; die grössere Axe ist horizontal und doppelt so lang wie die kleinere. Die Halbaxen haben somit die Werte

$$\frac{c^2}{2g} \text{ und } \frac{c^2}{4g}.$$

Man kann also der Gleichung der Ellipse auch die Form geben

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(\eta - \frac{c^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{c^2}{4g}\right)^2} = 1.$$

Ort der Brennpunkte. Die Coordinaten ξ', η' des Brennpunktes B der dem Wurfwinkel α entsprechenden Parabel sind

$$(50) \qquad \begin{aligned} \xi' &= \xi = \frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha, \\ \eta' &= \eta - \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha - \frac{c^2}{2g}\cos^2\alpha = -\frac{c^2}{2g}\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Durch Elimination von α erhält man

(51) $$\xi'^2 + \eta'^2 = \left(\frac{c^2}{2g}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass *die Brennpunkte der Parabeln auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte O und dem Radius* $\frac{c^2}{2g}$ *liegen.* Der Kreis geht durch den Punkt P_0.[1]

a constant, c veränderlich.

Eine der eben durchgeführten ähnliche Untersuchung lässt sich in Bezug auf Wurfparabeln mit demselben Elevationswinkel α, aber verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten c ausführen.

Wenn man c zwischen den Ausdrücken (48) der Scheitelcoordinaten eliminirt, so findet man

(52) $$\frac{\eta}{\xi} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus hervorgeht, dass *die Scheitel aller dieser Parabeln auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen.*

Ebenso giebt die Elimination von c zwischen den Brennpunktscoordinaten (50)

(53) $$\frac{\eta'}{\xi'} = -\cot 2\alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass auch *die Brennpunkte auf einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden gelegen sind.*

Die Untersuchungen über die parabolische Wurfbewegung werden sehr einfach zu einer Bewegung eines Punktes in einer Ebene erweitert, in welcher die Beschleunigung der Grösse und Richtung nach constant ist. Man braucht nur g mit dieser constanten Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ zu vertauschen.

[1] Sehr einfach erhält man die Ellipse der Scheitel durch affine Verwandlung des Kreises der Brennpunkte in Bezug auf die Directrix als Affinitätsaxe.

§ 16.

Tangential- und Normalbeschleunigung.

Die in § 14 definirte totale Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung wird oft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine die Richtung der Tangente der Curve, die andere die Richtung einer Normalen der Curve hat. Jene Componente heisst die Tangentialbeschleunigung, diese die Normalbeschleunigung.

Ebene Bahncurve.

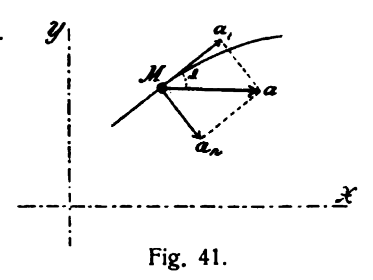


Fig. 41.

Es werde zuerst der Fall betrachtet, dass die Bahncurve eben ist (Fig. 41). Die totale Beschleunigung sowie ihre Componenten nach den Richtungen der Tangente und der Normalen der Curve liegen dann in der Ebene der Curve und werden durch Zerlegung vermittelst eines Rechteckes erhalten. Bezeichnen a_t die Tangential-, a_n die Normalbeschleunigung und ϑ den Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der totalen Beschleunigung, so ist

$$\begin{aligned} a_t &= a \cos \vartheta, \\ a_n &= a \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{54}$$

Es ist a_t positiv oder negativ, d. h. die Tangentialbeschleunigung hat dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die Geschwindigkeit, je nachdem der Winkel ϑ kleiner oder grösser als ein rechter Winkel ist. Die Normalbeschleunigung a_n ist immer gegen die concave Seite der Curve gerichtet.

Wenn a_t und a_n gegeben sind, so hat man umgekehrt zur Berechnung von a die Formeln

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{55}$$
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a_n}{a_t}.$$

Durch einen Grenzübergang ergeben sich die Ausdrücke für die Tangential- und die Normalbeschleunigung der Bewegung in einer ebenen krummlinigen Bahn, wenn die Geschwindigkeit und die Form der Bahn bekannt sind.

Es seien u und $u + \triangle u$ die Geschwindigkeiten in den zu den Zeiten t und $t + \triangle t$ gehörenden Bahnpunkten M und M' (Fig. 42). Diese beiden Geschwindigkeiten werden von demselben Punkte O aus abgetragen (bez. als ON und ON'). Nach § 14 ist

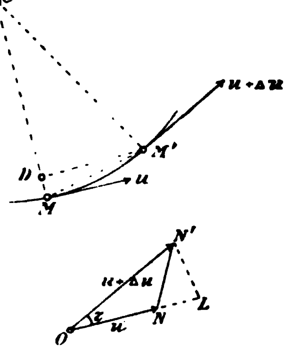


Fig. 42.

$$\lim \frac{NN'}{\triangle t}$$

die Grösse der totalen Beschleunigung im Punkte M und die Grenzrichtung von NN' ihre Richtung, wenn im Grenzfalle M' mit M zusammenfällt. Man zerlegt jetzt NN' in zwei Componenten NL und LN' nach den Richtungen der Tangente und der Normalen der Curve im Punkte M. Die Quotienten

$$\frac{NL}{\triangle t} \text{ und } \frac{LN'}{\triangle t},$$

nähern sich dann bestimmten Grenzwerten, welche die Componenten des Grenzwertes von

$$\frac{NN'}{\triangle t}$$

d. h. der Beschleunigung a im Punkte M sind. Somit ist

$$a_t = \lim \frac{NL}{\triangle t},$$

$$a_n = \lim \frac{LN'}{\triangle t},$$

wobei NL positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem es die Richtung von O nach N oder die Richtung von N nach O hat. Man berechne jetzt die beiden Grenzwerte. Bezeichnet man mit τ den Winkel zwischen ON und ON', so ist

$$NL = ON' \cos\tau - ON = (u + \triangle u) \cos\tau - u.$$

Mit Hülfe der Formel

$$\cos\tau = 1 - 2 \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

und nach Division durch $\triangle t$ folgt hieraus

$$\frac{NL}{\triangle t} = \frac{\triangle u}{\triangle t} - \frac{2 (u + \triangle u) \sin^2 \frac{1}{2}\tau}{\triangle t}.$$

Wenn $\triangle t$ sich der Null nähert, so nähert sich das erste Glied auf der rechten Seite einem endlichen Grenzwerte, während das zweite Glied, dem man auch die Form

$$2 (u + \triangle u) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\tau}{\triangle t} \cdot \sin \frac{\tau}{2}$$

geben kann, sich der Grenze Null nähert. Für die Tangentialbeschleunigung der krummlinigen Bewegung wird somit der Ausdruck

$$a_t = \lim \frac{\triangle u}{\triangle t} = \frac{du}{dt} \tag{56}$$

erhalten.

Zur Berechnung der Normalbeschleunigung zieht man die Normalen der Curve in den Punkten M und M' und

fällt von M' eine Senkrechte auf die Normale im Punkte M. Aus den ähnlichen Dreiecken CDM' und $ON'L$ folgt dann

$$LN' = \frac{ON'}{CM'} DM',$$

ferner

$$\frac{LN'}{\triangle t} = \frac{ON'}{CM'} \frac{DM'}{\triangle t}.$$

Wenn $\triangle t$ sich der Grenze Null nähert, so nähert sich ON' der Geschwindigkeit u, CM' dem Krümmungsradius ϱ der Curve im Punkte M, welcher vom Punkte M aus bis zu der Grenzlage des Schnittpunktes zweier benachbarter Normalen gerechnet wird. Es nähert sich ferner $\frac{DM'}{\triangle t}$ demselben Grenzwerte wie

$$\frac{MM'}{\triangle t} = \left|\frac{\triangle s}{\triangle t}\right|,$$

wo $\triangle s$ den Bogen MM' bezeichnet. Nach (23) ist

$$\lim \left|\frac{\triangle s}{\triangle t}\right| = u.$$

Somit folgt schliesslich an der Grenze

$$a_n = \lim \frac{LN'}{\triangle t} = \frac{u}{\varrho} \cdot u.$$

(57)
$$a_n = \frac{u^2}{\varrho}.$$

Raumcurve.

Die Formeln (54) und (55) gelten unverändert für eine Raumcurve. Zusammen mit der Tangente der Curve im Punkte M bestimmt die totale Beschleunigung eine Ebene, die sog. osculirende Ebene, in welcher die beiden Componenten der Beschleunigung liegen. Ein kleines Stück MM' der Curve kann als in dieser Ebene liegend betrachtet werden; indem man nun die Ebene

der früher betrachteten ebenen Curve durch diese osculirende Ebene ersetzt, gilt die obige Berechnung unverändert. Die Normalbeschleunigung a_n liegt auf der in der osculirenden Ebene enthaltenen Normalen der Curve, der sog. Hauptnormalen. Auf dieser Normalen liegt auch das Centrum C der sog. ersten Krümmung, und der Abstand $MC = \varrho$ ist der Hauptkrümmungsradius.

Aus den Formeln

$$a_t = \frac{du}{dt},$$

$$a_n = \frac{u^2}{\varrho}$$

kann man folgende Schlüsse ziehen. Zunächst hat man nach (55)

$$a = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u^4}{\varrho^2}},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{u^2}{\varrho \frac{du}{dt}}.$$

Ein Vergleich des Ausdruckes für a_t mit der Formel (15) zeigt, dass ***die Tangentialbeschleunigung einer krummlinigen Bewegung in jedem Augenblicke mit der Beschleunigung der Bewegung in der Bahn identisch ist.*** Durch die Tangentialbeschleunigung kommt eine Veränderung der Grösse der Geschwindigkeit zu stande. ***Wenn in einem speciellen Falle die Tangentialbeschleunigung einer krummlinigen Bewegung beständig gleich Null ist, so ist die Bewegung in der Bahn gleichförmig.*** Dies ist z. B. bei der in § 14, Anw. 3 betrachteten gleichförmigen Bewegung in einem Kreise der Fall.

Die Normalbeschleunigung ist sowohl von der Geschwindigkeit wie von der Krümmung der Bahn abhän-

gig. Vermöge derselben weicht der Punkt von einer geradlinigen Bewegung in der Richtung der Tangente nach dem Krümmungscentrum hin ab. Die Normalbeschleunigung heisst deshalb auch Centripetalbeschleunigung. In einer geradlinigen Bahn ist der Krümmungsradius ϱ unendlich gross und die centripetale Beschleunigung gleich Null. In einer gleichförmigen Bewegung ist diese Beschleunigung umgekehrt proportional dem Krümmungsradius. Sie bleibt constant bei der gleichförmigen Bewegung im Kreise und hat den auf p. 57 gefundenen Wert, welcher auch unmittelbar aus der allgemeinen Formel hervorgeht.

Anwendungen.

1) Man berechne die Tangential- und die Normalbeschleunigung der parabolischen Wurfbewegung

Nach den Gleichungen (45) ist die totale Beschleunigung der Wurfbewegung gleich der Beschleunigung g der Schwere. Es folgen daraus die tangentiale und normale Componente durch Projection bez. auf die Tangente und die Normale der Parabel (Fig. 43). Bezeichnet man mit ν und ϑ bez. die Winkel der Geschwindigkeit u mit der positiven x-Axe und mit der negativen y-Axe, so folgt

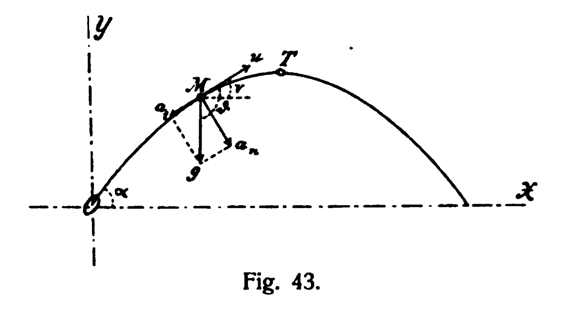


Fig. 43.

$$\vartheta = 90^\circ + \nu,$$

$$a_t = g \cos \vartheta = -g \sin \nu,$$

$$a_n = g \sin \vartheta = g \cos \nu.$$

Nach (44) hat man

$$\sin \nu = \frac{u_y}{u} = \frac{c \sin \alpha - gt,}{\sqrt{c^2 - 2gy}},$$

$$\cos \nu = \frac{u_x}{u} = \frac{c \cos \alpha}{\sqrt{c^2 - 2gy}},$$

so dass also

$$a_t = - \frac{c \sin \alpha - gt}{\sqrt{c^2 - 2gy}} g,$$

$$a_n = \frac{c \cos \alpha}{\sqrt{c^2 - 2gy}} g$$

erhalten wird. Während der Bewegung nach oben verzögert a_t die Bewegung, im Scheitel der Wurfparabel ist sie gleich Null, sodass die totale Beschleunigung mit ihrer normalen Componente zusammenfällt, und während der Bewegung nach unten ist a_t positiv und beschleunigt die Bewegung.

2) Man berechne den Krümmungsradius einer Parabel im Scheitel.

Vermittelst der Formel (57)

$$a_n = \frac{u^2}{\varrho}$$

kann oft der Krümmungsradius einer Curve berechnet werden. Um den Wert von ϱ im Scheitelpunkte einer Parabel abzuleiten, beachte man, dass im Scheitel der Wurfparabel

$$a_n = a = g$$

ist, während die Geschwindigkeit den Wert

$$u = c \cos \alpha$$

hat. Somit folgt

$$\varrho = \frac{u^2}{a} = \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

und durch Hinzuziehung der Gleichung (40) ferner

$$\varrho = p,$$

d. h. der Krümmungsradius der Parabel im Scheitel ist gleich dem halben Parameter.

§ 17.

Uebungsaufgaben zur Lehre der Bewegung des geometrischen Punktes.

1) Man untersuche eine Bewegung in der Bahn, mit der Gleichung

$$s = k(t - t_0)(t - t_1). \qquad (0 < t_0 < t_1).$$

2) Ein Schwungrad mit dem Durchmesser gleich 2 m macht 100 Umdrehungen in der Minute; man berechne die Geschwindigkeit eines Punktes am Umfange.

3) Der Abstand zwischen zwei Eisenbahnhaltestellen ist 15.7 km und wird von einem Zuge in 22.5 Minuten zurückgelegt, von welchen 1 Minute auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei der Abfahrt des Zuges und 1.5 Minuten auf die gleichförmig verzögerte Bewegung bei der Ankunft des Zuges kommt. Man berechne die Geschwindigkeit der zwischenliegenden gleichförmigen Bewegung, die mittlere Geschwindigkeit für die ganze Strecke, die Beschleunigung in der ersten und die Verzögerung in der letzten Zeitperiode sowie die Weglängen und zeichne das Diagramm der Geschwindigkeit auf.

4) Die Wurfhöhe und die Wurfzeit sollen für einen Körper berechnet werden, welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 25 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ senkrecht nach oben geworfen wurde, indem $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$ genommen wird.

5) Man construire die Diagramme des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in der Bewegung

$$s = ct^3.$$

6) Zu beweisen, dass die Bewegung in der Bahn, welche nach der Gleichung

$$s = r\cos^2 kt$$

erfolgt, eine einfache oscillirende Bewegung ist. Man discutire ferner die Bewegung und bestimme diejenige gleichförmige Bewegung in einem Kreise, deren Projection die obige, in einer Geraden verlaufende Bewegung ist.

7) Man zeichne die Diagramme für s und für u in der einfachen oscillirenden Bewegung.

8) Man untersuche die Bewegung, deren Componenten auf zwei Axen, welche den Winkel 60° mit einander einschliessen,

$$x = \tfrac{1}{2} a_x t^2,$$

$$y = \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

sind, besonders auch mit

$$a_x = 3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}; \; a_y = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}.$$

9) Von welcher Art ist die Bewegung, die durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen

$$x = c_1 t + \tfrac{1}{2} a_1 t^2,$$

$$y = c_2 t + \tfrac{1}{2} a_2 t^2$$

auf zwei zu einander senkrechten Axen entsteht?

10) Man berechne die Wurfhöhe, die Wurfweite und die Flugzeit bei einer parabolischen Wurfbewegung, in der die Anfangsgeschwindigkeit $c = 100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}}$ und der Elevationswinkel $\alpha = 60°$ ist.

11) Von einem Punkte O aus, der in derselben Horizontalebene mit dem Fusse eines Turmes liegt, werden zwei Kanonenschüsse auf den Turm abgefeuert, und zwar mit verschieden starken Ladungen. Das erste Mal ist die Kanone gegen die Spitze des Turmes gerichtet; die Kugel trifft den Fuss des Turmes. Bei dem zweiten Schusse ist der Elevationswinkel verdoppelt worden und die Kugel trifft die Spitze des Turmes. Man berechne den Abstand des Turmes von O, unter der Voraussetzung parabolischer Flugbahnen; die beiden Schusszeiten T und T' werden als bekannt angenommen.

12) Unter welchem Wurfwinkel muss ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 50 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}}$ geworfen werden um nach einem Punkte mit den Coordinaten

$$x_1 = 100 \text{ m}; \; y_1 = 20 \text{ m}$$

zu gelangen?

13) Die Projectionsbewegungen eines Punktes auf drei zu einander senkrechten Axen sind: auf der x-Axe eine gleichförmige Bewegung, auf der y-Axe ebenfalls eine gleichförmige Bewegung und auf der z-Axe eine gleichförmig veränderliche Bewegung. Man suche die Bahn des Punktes und discutire die Bewegung.

14) Die räumliche Bewegung eines Punktes wird auf eine Ebene projiciirt. Man zeige, dass die totale Beschleunigung der Projectionsbewegung die Projection der totalen Beschleunigung der Bewegung selbst ist.

15) Es soll die Bewegung untersucht werden, die durch Projection einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise auf eine beliebige Ebene entsteht.

16) Von einem Punkte O aus werden in demselben Augenblicke Punkte nach verschiedenen Richtungen des Raumes mit derselben Anfangsgeschwindigkeit geworfen. Zu untersuchen, auf welcher Fläche diese Punkte zu einer Zeit t sich befinden.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung unveränderlicher geometrischer Punktsysteme und Körper.

§ 18.

Geometrische Punktsysteme. Bestimmung der Bewegung.

Einteilung der Punktsysteme.

Die Bewegung eines geometrischen Punktsystems oder eines geometrischen Körpers ist völlig bestimmt, wenn man die Bewegung jedes einzelnen Punktes des Systems oder des Körpers kennt. Für die Bewegung jedes Punktes gelten die im ersten Abschnitt gefundenen Gesetze.

Die Punkte eines Punktsystems sind entweder von einander unabhängig oder in irgend einer Weise von einander abhängig. Wenn die Punkte von einander gänzlich unabhängig sind, so muss die Bewegung jedes einzelnen Punktes für sich untersucht werden, sodass das Problem der Bestimmung der Bewegung des Punktsystems in ebenso viele einzelne Probleme zerfällt, als es Punkte im System giebt. Wenn die Punkte dagegen in irgend einer Weise von einander abhängen, so ist im allgemeinen die Anzahl der Punkte, deren Bewegung direct bestimmt werden muss, kleiner als die Anzahl der Punkte des Systems; durch die Bewegung dieser Punkte wird dann die Bewegung aller übrigen Punkte bestimmt.

Diejenigen Punktsysteme, in welchen eine Abhängigkeit zwischen den einzelnen Punkten des Systems vorhanden ist, werden wie in § 2 schon erwähnt, in unveränderliche und veränderliche Systeme eingeteilt, je nachdem alle Punkte ihre gegenseitigen Entfernungen unverändert beibehalten oder nicht. Es werden im folgenden fast ausschliesslich unveränderliche geometrische Punktsysteme und Körper betrachtet.

Bewegung des unveränderlichen Punktsystems.

Die Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems wird im allgemeinen durch die Bewegungen dreier seiner Punkte bestimmt, welche nicht in einer geraden Linie liegen.

Es seien A, B und C in der Figur 44 die drei Punkte, welche die Ecken eines Dreieckes bilden. Ein beliebiger vierter Punkt D hat unveränderliche Abstände von den Punkten A, B und C und bildet mit ihnen die vier Ecken eines unveränderlichen Tetraeders, insofern D nicht in der Ebene des Dreieckes ABC gelegen ist. Wenn das Dreieck ABC während der Bewegung in eine neue Lage $A'B'C'$ gelangt, ist auch die neue Lage des Tetraeders und somit des Punktes D, d. h. D' bestimmt. Durch die Bewegungen der drei Punkte A, B und C ist somit die Bewegung jedes anderen Punktes D des Punktsystemes bestimmt.

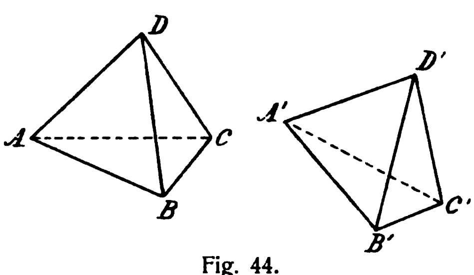


Fig. 44.

Die Bewegungen von A, B und C sind durch je drei Functionen der Zeit festgelegt, so dass man also neun Functionen der Zeit hat. Diese neun Functionen sind aber nicht von einander unabhängig, sondern müssen drei Bedingungen genügen, welche ausdrücken, dass die drei

Abstände *AB*, *BC* und *CA* sich mit der Zeit nicht verändern. Folglich wird die Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems oder Körpers durch sechs von einander unabhängige Functionen der Zeit definirt.

In speciellen Fällen, (Beispiele dieser Art werden in den §§ 19–26 unten gegeben) genügt die Kenntnis der Bewegungen von weniger als drei Punkten eines unveränderlichen Systems zur völligen Bestimmung der Bewegung, und zwar in gewissen Fällen die Kenntnis der Bewegung eines einzelnen Punktes, in anderen Fällen der Bewegungen zweier Punkte.

§ 19.

Translation oder Parallelbewegung.

Die Bewegung eines Körpers heisst translatorisch, wenn der Körper sich so bewegt, dass alle mit ihm unveränderlich verbunden gedachten geraden Linien und Ebenen immer sich selbst parallel bleiben. Sämtliche Punkte des Körpers beschreiben dabei congruente Bahnen und besitzen in demselben Augenblicke gleich grosse und gleich gerichtete Geschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeit heisst die Translationsgeschwindigkeit des Systems. Ebenso giebt es nur *eine* Beschleunigung, die Translationsbeschleunigung, und dasselbe gilt von ihren Componenten auf die Richtungen der Tangenten und der Hauptnormalen der Bahncurven. Die Bewegung des ganzen Körpers ist somit durch die Bewegung eines einzigen Punktes bestimmt, und es kommen die im ersten Abschnitt oben gefundenen Sätze zur Anwendung. In der That waren auch mehrere der als Bewegungen eines Punktes behandelten Bewegungen translatorische Bewegungen eines Körpers.

§ 20.

Die Drehung um eine feste Axe.

Eine andere Bewegung, bei welcher die Bewegung eines einzigen Punktes die Bewegung des ganzen Körpers bestimmt, ist die Drehbewegung um eine feste Axe. Wenn alle Punkte eines Körpers, welche einer bestimmten Geraden angehören, unbeweglich bleiben, so besteht die Bewegung des Körpers in einer Drehung um diese Gerade, welche die Axe der Drehung heisst. Jeder Punkt beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Drehaxe liegt und dessen Ebene senkrecht zu dieser Axe ist. Alle Punkte in demselben Abstande von der Drehaxe besitzen in demselben Augenblicke gleich grosse Geschwindigkeiten, gleich grosse Beschleunigungen u. s. w., haben überhaupt identische Bewegungen. Die Lage eines einzigen Punktes ausserhalb der Drehaxe bestimmt die Lage des ganzen Körpers, und somit die Bewegung eines einzigen Punktes die Bewegung des ganzen Körpers. Kennt man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung dieses einen Punktes, so kann man daraus auch die gleichzeitigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller übrigen Punkte berechnen.

Gleichung der Drehung.

Der senkrechte Abstand eines Punktes des Körpers von der Drehaxe werde sein Radius genannt. Man wähle einen bestimmten Radius OM des Körpers (Fig. 45) und lege eine im Raume feste Ebene OL durch die Drehaxe, bezeichne ferner mit v den Winkel zwischen diesem Radius und der Ebene, wobei v in einem bestimmten Sinne, dem positiven Drehsinne, positiv gerechnet wird. Die Grösse v ist eine Function der Zeit und die Gleichung der Drehbewegung lautet

$$v = f(t). \tag{58}$$

Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Drehung.

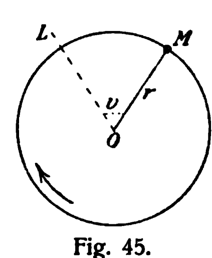


Fig. 45.

In einer Zeit $t'-t=\Delta t$ wächst der Winkel v um einen Betrag $\Delta v = v'-v$. Wenn die Drehbewegung die Eigenschaft hat, dass der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ constant bleibt, welche Werte von t und t' man auch nehmen mag, so heisst sie g l e i c h f ö r m i g. *Das constante Verhältnis zwischen dem Drehungswinkel und der Zeit,* d. h.

$$\omega = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{59}$$

ist die sog. Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung. Nimmt man besonders $t'-t=$ der Zeiteinheit, so ist die Winkelgeschwindigkeit ihrem Zahlwerte nach gleich dem in der Zeiteinheit beschriebenen Drehungswinkel, d. i. $\omega = \Delta v$. Weil die Winkelgeschwindigkeit der Quotient eines Winkels durch eine Zeit ist, so ist ihre Einheit

Einheit der Winkelgeschwindigkeit.

$$\frac{\text{Winkeleinheit}}{\text{Zeiteinheit}}.$$

Am zweckmässigsten wendet man die sog. absolute Winkeleinheit an, welche bekanntlich derjenige Winkel ist, dessen Bogen gleich dem Radius ist (in Graden, Minuten und Secunden $= \frac{180°}{\pi} = 57°\,17'\,44.8''$). Dann ist also die Einheit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\text{absolute Winkeleinheit}}{\text{Zeiteinheit}},$$

d. h. einfach der reciproke Wert einer Zeit, indem ja die absolute Winkeleinheit eine absolute Zahl darstellt.

Ungleichförmige Drehung. Winkelgeschwindigkeit.

Wenn die Drehbewegung nicht gleichförmig ist, so heisst sie u n g l e i c h f ö r m i g. Man versteht dann unter m i t t l e r e r W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t während des Zeitabschnittes $t'-t=\Delta t$ den Quotienten

$$(60) \qquad \bar{\omega} = \frac{\triangle v}{\triangle t}$$

und unter **Winkelgeschwindigkeit** zur Zeit t den Grenzwert dieses Quotienten, wenn $\triangle t$ sich der Grenze Null nähert, d. h.

$$(61) \qquad \omega = \lim \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{dv}{dt} = f'(t).$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also gleich der Derivirten der Function v in Bezug auf die Zeit.

Durch ihr Vorzeichen giebt die Winkelgeschwindigkeit den Sinn der Drehbewegung an, so dass einem positiven ω ein mit der Zeit wachsendes v und eine positive Drehung, einem negativen ω ein abnehmendes v und eine negative Drehung entspricht.

Lineare Geschwindigkeit.

Bezeichnet man den Bogen MM' in der Figur 46 mit $\triangle s$, den Radius OM des Punktes M mit r, so hat man

$$\triangle s = r \,.\, \triangle v,$$

und erhält

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = r \frac{\triangle v}{\triangle t},$$

$$\lim \frac{\triangle s}{\triangle t} = r \lim \frac{\triangle v}{\triangle t}$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{dv}{dt},$$

Fig. 46.

wo s den von M beschriebenen Kreisbogen, gemessen von einem bestimmten Punkte aus z. B. von dem Schnittpunkte mit der Ebene OL darstellt. Die Ableitung $\frac{ds}{dt}$ ist die Geschwindigkeit des Punktes M in der Bahn; sie soll hier **lineare Geschwindigkeit** zum Unterschiede von der Winkelgeschwindigkeit heissen und werde mit u bezeichnet. Also ist

(62) $$u = r\,\omega,$$

d. h. *die lineare Geschwindigkeit eines Punktes des rotirenden Körpers ist gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit in den Radius des Punktes.*

Umgekehrt folgt aus (62) zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{u}{r}.$$

Nimmt man $r = 1$ an, so erhält man

$$\omega = u,$$

d. h. *dem Zahlwerte nach ist die Winkelgeschwindigkeit gleich der linearen Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande 1 von der Drehaxe.*

In einem bestimmten Augenblicke ist der Geschwindigkeitszustand des rotirenden Körpers durch den entsprechenden Wert der Winkelgeschwindigkeit ω definirt. Besonders giebt die Formel (62) den Satz: *Die linearen Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des sich drehenden Körpers verhalten sich in jedem Augenblicke wie deren Abstände von der Drehaxe.*

Winkelbeschleunigung. Es sollen jetzt die Beschleunigungen bei der Drehbewegung betrachtet werden.

Die Winkelgeschwindigkeit sei zu einer Zeit t gleich ω, zu einer folgenden Zeit $t' = t + \Delta t$ gleich $\omega' = \omega + \Delta\omega$. Es heisst dann

(63) $$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega' - \omega}{t' - t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

m i t t l e r e W i n k e l b e s c h l e u n i g u n g während der Zeit Δt und

(64) $$\varepsilon = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

W i n k e l b e s c h l e u n i g u n g der Drehbewegung zur Zeit t. *Die Winkelbeschleunigung ist die Ableitung der*

Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Zeit. Sie ist gleich Null bei der gleichförmigen Drehbewegung. Hat sie einen constanten Wert, so heisst die Drehbewegung gleichförmig veränderlich, sonst ungleichförmig veränderlich.

Aus (61) und (64) ergiebt sich noch

$$\varepsilon = \frac{d^2 v}{dt^2} = f''(t).$$

Einheit der Winkelbeschleunigung.

Die Einheit der Winkelbeschleunigung ist

$$\frac{\text{absolute Winkeleinheit}}{\text{Zeiteinheit}^2}.$$

Tangential- und Centripetalbeschleunigung.

Es seien a_t und a_n bez. die Tangential- und die Centripetalbeschleunigung eines Punktes. Dann folgt durch Differentiation der Gleichung (62)

$$a_t = \frac{du}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\varepsilon, \tag{65}$$

d. h. *die Tangentialbeschleunigung ist gleich dem Producte aus der Winkelbeschleunigung und dem Radius des Punktes.* Sie hat die Richtung der Tangente der kreisförmigen Bahn. Mit Hülfe der Formel (57) erhält man ferner

$$a_n = \frac{u^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2, \tag{66}$$

so dass *die Centripetalbeschleunigung gleich dem Producte aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius ist.* Ebenso wie die Geschwindigkeit sind a_t und a_n mit r proportional. Dasselbe gilt noch von der totalen Beschleunigung eines Punktes

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = r\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}.$$

a bildet mit dem Radius nach innen einen Winkel $90°-\vartheta$, wobei

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}}$$

ist.

Anwendungen.

1) Wenn die Umdrehungszeit einer gleichförmigen Drehbewegung mit T bezeichnet wird, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

So ergiebt sich für das im Beispiel 2) § 17 betrachtete Schwungrad, welches 100 Umdrehungen in der Minute macht,

$$T = \frac{60}{100} = 0.6 \text{ Sec.}$$

und

$$\omega = \frac{2 . 3.14}{0.6} = 10.47 \frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}}$$

Für die Erde, welche einen Umlauf in einem Sterntage = 86164.1 Secunden vollzieht, ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.1} = 0.00007292 \frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}}.$$

2) Eine Welle dreht sich der Formel

$$v = ct^2$$

gemäss; man berechne die Winkelgeschwindigkeit und - Beschleunigung, sowie die lineare Geschwindigkeit, die totale Beschleunigung und ihre Componenten für einen Punkt der Welle. Speciell nehme man

$$c = 1.5 \frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}}; \; t = 5 \text{ Sec.}$$

und einen Punkt im Abstande $r = 0.4$ m von der Wellenaxe.

Man findet

$$\omega = \frac{dv}{dt} = 2\,ct,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2c,$$

d. h. die Drehbewegung ist gleichförmig veränderlich; ferner

$$u = r\omega = 2\,rct,$$

$$a_t = r\frac{d\omega}{dt} = 2\,rc,$$

$$a_n = r\omega^2 = 4\,rc^2t^2,$$

$$a = 2\,rc\sqrt{1 + 4\,c^2t^4},$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = 2\,ct^2.$$

Mit den numerischen Werten wird

$$\omega = 15\,\frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}},$$

$$\varepsilon = 3\,\frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}^2},$$

$$u = 6\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}},$$

$$a_t = 1.2\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2};\quad a_n = 90\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2},$$

$$a = 90.01\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2};\quad \vartheta = 89^\circ\,14'\,10''.$$

§ 21.

Schraubenbewegung.

Wenn ein Körper sich gleichzeitig um eine feste Axe dreht und in der Richtung dieser Axe eine translatorische Bewegung ausführt, so heisst seine Bewegung eine Schraubenbewegung um eine feste Axe. Die Punkte der sog. Schraubenaxe bleiben auf der Axe, und die Bewegung könnte auch dadurch definirt werden, dass die Punkte einer gewissen geraden Linie des Körpers sich auf dieser Geraden bewegen müssen. Alle Punkte ausserhalb der Schraubenaxe beschreiben Bahnen, welche auf Kreiscylindern liegen, deren Axen mit der Schraubenaxe zusammenfallen (Fig. 47).

Die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um die Schraubenaxe heisst **Winkelgeschwindigkeit der Schraubenbewegung**; die translatorische Geschwindigkeit g der Parallelbewegung längs der Schraubenaxe heisst **Translations- oder Gleitgeschwindigkeit der Schraubenbewegung**, und

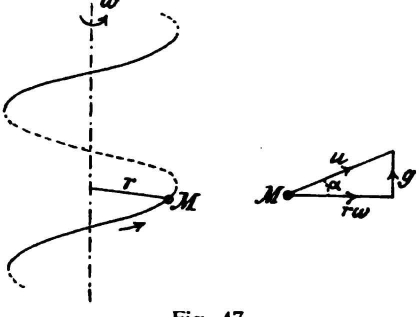


Fig. 47.

der Quotient $\frac{g}{\omega}$ ist der sog. **Parameter der Schraubenbewegung**, alles für einen bestimmten Augenblick angenommen.

Die Schraubenbewegung um eine feste Axe ist wie die translatorische Bewegung und die Drehung um eine feste Axe durch die Bewegung eines einzigen Punktes bestimmt; denn stellt man sich eine Ebene vor, welche diesen Punkt und die Schraubenaxe enthält, so wird die Lage der Ebene und also auch die Lage des Körpers durch die Lage des Punktes und der auf die Schraubenaxe fallenden Geraden völlig bestimmt.

Zur analytischen Darstellung der Bewegung eines Punktes braucht man nach § 12 drei Functionen der Zeit. Der Punkt ist hier ausserdem an die Bedingung gebunden, dass sein Abstand von der Schraubenaxe unveränderlich sein muss. Es bleiben also zur Bestimmung der Schraubenbewegung eines Körpers zwei von einander unabhängige Functionen der Zeit erforderlich.

Geschwindigkeitszustand. Die Geschwindigkeit jedes Punktes des eine Schraubenbewegung besitzenden Körpers setzt sich zusammen aus der für alle Punkte gemeinsamen, der Schraubenaxe parallelen Gleitgeschwindigkeit g und der von der Dreh-

ung herrührenden Geschwindigkeit $r\omega$, welche senkrecht zur Schraubenaxe und zum Radius r ist. Die resultirende Geschwindigkeit hat die Grösse

$$u = \sqrt{g^2 + r^2 \omega^2},$$

ist senkrecht zum Radius r des Punktes und bildet mit einer zur Schraubenaxe senkrechten Ebene einen Winkel α, welcher aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{r\omega}$$

berechnet wird. Alle Punkte geben dieselbe ortogonale Projection g ihrer Geschwindigkeiten auf die Schraubenaxe; und die Punkte dieser Axe selbst besitzen nur die Gleitgeschwindigkeit g.

Falls die Drehung und die Translation beide gleichförmig sind, so heisst auch die Schraubenbewegung g l e i c h f ö r m i g. Hierbei sind die Grössen ω und g, sowie die Geschwindigkeit u jedes Punktes und ihr Winkel α constant. Die einzelnen Punkte des Körpers beschreiben sog. g e w ö h n l i c h e S c h r a u b e n l i n i e n mit der Schraubenaxe als Axe.

Die Drehung ist ein besonderer Fall der Schraubenbewegung, welcher sich für $g = 0$ ergiebt. Auch erhält man die translatorische Bewegung in der Richtung einer Geraden als einen speciellen Fall der Schraubenbewegung, in dem die Winkelgeschwindigkeit ω gleich Null ist.

§ 22.

Ebene Bewegung.

Ein unveränderliches Punktsystem oder ein Körper hat eine e b e n e B e w e g u n g, wenn alle seine Punkte sich in Ebenen bewegen, welche einer gewissen Grundebene parallel sind. Alle Punkte, welche in einer zu der Grundebene parallelen Ebene liegen, bleiben bei der Be-

wegung in ihrer Ebene, und alle Punkte auf einer Senkrechten zu der Grundebene führen congruente Bewegungen aus. Es genügt deshalb die Bewegung in einer der Parallelebenen oder in der Grundebene selbst zu betrachten. Diese Bewegung ist, wie jetzt gezeigt werden soll, durch die Bewegung z w e i e r P u n k t e bestimmt; und folglich gilt dasselbe von der Bewegung des ganzen Körpers.

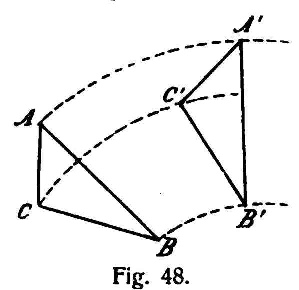


Fig. 48.

Es seien in der Figur 48 A und B zwei Lagen der beiden Punkte, A' und B' ihre Lagen zu einer anderen Zeit. Ein beliebiger dritter Punkt C bildet mit ihnen ein unveränderliches Dreieck und wird deshalb auch in der neuen Lage eindeutig bestimmt. Folglich bestimmen die Bewegungen von A und von B auch die Bewegung von C.

Zur analytischen Darstellung der Bewegung eines Punktes in einer Ebene braucht man nach § 12 zwei Functionen der Zeit. Für die Punkte A und B ergeben sich somit überall vier Functionen der Zeit, welche aber einer Bedingung genügen müssen, die ausdrückt, dass der Abstand AB unveränderlich ist. Eine ebene Bewegung wird also durch drei von einander unabhängige Functionen der Zeit definirt.

Eine ebene Figur kann aus einer Lage in eine andere Lage in derselben Ebene durch eine Drehung um einen Punkt der Ebene übergeführt werden.

Es sei AB (Fig. 49) eine Lage einer Strecke der ebenen Figur und $A'B'$ eine andere Lage. Man verbindet die Punkte A und A', sowie die Punkte B und B' mit einander und zieht durch die Mitten von AA' und BB' die Senkrechten. Diese schneiden sich im allgemeinen in einem Punkte C, welcher durch Gerade mit den

Punkten A, A', B und B' verbunden wird. Es soll jetzt bewiesen werden, dass C der Drehpunkt ist und ACA' den Drehwinkel bei der erwähnten Ueberführung darstellt. Man hat nämlich

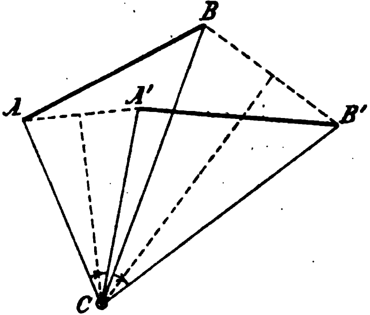


Fig. 49.

$$CA = CA',$$

$$CB = CB',$$

$$AB = A'B',$$

Die Dreiecke ACB und $A'CB'$ sind also congruent. Daraus folgt

$$\wedge ACB = \wedge A'CB',$$

und wenn der Winkel $A'CB$ auf beiden Seiten subtrahirt (eventuell addirt) wird,

$$\wedge ACA' = \wedge BCB'.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass bei einer Drehung von AB um den Punkt C, so dass A mit A' zusammenfällt, auch B mit B' zusammenfällt w. z. b. w.

Wenn die Strecken AB und $A'B'$ parallel und gleich gerichtet sind, so liegt der Drehpunkt C unendlich fern. Statt der Rotation erhält man dann zur Ueberführung von AB nach $A'B'$ eine Translation, welche durch die Strecke AA' bestimmt ist. Ein anderer Fall, in welchem die obige Construction versagt, ist der, dass A' mit B und B' mit A bez. zusammenfallen. Der Drehpunkt ist dann der Mittelpunkt von AB und die Drehung gleich einem halben Umlaufe.

Augenblicklicher Drehpunkt.

Im allgemeinen fällt die wirkliche Bewegung, durch welche die ebene Figur von der einen Lage in die andere übergeht, nicht mit der jetzt betrachteten Drehung zusammen. Betrachtet man aber zwei benachbarte Lagen, so wird die wirkliche Bewegung sehr wenig von einer Drehung abweichen, indem ja die kleinen Bahnelemente

der Punkte der Figur sich den kurzen geradlinigen Verbindungsstrecken zweier Lagen desselben Punktes ebenso wie die kurzen Kreisbögen der Drehbewegung nähern. Lässt man AA' und BB' sich der Grenze Null nähern, so nähert sich der Drehpunkt C einer bestimmten Grenzlage mit der Eigenschaft, dass die ebene Figur durch eine unendlich kleine Drehung um diesen sog. a u g e n b l i c k l i c h e n   D r e h p u n k t oder P o l von einer Lage in eine unendlich benachbarte Lage übergeht.

Geschwindigkeiten der Punkte.

Aus der Eigenschaft der ebenen Bewegung, in jedem Augenblicke in einer Elementarrotation um einen Drehpunkt in der Ebene der Figur zu bestehen, ergeben sich bemerkenswerte Sätze über die Geschwindigkeiten der Punkte des Systems (Fig. 50). Die Geschwindigkeit eines Punktes steht senkrecht auf seinem von C aus gezogenen Radius und hat die Richtung der Tangente der Bahncurve des Punktes. Es folgt somit:

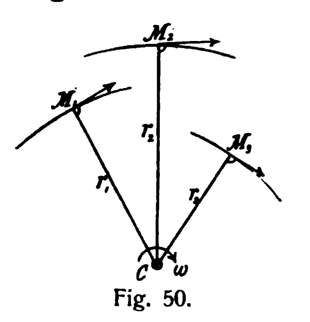


Fig. 50.

Die Lage des augenblicklichen Drehpunktes einer ebenen Bewegung bestimmt die Richtungslinie für die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Systems.

Die Normalen der Bahncurven aller Punkte gehen in jeder Lage des Systems durch den entsprechenden augenblicklichen Drehpunkt.

Die Lage des augenblicklichen Drehpunktes ist durch die Richtungslinien der Geschwindigkeiten von zwei Punkten des Systems bestimmt. Man braucht nur in jedem dieser beiden Punkte die Senkrechte zu der gegebenen Richtungslinie zu ziehen. Der Schnittpunkt der beiden Senkrechten ist dann der augenblickliche Drehpunkt.

Wenn ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Systems ist, so gilt nach der Formel (62) die Gleichung

$$u = r\omega.$$

Hieraus folgt, dass *die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Systems in jedem Augenblicke sich wie die Abstände der Punkte von dem zugehörigen Drehpunkte verhalten.* Für alle Punkte hat also das Verhältnis

$$\frac{u}{r} = \omega$$

den gleichen Wert. Man sieht, dass die Kenntnis der Lage des augenblicklichen Drehpunktes und der Geschwindigkeit eines einzigen Punktes des Systems für die Ermittelung der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ausreicht. Der Geschwindigkeitszustand des Systems ist somit bestimmt durch die Lage des Drehpunktes in Verbindung entweder mit dem Werte der Winkelgeschwindigkeit oder mit dem Werte und Sinne der linearen Geschwindigkeit eines einzigen Punktes des Systems.

Anwendungen.

1) *Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden.*

Es sei AB eine Gerade, welche eine ebene Bewegung besitzt, C der augenblickliche Drehpunkt und ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit (Fig. 51). Die Geschwindigkeiten der Punkte M_1, M_2, $M_3, \ldots$ der Geraden seien bez. u_1, u_2, $u_3 \ldots$, der Fusspunkt der Senkrechten n von C auf die Gerade werde mit N und seine Geschwindigkeit mit c bezeichnet. Es folgt dann

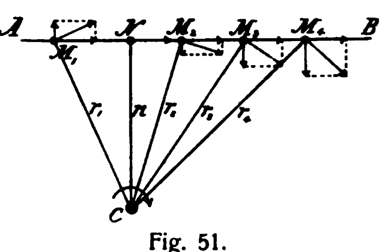


Fig. 51.

$$\frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2} = \frac{u_3}{r_3} = \ldots = \frac{c}{n} = \omega.$$

Man zerlege jetzt jede Geschwindigkeit in zwei zu einander senkrechte Geschwindigkeiten, von welchen die eine in die Richtung der Geraden selbst fällt, und zwar seien diese Componenten längs der Geraden der Reihe nach u_1' u_2' $u_3' \ldots$ Aus zwei ähnlichen Dreiecken in

der Figur, in welchen r_1 und u_1, n und u_1' entsprechende Seiten sind, ergiebt sich mit Anwendung der obigen Formeln

$$u_1' = u_1 \frac{n}{r} = n\omega = c.$$

Es ist also

$$u_1' = u_2' = u_3' = \ldots = c = n\omega,$$

d. h. *Die Projectionen der Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden, welche eine ebene Bewegung hat, auf die Richtung der Geraden selbst sind alle gleich gross und gleich der Geschwindigkeit des Fusspunktes der Senkrechten, welche von dem augenblicklichen Drehpunkte auf die Gerade gefällt wird.* Unter sämtlichen Punkten der Geraden hat dieser Fusspunkt die kleinste Geschwindigkeit.

2) *Der Satz von den senkrechten Geschwindigkeiten.*

Die Geschwindigkeiten einer Geraden eines ebenen Systems mögen alle in demselben Sinne um 90° gedreht werden (Fig. 52). Sie fallen dabei auf die Radien der Punkte und sind entweder nach dem Drehpunkte hin oder von dem Drehpunkte weg gerichtet. *Die Endpunkte dieser sog. senkrechten Geschwindigkeiten liegen auf einer zweiten Geraden, welche der ersten Geraden parallel ist.* Dieser Satz folgt unmittelbar daraus, dass die ursprünglichen Geschwindigkeiten dieselbe Projection auf die Gerade selbst, die senkrechten Geschwindigkeiten also dieselbe Projection auf eine Normale zu der Geraden geben.

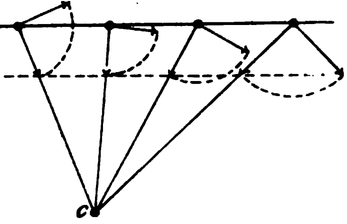


Fig. 52.

In einer allgemeineren Form lautet der Satz von den senkrechten Geschwindigkeiten: *Die Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte einer ebenen Curve, welche eine ebene Bewegung hat, liegen auf einer zweiten Curve, welche der ersteren in Bezug auf den augenblicklichen Drehpunkt als Ähnlichkeitspunkt gleicht.*

Man beweise diesen Satz.

3) Zwei Stangen AC und BC (Fig. 53 und 54) sind durch ein Gelenk bei C mit einander verbunden. Es wird die Geschwindigkeit von C gesucht, falls die Geschwindigkeiten von A und B gegeben sind.

a) Das Problem lässt sich vermittelst des Satzes der Anw. 1) lösen (Fig. 53). Die Stäbe AC und BC besitzen ebene Bewegungen. Die Projection der Geschwindigkeit von C auf die Gerade AC ist deshalb gleich der bekannten Projection u_A' der gegebenen Geschwin-

digkeit u_A des Punktes A auf AC. Dasselbe gilt von den Projectionen der Geschwindigkeiten von B und C auf BC. Durch ihre beiden Projectionen u_A' und u_B' ist die Geschwindigkeit u_C des Punktes C völlig bestimmt, und zwar liegt ihr Endpunkt in dem Schnittpunkte der beiden Senkrechten zu AC und BC bez. in den Endpunkten von u_A' und u_B'.

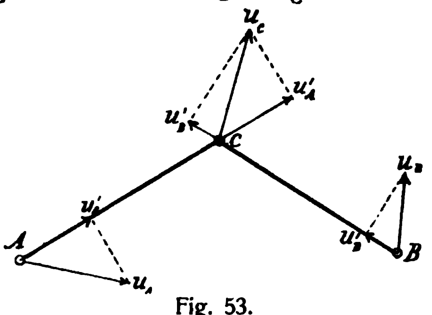


Fig. 53.

b) Das Problem kann auch mit Hülfe des Satzes von den senkrechten Geschwindigkeiten gelöst werden (Fig. 54). Zu diesem Zwecke werden die Geschwindigkeiten von A und B um 90° in demselben Sinne gedreht und die Parallelen durch die Endpunkte A' und B' bez. zu AC und BC gezogen. Alsdann ist die Strecke von C nach dem Schnittpunkte C' der beiden Parallelen die senkrechte Geschwindigkeit von C und giebt durch Drehen um 90° in entgegengesetztem Sinne wie oben die gesuchte Geschwindigkeit u_C des Punktes C.

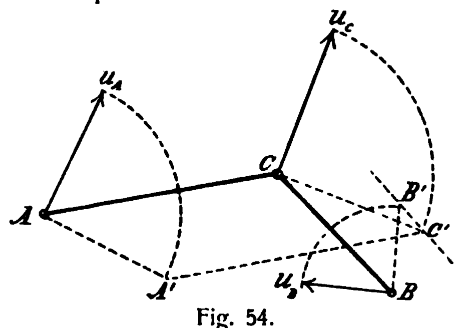


Fig. 54.

§ 23.

Polcurven und Rollen bei der ebenen Bewegung.

Feste Polcurve.

Der augenblickliche Drehpunkt einer ebenen Bewegung, auch Pol der Geschwindigkeiten genannt, ändert seine Lage mit der Zeit. In der Figur 55 sind C_0 C_1 C_2 u. s. w. die zu den Zeiten bez. t_0 t_1 t_2 u. s. w. gehörenden Lagen dieses Punktes. Wenn sie durch gerade Linien verbunden werden, so ensteht eine gebrochene Linie. Lässt man nun die Zeitpunkte näher und näher an einan-

Fig. 55.

der heranrücken, so nähert sich die gebrochene Linie einer continuirlichen Curve, welche den Ort aller augenblicklichen Drehpunkte darstellt und die feste Polcurve der Bewegung heisst. Die feste Polcurve kann durch Rechnung oder durch Construction gefunden werden, sobald die ebene Bewegung definirt ist, beispielsweise durch die Bewegung von zwei Punkten des Systems. Die feste Polcurve wird auf ein festes Coordinatensystem in der Ebene der Bewegung bezogen.

Bewegliche Polcurve.

Ausser der festen Polcurve ergiebt sich bei jeder ebenen Bewegung eine sog. bewegliche Polcurve. In einer bestimmten Lage des bewegten ebenen Systems fällt ein Punkt Γ_0 des Systems mit dem augenblicklichen Drehpunkte zusammen und besitzt in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit Null. Zu einem anderen Zeitpunkte fällt ein anderer Punkt des bewegten Systems mit dem entsprechenden augenblicklichen Drehpunkte zusammen und hat dabei keine Geschwindigkeit. Alle diese Punkte Γ des bewegten Systems, welche nach einander mit den successiven augenblicklichen Drehpunkten zusammenfallen und die Geschwindigkeit Null erlangen, bilden eine Curve, welche mit dem bewegten System fest verbunden ist und sich mit ihm bewegt. Diese Curve heisst die bewegliche Polcurve. Sie wird auf ein Coordinatensystem bezogen, welches mit dem ebenen Systeme fest verbunden ist und sich mit ihm bewegt.

Rollen der beweglichen Polcurve auf der festen.

Es seien t_0, t_1, t_2 . . . eine Reihe sehr nahe auf einander folgender Zeitpunkte. Zur Zeit t_0 ist C_0 der augenblickliche Drehpunkt, und der Punkt Γ_0 des beweglichen Systems fällt damit zusammen (Fig. 56).

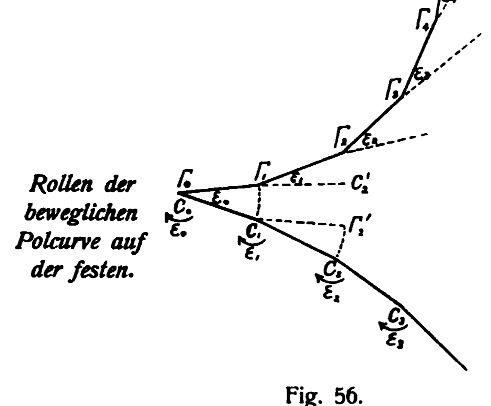


Fig. 56.

Durch eine Drehung um den Winkel ε_0 um C_0 geht das System in die Lage zur Zeit t_1 über, zu welcher C_1 der augenblickliche Drehpunkt ist. Dabei fällt der Punkt Γ_1, welcher in der Figur in seiner Lage zur Zeit t_0 eingetragen ist, mit dem Punkte C_1 zusammen. Die Lage des Punktes Γ_1 zur Zeit t_0 wird erhalten, indem man $\Gamma_0\Gamma_1$ gleich C_0C_1 und den Winkel $\Gamma_1\Gamma_0C_1$ gleich ε_0 macht. Zur Zeit t_1 dreht sich das System um den Winkel ε_1 um C_1 und geht dabei in seine Lage zur Zeit t_2 über. Bei dieser Drehung wird ein Punkt Γ_2' nach C_2 übergeführt, und zwar erhält man Γ_2', indem man $C_1\Gamma_2'$ gleich C_1C_2 und den Winkel $\Gamma_2'C_1C_2$ gleich ε_1 macht. Schliesslich folgt die Lage Γ_2 zur Zeit t_0, wenn man die gebrochene Linie $\Gamma_0C_1\Gamma_2'$ um C_0 um den Winkel ε_0 zurückdreht. In dieser Weise könnte man fortfahren und die bewegliche Polcurve $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ . . in ihrer Lage zur Zeit t_0 construiren. Es geht z. B. Γ_3 in C_3 so über, dass man das System zuerst um C_0 um den Winkel ε_0, dann um C_1 um den Winkel ε_1 und endlich um C_2 um den Winkel ε_2 dreht. Man construirt Γ_3, indem man diese Operationen in umgekehrter Reihenfolge rückwärts vornimmt, u. s. w. Lässt man die Zeitpunkte t_0, t_1, t_2 . . . unendlich nahe auf einander folgen, so gehen die gebrochenen Linien $C_0C_1C_2$ . . . und $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2$ . . . in Curven über, die erstere in die feste Polcurve (C) und die letztere in die bewegliche Polcurve (Γ); man erhält also den Satz:

Jede ebene Bewegung kann dadurch hervorgebracht werden, dass eine mit dem System fest verbundene Curve (Γ) ohne zu gleiten auf einer festen Curve (C) in der Ebene der Bewegung rollt. Der gemeinschaftliche Berührungspunkt beider Curven ist der augenblickliche Drehpunkt.

Für den Körper im Raume lautet derselbe Satz:

Die Bewegung eines Körpers parallel einer Ebene ist dadurch bestimmt, dass eine mit dem Körper fest verbundene Cylinderfläche (Γ) ohne zu gleiten auf einem im Raume festen Cylinder (C) rollt. In jedem Augenblicke

besteht die Bewegung in einer Drehung um die gemeinschaftliche Berührungslinie beider Cylinder. Die Erzeugenden der Cylinder stehen auf den Parallelebenen der Bewegung senkrecht.

§ 24.

Beispiele der ebenen Bewegung.

1) *Ein ebenes System bewegt sich so, dass zwei seiner Punkte längs fester Geraden der Ebene des Systems gleiten.*

Es sei $AB = l$ die Verbindungslinie der beiden Punkte, O der Schnittpunkt der beiden festen Geraden und $AOB = \gamma$ der Winkel zwischen denselben (Fig. 57).

Feste Polcurve.

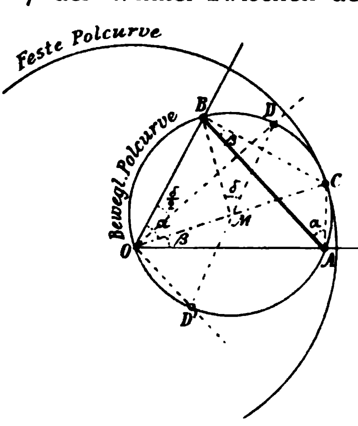


Fig. 57.

Zuerst soll die feste Polcurve bestimmt werden. Für eine gegebene Lage der Strecke AB und somit des ganzen Systemes kennt man die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte A und B, welche sich geradlinig bewegen. Nach einem Satze auf p. 92 ist somit der entsprechende augenblickliche Drehpunkt C bestimmt; er liegt in dem Schnittpunkte der Senkrechten AC in A zu OA und der Senkrechten BC in B zu OB. Es werde die Gerade OC gezogen; ferner seien α und β die Winkel BOC und COA. In dem Dreiecke ABC ist der Winkel bei C $180^\circ - \gamma$, der Winkel bei A gleich α, weil er in dem um $OBCA$ beschriebenen Kreise ebenso wie BOC über dem Bogen BC steht. In derselben Weise folgt $\wedge ABC = \beta$.

Man hat jetzt

$$AC = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}\, l.$$

Bezeichnet man noch OC mit d, so folgt aus dem Dreiecke AOC

$$AC = d \sin \beta,$$

und somit aus den beiden Gleichungen

$$d = \frac{l}{\sin \gamma}.$$

Zu demselben Resultate würde man durch Berechnung der Seite BC kommen. Die Gleichung zeigt, dass der Abstand des augenblicklichen Drehpunktes C vom Punkte O während der Bewegung unverändert bleibt, d. h. *die feste Polcurve ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius d.*

Bewegliche Polcurve.

Auch die bewegliche Polcurve lässt sich in einfacher Weise finden. Der Winkel bei C ist der Supplementwinkel zu γ. Die bewegliche Polcurve, welche mit der Geraden AB fest verbunden ist, ist folglich der Ort derjenigen Punkte, von welchen aus die Strecke AB unter dem Winkel $180^\circ - \gamma$ gesehen wird, d. h. ein Kreisbogen über der Sehne AB. Wenn, wie hier vorausgesetzt wird, ein Punkt A oder B während der Bewegung durch O hindurchgehen kann, wird der Winkel γ gegen $180^\circ - \gamma$ vertauscht, und die bewegliche Polcurve wird den vollen Kreis umfassen. Der Kreis geht durch O, A und B und berührt den festen Kreis in dem augenblicklichen Drehpunkte C. *Die bewegliche Polcurve ist also ein Kreis mit dem Durchmesser d.* Die Bewegung kann auch so definirt werden, dass der bewegliche Kreis ohne zu gleiten innerhalb des festen Kreises rollt.

Bahncurven der Punkte.

Bei der Bewegung des Systems beschreiben die Punkte A und B zwei Gerade durch O. Man muss

die Bahnen der übrigen Punkte des Systems bestimmen. Es werde zuerst ein beliebiger, auf dem beweglichen Kreise gelegener Punkt D betrachtet. Wenn man ihn mit O und mit dem Mittelpunkte M des Kreises verbindet, sowie MB zieht, so erhält man BMD als einen während der Bewegung unveränderlichen Centriwinkel δ und BOD als einen entsprechenden Peripheriewinkel, welcher also gleich $\frac{\delta}{2}$ ist und auch unveränderlich bleibt. Hieraus folgt, dass der Punkt D sich auf einer durch O gehenden Geraden bewegt. Dasselbe gilt von den übrigen Punkten der beweglichen Polcurve. Betrachtet man die Endpunkte eines Durchmessers des rollenden Kreises, so sind ihre Bahnen zwei zu einander senkrechte Durchmesser des festen Kreises (die Punkte D und D' in der Figur 58). Man erhält also dieselbe Bewegung, wenn man die beiden festen Geraden OA und OB zu einander senkrecht annimmt (Fig. 58). Nach einem bekannten Lehrsatze der analytischen Geometrie beschreibt ein Punkt E auf der Strecke AB eine Ellipse, in welcher OA und OB die Richtungen der Hauptaxen sind und die Abstände des Punktes E von A und B die halben Axen darstellen.

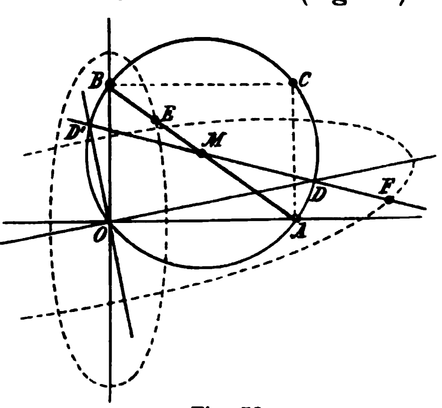


Fig. 58.

Für den Halbirungspunkt M der Strecke AB geht die Ellipse in einen Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius $\frac{l}{2}$ über. Kein anderer Punkt des Systems hat eine kreisförmige Bahn. Um die Bahn eines beliebigen Systempunktes F zu erhal-

ten, werde F mit M verbunden. Die beiden Schnittpunkte D und D' der Verbindungsgeraden FM mit dem rollenden Kreise beschreiben die auf einander senkrechten Geraden OD und OD', so dass F einer Geraden FDD' angehört, deren Punkte D und D' auf zwei zu einander senkrechten Geraden sich bewegen. Die Bahn von F ist somit eine Ellipse, deren Axenrichtungen OD und OD' und deren Halbaxen die Abstände des Punktes F von den beiden Punkten D und D' sind. Als Endergebnis folgt, dass *die Punkte des ebenen Systems sich im allgemeinen in elliptischen Bahnen bewegen, welche in gerade Linien oder in einen Kreis übergehen können.*

Von der hier beschriebenen Bewegung macht man bei dem sog. *Ellipsographen* zum Zwecke des mechanischen Zeichnens von Ellipsen Gebrauch. Ferner benützt man diese Bewegung bei Maschinen zur Überführung einer Drehbewegung in eine geradlinige Bewegung. Auf der inneren Seite eines cylindrischen Zahnrades wird ein anderes halb so grosses Zahnrad angebracht; die Mittelpunkte oder die Axen beider Räder werden mit einer an den Axen drehbaren Schiene verbunden, die man vermittelst einer Kurbel um die Axe des grösseren festen Rades dreht. Das kleinere Rad rollt alsdann innerhalb des grösseren Rades, so dass jeder Punkt seines Umfanges eine oscillirende Bewegung längs eines Durchmessers des festen Rades ausführt.

Kurbelbewegung.

2) *Geschwindigkeiten bei der Schubkurbelbewegung.* In der Figur 59 stellt OA die Kurbel, AB die Schubstange und BO die geradlinige Bahn des Schiebers dar. Der eine Endpunkt B der Schubstange hat dieselbe hin und her gehende Bewegung wie der Kolben im Dampfcylinder, der andere Endpunkt A eine rotirende Bewegung um die Axe O. Die Bewegung der Schubstange AB ist somit eine ebene Bewegung. Es seien r die Länge der Kurbel OA, a die Länge der Schubstange AB, ω die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel in einem

Augenblicke, u die Geschwindigkeit des Schiebers zu derselben Zeit, φ und ϑ bez. die Winkel AOB und ABO.

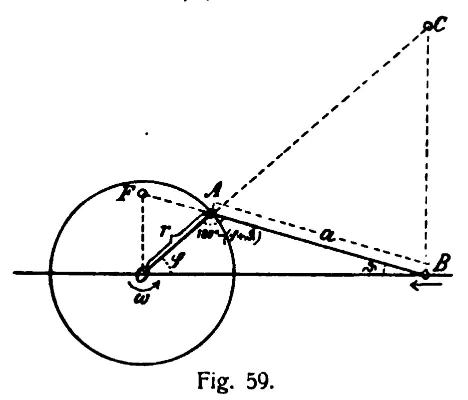


Fig. 59.

Die Lage des augenblicklichen Drehpunktes C bei der Bewegung der Schubstange ist durch die bekannten Geschwindigkeitsrichtungen der Punkte A und B bestimmt, und zwar liegt C in dem Schnittpunkte der Verlängerung von OA und der Senkrechten in B auf OB. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten u des Punktes B und $r\omega$ des Punktes A folgt dann

$$\frac{u}{r\omega} = \frac{BC}{AC}.$$

Verlängert man BA über A hinaus und zieht in O die Senkrechte OF zu OB, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken AOF und ACB

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{r}.$$

Folglich ist

$$u = OF \, . \, \omega.$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man die eine der Grössen u oder ω berechnen, wenn die andere bekannt ist.

Es soll jetzt die Länge OF berechnet werden. Aus dem Dreiecke OAF folgt vermittelst des Sinussatzes

$$OF = r \frac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$

Aus dem Dreiecke OAB erhält man

$$\sin \vartheta = \frac{r}{a} \sin \varphi$$

und folglich

$$\frac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\cos\vartheta}=\sin\varphi+\cos\varphi\,\mathrm{tg}\vartheta=\sin\varphi+\frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2-r^2\sin^2\varphi}},$$

$$u=r\omega\left\{\sin\varphi+\frac{r\sin 2\varphi}{2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Diese Gleichung giebt $u=0$ für $\varphi=0$ und $\varphi=180°$. Der Punkt B befindet sich dann in einem Endpunkte seiner Bahn, in einer der beiden sog. Totlagen. Mit $\varphi=90°$ hat man $u=r\omega$, so dass die Geschwindigkeiten der Punkte A und B gleich gross und gleich gerichtet sind. Der augenblickliche Drehpunkt fällt in's Unendliche und die Bewegung der Schubstange AB ist während eines Augenblickes eine translatorische Bewegung. Ähnliches gilt für $\varphi=270°$.

Die Bestimmung der Polcurven und der Bahnen der einzelnen Systempunkte wird hier als etwas zu weitläufig weggelassen.

3) *Schwingkurbelbewegung. Parallelogramm von Watt.*

Bei einer Balancierdampfmaschine sei OA die rotirende Kurbel (Fig. 60), DB der eine Arm des Balancier oder die Schwinge und BA die Koppel. Die Bewegung der Koppel ist eine ebene Bewegung, welche dadurch definirt ist, dass die Endpunkte A und B sich auf gegebenen Kreisen bewegen müssen. Der augenblickliche Drehpunkt C liegt in dem Schnittpunkte der verlängerten Radien OA und DB dieser Kreise. Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel OA, r den Kurbelradius und u die Geschwindigkeit des Endpunktes B der Schwinge, so folgt

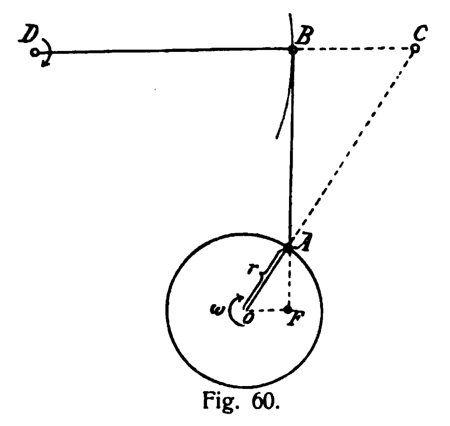


Fig. 60.

$$\frac{u}{r\omega} = \frac{BC}{AC}.$$

Verlängert man nun BA über A hinaus bis zum Schnittpunkte F mit einer Parallelen durch O zu DB, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken ABC und AFO

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{r}.$$

Es ergiebt sich also die Gleichung

$$u = OF \,.\, \omega,$$

welche analog der auf p. 102 gefundenen Formel ist. Es giebt zwei Totlagen bei der Bewegung, wenn B sich in den Umkehrpunkten seiner Bahn befindet und die Mittellinie BA der Koppel durch die Axe O der Kurbel geht.

Watts Parallelogramm.

Zur Überführung der geradlinigen Bewegung des Kolbens in die kreisförmige Bewegung des Angriffspunktes am Balancier muss eine zweckmässige Verbindung hergestellt werden. Man benützt dazu das nach seinem Erfinder genannte Watt'sche Parallelogramm, welches eine Gelenkverbindung darstellt, durch welche eine praktisch genügend genaue Lösung des Problemes erzielt wird.

Hier soll nur eine kurze Beschreibung der Wirkungsweise des Parallelogrammes gegeben werden. Es sei OG die Mittellinie des Balanciers (Fig. 61), $GHKL$ ein gegliedertes Parallelogramm, dessen Seite GH mit dem Balancier verbunden ist, während die Kolbenstange bei L gekuppelt ist,

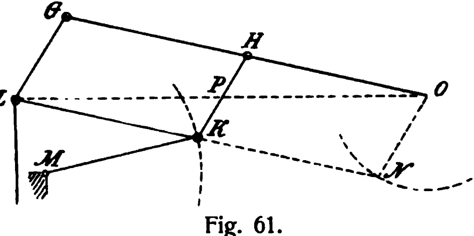


Fig. 61.

und die Bewegung von K vermittelst eines angekuppelten Stabes MK geregelt wird, für welchen M ein

fester Drehpunkt ist. Verlängert man LK über K hinaus und zieht durch O eine parallele ON zu den Parallelogrammseiten HK und GL, so bleibt auch $OGLN$ während der Bewegung ein Parallelogramm und N bewegt sich also in einem Kreise mit O als Mittelpunkt. Der Punkt K beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkte M, und KN behält eine unveränderliche Länge bei. Es gleitet somit die Strecke KN mit ihren Endpunkten längs zweier Kreise und hat eine ähnliche Bewegung wie die Koppelstange der Balanciermaschine. Jetzt lässt sich zeigen, dass ein passend gewählter Punkt L auf der Verlängerung der Strecke NK innerhalb gewisser Grenzen eine von einer geradlinigen sehr wenig abweichende Bewegung besitzt. W a t t ermittelte durch Versuche die beste Anordnung des Parallelogrammes. Es müssen dabei: der Punkt H die Strecke OG halbiren, die Parallelogrammseiten GL und HK möglichst lang und der Punkt M zweckmässig gewählt sein. Dieselben Resultate lassen sich auch theoretisch finden. Eine Gerade OL hat mit der Parallelogrammseite HK den Schnittpunkt P, wobei das Verhältnis

$$\frac{OP}{OL} = \frac{OH}{OG}$$

unveränderlich ist. Der Punkt P beschreibt also eine der Bahncurve des Punktes L ähnliche Curve und könnte ebenso gut wie L als Ankuppelungspunkt der Kolbenstange benützt werden.

§ 25.

Sphärische Bewegung.

Die Bewegung eines Körpers, welcher einen festen Punkt besitzt, ist eine Drehung um diesen Punkt, wobei jeder Punkt des Körpers einen unveränderlichen Abstand von dem festen Punkte beibehält. Die einzelnen Punkte

bewegen sich dann in concentrischen Kugelflächen mit dem festen Punkte als Mittelpunkt. Die Bewegung wird eine sphärische Bewegung genannt. Alle Punkte eines Radius haben Bewegungen, in welchen die Wege, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen u. s. w. sich wie die Abstände der Punkte von dem gemeinsamen Mittelpunkte verhalten. Die Bewegung jedes Radius wird also durch die Bewegung eines einzigen Punktes bestimmt; daraus folgt, dass die Bewegung des Körpers durch die Verschiebung einer sphärischen Figur in ihrer Kugelfläche hervorgebracht werden kann. Die Bewegung dieser sphärischen Figur ist bekannt, wenn die Bewegungen zweier Punkte derselben gegeben sind. Es seien A und B die beiden Punkte (Fig. 62). Ein dritter Punkt C bildet mit ihnen die Ecken eines unveränderlichen sphärischen Dreieckes, dessen Seiten die grössten Kreisbogen durch je zwei Punkte sind. Nimmt AB jetzt eine neue Lage $A'B'$ ein, so wird die neue Lage C' des Punktes C eindeutig bestimmt. In dieser Beziehung besteht eine völlige Analogie zwischen der ebenen und der sphärischen Bewegung. Ebenso folgt, dass die sphärische Bewegung durch drei von einander unabhängige Functionen der Zeit bestimmt wird.

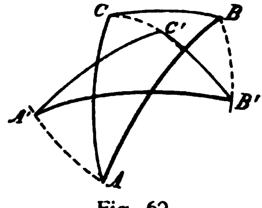


Fig. 62.

Dem auf p. 90 gefundenen Satze der ebenen Bewegung entspricht hier der Satz: *Eine sphärische Figur kann aus einer Lage in eine andere Lage durch eine Drehung um eine Axe übergeführt werden, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht.*

Die eine Lage der sphärischen Figur werde durch den grössten Kreisbogen AB, die andere Lage durch denselben Bogen $A'B'$ bestimmt (Fig. 63). Verbindet man A und A' sowie B und B' durch Bogen grösster Kreise und zieht durch die Mitten derselben andere zu

ihnen senkrechte Bogen grösster Kreise, so schneiden sich diese letzteren in einem Punkte C (und in dem diametral entgegengesetzten Punkte). Der Punkt C werde durch Bogen grösster Kreise mit den Punkten A, A', B und B' verbunden. Man zeige jetzt, dass der Radius

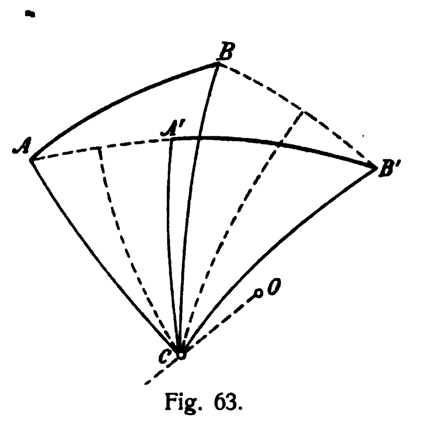


Fig. 63.

OC der Kugel die Axe einer Drehung ist, durch welche AB in $A'B'$ übergeführt wird, wobei $ACA' = BCB'$ der Drehungswinkel ist. Der Construction gemäss hat man nämlich

$$CA = CA' \text{ und } CB = CB'.$$

Da ferner $AB = A'B'$ ist, sind die sphärischen Dreiecke ACB und $A'CB'$ congruent. Also sind die Winkel ACB und $A'CB'$, welche einander entsprechen, gleich gross. Zieht man dann den Winkel $A'CB$ auf beiden Seiten ab, so ergiebt sich die Gleichheit der Winkel ACA' und BCB'; durch Drehung des Bogens AB um die Axe OC kommt also in der That AB nach $A'B'$.

Augenblickliche Drehaxe.

Die wirkliche Bewegung, durch welche die sphärische Figur aus einer Lage in eine andere übergeht, ist im allgemeinen nicht mit der Drehung um OC identisch. Nimmt man aber zwei unendlich benachbarte Lagen an, so wird die elementare Bewegung, welche die Figur beim Übergang aus der einen Lage in die andere ausführt, mit einer Drehung um eine durch O gehende Axe identisch. In jedem Augenblicke ist deshalb die wirkliche Bewegung eine Drehung um eine durch O gehende Axe, welche augenblickliche Drehaxe oder momentane Rotationsaxe der sphärischen Bewegung

heisst. Die Bewegung im ganzen besteht in einer Folge elementarer Drehungen um verschiedene Momentanaxen.

Man findet den Punkt, in welchem eine augenblickliche Drehaxe die Fläche der Kugel trifft, wenn man die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte kennt, indem man in diesen Punkten Bogen grösster Kreise senkrecht zu den Richtungen der Geschwindigkeiten zieht und ihren Schnittpunkt aufsucht (Fig. 64). Die Lage der Axe bestimmt die Richtung der Geschwindigkeit jedes Punktes des Systemes, und die Grösse einer Geschwindigkeit bestimmt die Grösse der Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte.

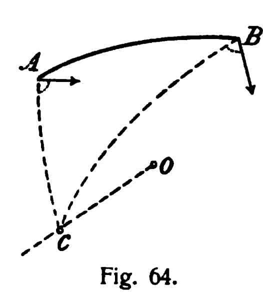


Fig. 64.

Rollen des beweglichen Kegels auf dem festen.

Die Momentanaxen für die auf einander folgenden Lagen des Systems bilden einen Kegel mit der Spitze O. Der Kegel schneidet aus der Kugelfläche eine sphärische Curve (C) aus. Der Kegel soll der feste Axenkegel (C) heissen. Ausser dem festen Axenkegel erhält man einen anderen, den sog. beweglichen Axenkegel (Γ). In jedem Augenblicke fällt eine durch O gehende Gerade des beweglichen Systems mit der Momentanaxe zusammen. Alle diese Geraden sind Erzeugende eines mit dem Körper verbundenen Kegels, des beweglichen Axenkegels, welcher an der Bewegung des Körpers teilnimmt. Der bewegliche Axenkegel schneidet auf der Kugel eine gewisse sphäriche Curve (Γ) aus. Für die sphärische Bewegung ergiebt sich dann, analog wie bei der ebenen Bewegung der Satz:

Jede sphärische Bewegung kann so entstanden gedacht werden, dass eine mit dem Systeme fest verbundene sphärische Curve (Γ) ohne zu gleiten auf einer anderen festen sphärischen Curve (C) rollt. Diejenige Gerade, welche den Mittelpunkt der Kugel mit dem Berührungspunkte beider Curven verbindet, ist die augenblickliche Drehaxe.

Die sphärische Bewegung eines Körpers wird dadurch bestimmt, dass ein mit dem Körper fest verbundener Kegel (Γ), dessen Spitze in dem Mittelpunkte der sphärischen Bewegung liegt, ohne zu gleiten auf einem im Raume festen Kegel (C) mit derselben Spitze rollt. Die gemeinsame Berührungslinie ist die augenblickliche Drehaxe.

§ 26.

Winkelgeschwindigkeiten beim Universalgelenk.

Ein interessantes Beispiel einer sphärischen Bewegung liefert das sog. Universalgelenk, welches von Cardano erfunden worden ist. Es bildet ein Mittel zur Übertragung einer Drehung von einer Welle auf eine andere Welle, deren Winkel mit der ersteren verändert werden kann. Das Universalgelenk besteht aus einem Axenkreuze *ABCD* (Fig. 65), welches aus zwei zu einander senkrechten Axen *AB* und *CD* gebildet ist;

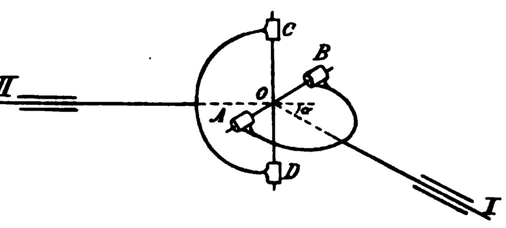


Fig. 65.

jede Axe wird von den gabelförmig ausgebildeten Enden einer der Drehaxen I und II gefasst. Die Mittellinien der beiden Drehaxen schneiden sich in dem Mittelpunkte *O* des Axenkreuzes und bilden mit einander den Winkel α. Bei der Drehung der Axen bleibt der Mittelpunkt *O* des Axenkreuzes fest im Raume; das Axenkreuz selbst hat also eine sphärische Bewegung um *O*. Dabei beschreiben die Punkte *A* und *B* sowie *C* und *D*, welche alle denselben Abstand von *O* haben, zwei grösste Kreise einer Kugel mit dem Mittelpunkte *O*, so dass *A* und *B* auf dem einen, *C* und *D* auf dem anderen Kreise sich

befinden (Fig. 66 a). Die Ebenen der beiden grössten Kreise bilden mit einander denselben Winkel α wie ihre Normalen. Man betrachte die beiden Punkte A und C des Axenkreuzes näher. Sie bleiben auf der Kugelfläche in dem unveränderlichen Abstande 90° von einander, und die Bewegung kann also dadurch definirt werden, dass ein Bogen AC von 90° Länge mit seinen Endpunkten längs zweier grösster Kreise gleitet, deren Ebenen den Winkel α mit einander bilden. Es mögen die Winkelgeschwindigkeiten bei der Drehung der Wellen I und II bez. mit ω_1 und ω_2 bezeichnet werden. Die Aufgabe ist, das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dieser Winkelgeschwindigkeiten zu berechnen.

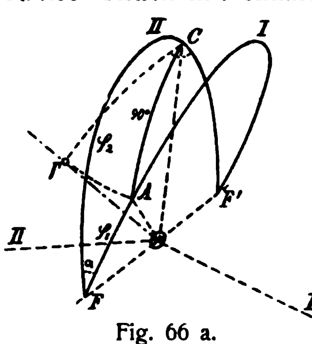


Fig. 66 a.

Das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte des Systemes sind bekannt, da die Geschwindigkeit u_1 des Punktes A die Richtung der Tangente des grössten Kreises I, die Geschwindigkeit u_2 des Punktes C die Richtung der Tangente des grössten Kreises II hat. Zieht man durch A einen grössten Kreis senkrecht zu I und durch C einen grössten Kreis senkrecht zu II, so erhält man einen Schnittpunkt Γ, und $O\Gamma$ ist die augenblickliche Drehaxe. Die Geschwindigkeiten der Punkte A und C verhalten sich wie ihre Abstände von der Drehaxe:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{CN_2}{AN_1},$$

wo N_1 und N_2 die Fusspunkte der von A und C aus auf die momentane Drehaxe gefällten Senkrechten sind. (Siehe Fig. 66 b, wo N_2 eingezeichnet ist). Aus der Figur 66 b folgt

$$CN_2 = OC \cdot \sin \Gamma OC = OC \cdot \sin \Gamma C.$$

Ebenso hat man

$$AN_1 = OA \,.\, \sin \Gamma OA = OC \,.\, \sin \Gamma A$$

und es ergiebt sich also

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sin \Gamma C}{\sin \Gamma A}.$$

Fig. 66 b.

Weil die linearen Geschwindigkeiten u_2 und u_1 der Drehungen der Wellen II und I Punkten angehören, deren Abstände von den Drehaxen gleich gross sind, so verhalten sie sich zu einander wie die Winkelgeschwindigkeiten, d. h. man erhält

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin \Gamma C}{\sin \Gamma A}.$$

Man transformire diesen Ausdruck weiter. Aus dem sphärischen Dreiecke $AC\Gamma$ (Fig. 66 a) folgt

$$\frac{\sin \Gamma C}{\sin \Gamma A} = \frac{\sin \Gamma AC}{\sin \Gamma CA}.$$

Setzt man

$$\Gamma AC = FAC - 90^\circ,$$
$$\Gamma CA = FCA + 90^\circ$$

ein, so bekommt man

$$\frac{\sin \Gamma AC}{\sin \Gamma CA} = -\frac{\cos FAC}{\cos FCA}$$

und

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\cos FAC}{\cos FCA}.$$

Aus dem sphärischen Dreiecke FAC, in welchem die Seite AC gleich 90° ist, erhält man nach der N e p e r'schen Regel oder nach dem Cosinussatze

$$\cos \alpha = - \cos FAC \,.\, \cos FCA.$$

Es ist also

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 FCA} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 FCA}.$$

Aus demselben sphärischen Dreiecke berechnet man noch

$$\sin FCA = \sin \alpha \,.\, \sin \varphi_1,$$

wo φ_1 der Bogen FA ist, und findet schliesslich für das gesuchte Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}. \tag{67}$$

Diese Formel zeigt, dass das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht nur von dem Winkel α zwischen den beiden rotirenden Wellen abhängt, sondern auch den veränderlichen Winkel φ_1 enthält, welcher die Lage des Axenkreuzes bestimmt. Dieses Verhältnis ändert sich also während der Bewegung, so dass wenn die Welle I z. B. eine gleichförmige Drehung besitzt, die Drehung der Welle II ungleichförmig ist. Die Übertragung der Bewegung vermittelst des Universalgelenkes ist also ungleichförmig. Es werde ein bestimmter, dem Winkel φ_1 entsprechender Wert des Verhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ mit k bezeichnet. Dabei ist

$$k = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}.$$

Diese Formel zeigt, dass sich derselbe Wert k bei einer Umdrehung für vier verschiedene Stellungen des Axenkreuzes ergiebt, nämlich für die Winkel

$$\varphi_1,\ 180^\circ - \varphi_1,\ 180^\circ + \varphi_1,\ 360^\circ - \varphi_1.$$

Vom Interesse sind die Grenzwerte des Verhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Der kleinste Wert ergiebt sich für $\varphi_1 = 0^\circ$ oder $\varphi_1 = 180^\circ$, d. h. wenn A mit F oder F' zusammen-

fällt und zugleich die Ebene des Axenkreuzes auf der Welle II senkrecht steht; man findet

$$\min \frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos \alpha.$$

Den grössten Wert

$$\max \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

erhält man für $\varphi_1 = 90^\circ$ und $\varphi_1 = 270^\circ$, wobei die Ebene des Axenkreuzes auf der Welle I senkrecht steht. Während der Bewegung ändert sich $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ periodisch mit einer halben Umdrehung als Periode zwischen den obigen Grenzwerten; es ist somit

$$\cos \alpha < \frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Je kleiner der Winkel α zwischen den beiden Wellen ist, desto weniger weichen die beiden Grenzwerte von 1 und von einander ab. Eine gleichförmige Drehung der einen Axe wird dann in eine nahezu gleichförmige Drehung der anderen Axe übergeführt. Mit $\alpha = 0$ erhält man $\omega_2 = \omega_1$, d. h. die Drehung wird unverändert von der einen Welle auf die andere übertragen, gerade so als ob sie eine einzige Welle bilden würden. Als Mass der Gleichförmigkeit der Übertragung der Drehung bei einem beliebigen Werte von α wird der sog. Ungleichförmigkeitsgrad δ eingeführt, worunter die Grösse

Ungleichförmigkeitsgrad.

$$\delta = \max \frac{\omega_2}{\omega_1} - \min \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \tag{68}$$

verstanden wird. Der Ungleichförmigkeitsgrad nimmt mit wachsendem Werte von α zu.

Mit $\alpha = 90^\circ$ ergiebt die Formel (67)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,$$

d. h. eine Übertragung der Bewegung von der einen Welle nach der anderen ist nicht mehr möglich. Dies trifft praktisch genommen schon bei einem bedeutend kleineren Werte von α als 90° zu, weil die Enden der Gabelarme gegen einander stossen.

Um einen grösseren Winkel zwischen den beiden Wellen zu erreichen, macht man von zwei Universalgelenken Gebrauch und schaltet zwischen ihnen eine kurze dritte Welle ein (Fig. 67). Sind die Wellen so gestellt, dass die mittlere Welle mit den beiden anderen denselben Winkel β einschliesst, so ist die Bewegungsübertragung auf Grund der Symmetrie gleichförmig.

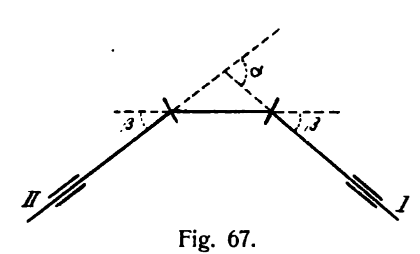


Fig. 67.

Die Bestimmung der beiden Axenkegel wird hier weggelassen. Es mag nur erwähnt werden, dass der feste Axenkegel ein Kegel vom zweiten Grade, der bewegliche Axenkegel ein Kegel vom vierten Grade ist.

§ 27.

Allgemeine Bewegung eines unveränderlichen Punktsystemes.

Nach den im vorigen angestellten Untersuchungen über besondere Bewegungen eines unveränderlichen geometrischen Punktsystems oder eines unveränderlichen geometrischen Körpers soll jetzt die allgemeinste Bewegung eines derartigen, vollkommen freien Systemes betrachtet

werden. Nach § 18 wird die Bewegung eines unveränderlichen Punktsystemes oder Körpers durch die Bewegungen dreier seiner Punkte bestimmt, welche nicht in einer Geraden liegen. Es soll bewiesen werden, dass ***ein Körper aus einer Lage in eine beliebige andere Lage durch eine Translation in der Richtung einer Geraden in Verbindung mit einer Drehung um eine bestimmte Axe übergeführt werden kann.***

Es seien A, B und C in der Figur 68 drei Punkte des Körpers in einer beliebigen Lage desselben, A', B' und C' dieselben Punkte in einer zweiten Lage. Dem Körper werde zunächst eine durch die Strecke AA' definirte Translation mitgeteilt, so dass der Punkt A nach A' übergeht. Dabei kommt B nach B'' und C nach C''. Den beiden Lagen $A'B''C''$ und $A'B'C'$ ist der Punkt A' gemeinsam, und der Körper kann folglich aus der ersten in die zweite Lage durch eine sphärische Bewegung mit A' als Mittelpunkt gebracht werden. Nach § 25 kann diese sphärische Bewegung als eine Drehung um eine bestimmte durch A' gehende Axe betrachtet werden. Hiermit ist gezeigt, dass der geometrische Körper aus einer Lage in eine andere durch eine geradlinige Translation und eine Drehung übergeführt werden kann.

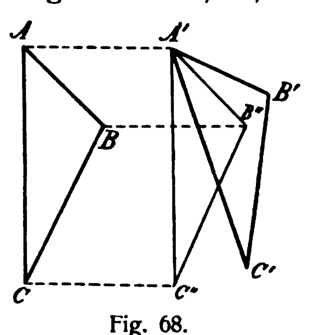


Fig. 68.

Statt, wie es jetzt geschehen, zuerst A nach A' zu bringen, könnte man auch B nach B', oder C nach C' oder überhaupt einen beliebigen Punkt des Körpers aus seiner früheren in seine spätere Lage überführen.[1]

[1] Die Grösse und Richtung der Translation verändert sich hierbei, ebenso die Lage der Drehaxe. Doch bleiben die Richtung der Drehaxe und die Grösse des Drehungswinkels unverändert. Beim Beweise

Der Übergang des Körpers aus einer Lage in eine andere vermittelst einer Translation und einer Drehung ist somit auf unendlich viele Arten möglich.

Eine specielle Art der Überführung ist besonders bemerkenswert, und zwar diejenige, bei welcher die Richtung der Translation der Axe der Drehung parallel ist. Dass eine solche Überführung möglich ist, findet man folgendermassen: Der Körper sei durch die geradlinige Translation AA' und eine Drehung um die Axe $A'C$ aus der einen in die andere Lage übergegangen (Fig. 69). Die Lage des Körpers sei durch eine mit ihm fest verbundene ebene Figur F bestimmt, welche in einer zu der Axe $A'C$ senkrechten Ebene gewählt wird. Bei der Parallelverschiebung geht F in die Lage F_1 und durch die Drehung F_1 in F' über, wobei zugleich F_1 in seiner Ebene bleibt. Nun kann aber F auch so nach F' übergeführt werden, dass man die Figur F zuerst translatorisch in die Richtung der Axe $A'C$ verschiebt, bis sie in die Lage F_2 kommt, welche in der Ebene von F_1 und F' liegt, und dann vermittelst einer ebenen Bewegung F_2 nach F' überführt. Als ebene Bewegung kann gemäss § 22 eine Drehung um eine gewisse, zur Ebene der Figur senkrechte Axe BD gewählt werden. Es sind FF_2, BD und $A'C$ einander parallel. Man erkennt also, dass ***die Überführung des Körpers aus einer Lage in eine andere vermittelst einer geradlinigen Translation und einer Drehung um eine der Translationsrichtung parallele Drehaxe möglich ist.***

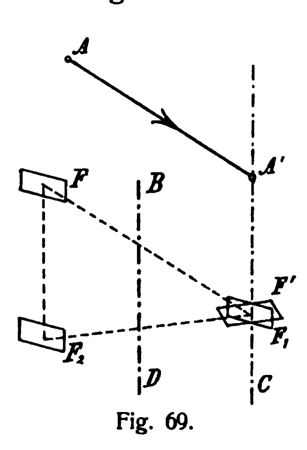


Fig. 69.

wendet man den in einfacher Weise abzuleitenden Satz an, dass zwei gleich grosse, aber entgegengesetzte Drehungen um parallele Axen zusammen eine Translation ergeben.

Die translatorische und die rotirende Bewegung können gleichzeitig stattfinden. Der Körper erhält dann eine Schraubenbewegung welche, wenn man es wünscht, auch als eine gleichförmige gewählt werden kann. Es ergiebt sich also der Satz:

Schraubenbewegung.

Ein Körper kann aus einer Lage in eine beliebige andere Lage vermittelst einer gleichförmigen Schraubenbewegung übergeführt werden.

Die wirkliche Bewegung fällt im allgemeinen nicht mit dieser Schraubenbewegung zusammen; dagegen kann eine elementare Bewegung des Körpers aus einer Lage nach einer anderen unendlich benachbarten Lage als eine Schraubenbewegung aufgefasst werden. Die Axe, Winkel- und Gleitgeschwindigkeit der Schraubenbewegung verändern sich von einem Augenblicke zu einem anderen; die allgemeinste Bewegung des Körpers ist als eine Folge von elementaren Schraubenbewegungen anzusehen.

Augenblickliche Schraubenaxe.

Zur Bestimmung der augenblicklichen Schraubenaxe genügt die Kenntnis der Geschwindigkeiten von drei Punkten A, B und C des Körpers (Fig. 70). Nach einem auf p. 89 gefundenen Satze sind die Projectionen der Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte des Systemes auf die Schraubenaxe gleich gross und gleich der Gleitgeschwindigkeit. Trägt man

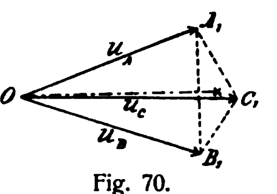


Fig. 70.

also von einem beliebigen Punkte O aus die Geschwindigkeiten u_A, u_B und u_C der Punkte A, B und C ab und legt eine Ebene durch ihre Endpunkte A_1, B_1 und C_1, so ist die Normale aus O auf diese Ebene parallel der gesuchten Schraubenaxe und ihre Länge die Gleitgeschwindigkeit. Die Lage der Schraubenaxe findet man, indem man die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte wie z. B. A und B in die Gleitgeschwindigkeit g und die Drehungsgeschwindigkeit $r\omega$ zerlegt und durch die Punkte Normalebenen zu den Componenten $r\omega$ legt.

Ihre Schnittlinie ist dann die Schraubenaxe. Auch die Winkelgeschwindigkeit ω erhält man dann, indem man eine bekannte Geschwindigkeitscomponente $r\omega$ durch den jetzt ebenfalls bekannten Abstand r von der Schraubenaxe dividirt.

Die verschiedenen Lagen der augenblicklichen Schraubenaxe bei der Bewegung des Körpers bilden eine Regelfläche im Raume. In jedem Augenblicke fällt eine dem Körper angehörende Gerade mit der augenblicklichen Drehaxe zusammen. Alle diese Geraden bilden eine zweite, mit dem Körper fest verbundene Regelfläche. Man sieht jetzt ohne Schwierigkeit ein, dass die ganze Bewegung folgendermassen erklärt werden kann:

Die allgemeinste Bewegung eines Körpers kann dadurch hervorgebracht werden, dass eine mit dem Körper fest verbundene Regelfläche auf einer im Raume festen Regelfläche rollt, so dass die beiden Flächen sich längs einer geradlinigen Erzeugenden berühren, und zugleich in der Richtung dieser Erzeugenden gleitet. Die gemeinschaftliche Berührungsgerade beider Flächen ist die momentane Schraubenaxe.

§ 28.

Übungsaufgaben zur Lehre von der Bewegung des geometrischen Punktsystemes.

1) Man berechne mit Anwendung des Wertes (Anw. 1, p. 86).

$$\omega = 0.00007292 \, \frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec.}}$$

der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung die Geschwindigkeit und die Centripetalbeschleunigung eines Punktes am Äquator, wenn der Erdradius gleich 6371000 m angenommen wird.

2) Man berechne dieselben Grössen wie im Beispiele 1) für einen Punkt auf der Polhöhe von Zürich 47° 22′ 40″, indem die Erde als eine Kugel mit dem obigen Radius betrachtet wird.

3) Eine Schraube mit 50 mm Durchmesser des Schraubenbolzens und 5 mm Ganghöhe ist mit einem Hebelarme von 0.9 m Länge versehen. Sie dreht sich gleichförmig und macht 5 Umläufe in der Minute. Zu berechnen die Gleit- und Winkelgeschwindigkeit der Schraubenbewegung sowie die Richtung und Grösse der Geschwindigkeiten eines Punktes des Gewindeumfanges und des Endpunktes des Hebelarmes.

4) Ein Stab AB, welcher einem Gelenkvierecke mit einer festen horizontalen Seite CD angehört (Fig. 71), hat eine ebene Bewegung. Man suche einen Punkt des Stabes auf, dessen Geschwindigkeit eine gegebene Richtung hat, speciell einen Punkt mit horizontaler Geschwindigkeit.

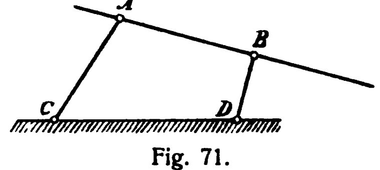


Fig. 71.

5) Eine Gerade hat eine ebene Bewegung. Man bestimme die Curve, welche die Enveloppe der Geschwindigkeiten der Punkte der Geraden ist.

6) Eine geradlinige Strecke AB gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei zu einander senkrechten Geraden (Beispiel 1, § 24). Die Bahncurve eines beliebigen Systempunktes in Bezug auf die beiden Geraden als Coordinatenaxen soll analytisch bestimmt werden.

7) Bei der Bewegung der Strecke AB im Beispiele 6) sind die verschiedenen Lagen von AB Tangenten einer Curve, und zwar ist der Berührungspunkt der Fusspunkt der Senkrechten, welche von dem augenblicklichen Drehpunkte auf AB gefällt wird. Man construire die Curve und stelle ihre Gleichung auf.

8) Die Kurbel OA (Fig. 59) des Beispieles 2, § 24 dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Man construire eine Curve so, dass die Geschwindigkeit des Endpunktes B der Schubstange von B aus senkrecht zu OB abgetragen wird.

9) Man berechne die Winkelgeschwindigkeit der Schubstange in der Drehung um den augenblicklichen Drehpunkt.

10) Man bestimme graphisch die Polcurven für die Bewegung der Schubstange.

11) Für die Schubstange im Beispiele 2, § 24 hat man $a > r$. Es ist $a = r$ ein Grenzfall, für welchen analytisch und graphisch diejenige Curve aufgesucht werden soll, welche von dem Halbirungspunkte der Schubstange AB beschrieben wird.

12) Ein ebenes System bewegt sich so, dass eine Gerade desselben einen festen Kreis berührt und ein Punkt dieser Geraden längs einer festen Tangente des Kreises sich bewegt. Man beweise, dass die

Polcurven zwei congruente Parabeln sind. Welche Curve beschreibt der Scheitel der rollenden Parabel?

13) Man berechne das Verhältniss $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ zwischen den Winkelgeschwindigkeiten am Universalgelenke auf Grund der Relationen

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

und der aus dem Dreiecke FAC in der Figur 66 a erhaltenen Relation

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\alpha = 0.$$

14) Man untersuche, für welche Werte von φ_1 die beiden mit einem Universalgelenke verbundenen Axen mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich drehen.

15) Man berechne den Ungleichförmigkeitsgrad am Universalgelenke für $\alpha = 0°, 10°, 20° \ldots 60°$.

16) Zu bestimmen die beiden Axenkegel der sphärischen Bewegung am Universalgelenke. Welchen Wert hat die Winkelgeschwindigkeit in der Drehung um die augenblickliche Axe?

17) Zu beweisen, dass eine Gerade AB des Raumes durch eine Drehung aus der Lage AB in eine beliebige Lage $A'B'$ übergeführt werden kann. Die Axe der Drehung ist die Schnittlinie von zwei Ebenen, welche senkrecht auf den Strecken AA' und BB' in ihren Halbirungspunkten stehen.

18) Zu beweisen, dass die Componenten der Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden, welche eine allgemeine Bewegung im Raume besitzt, in der Richtung der Geraden selbst gleich gross sind.

19) Man suche die Geschwindigkeit eines Punktes D, welcher vermittelst dreier Stäbe AD, BD und CD mit den Punkten A, B und C verbunden ist, wenn die Geschwindigkeiten dieser drei Punkte gegeben sind.

Dritter Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines unveränderlichen geometrischen Punktsystems. Relative Bewegung.

§ 29.

Zusammensetzung von Translationen; Zusammensetzung einer Drehung mit einer Translation.

Zusammensetzung und Zerlegung.

Ebenso wie ein geometrischer Punkt mehrere gleichzeitige Bewegungen besitzen kann, die man zu einer einzigen Bewegung zusammensetzt, oder eine Bewegung des Punktes in mehrere Bewegungen aufgelöst werden kann, sind auch mehrere gleichzeitige Bewegungen eines geometrischen Punktsystems oder eines geometrischen Körpers möglich, die zu einer einzigen Bewegung zusammengesetzt werden können. Umgekehrt lässt sich eine vorhandene Bewegung in mehrere Bewegungen zerlegen. Die zusammengesetzte Bewegung heisst *resultirende Bewegung;* diejenigen Bewegungen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, nennt man *Componentenbewegungen.* Bei der Zusammensetzung der Bewegungen des geometrischen Körpers bestimmt man diejenigen Bewegungen, welche jeder Punkt ausführt und setzt sie nach den für den geometrischen Punkt geltenden Gesetzen zusammen. Die Zerlegung ist die umgekehrte Operation.

Weil die Regeln für die Zerlegung ohne weiteres aus den Regeln für die Zusammensetzung folgen, werden sie im allgemeinen nicht in jedem Falle besonders angeführt werden.

Zwei oder mehrere Parallelbewegungen.

Ein Körper habe zwei gleichzeitige Parallelbewegungen. Durch die eine komme ein Punkt des Systems von A nach B, durch die andere von A nach C (Fig. 72). Ein anderer Punkt A' komme bei der ersten Translation nach B', bei der zweiten nach C'; dabei sind $A'B'$ und AB gleich gross und parallel, sowie $A'C'$ und AC gleich gross und parallel. Die zusammengesetzte Bewegung führt A nach dem Punkte D, der Gegenecke zu A in einem Parallelogramm, in welchem AB und AC zusammenstossende Seiten sind.

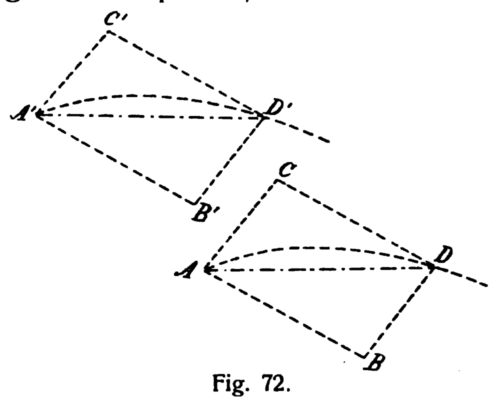


Fig. 72.

Ebenso geht A' in D' über, wobei D' die Gegenecke zu A' im Parallelogramme $A'B'C'D'$ ist. Die Parallelogramme sind congruent und ihre Seiten sind paarweise parallel. Somit ist auch $A'D'$ parallel und gleich gross mit AD. Das für A' in Bezug auf A gefundene gilt für einen beliebigen Punkt des Körpers, und hieraus folgt, dass die zusammengesetzte Bewegung wieder eine Parallelbewegung ist.

In derselben Weise zeigt man, dass die resultirende Bewegung mehrerer Parallelbewegungen wieder eine Parallelbewegung ist.

Die allen Punkten des Körpers gemeinsame Translationsgeschwindigkeit ergiebt sich bei zwei gleichzeitigen Parallelbewegungen durch Zusammensetzung vermittelst

des Parallelogrammgesetzes, bei drei oder mehr Bewegungen mit Hülfe des Parallelepiped-, bez. Polygongesetzes; auch kann man die resultirende Geschwindigkeit analytisch wie beim geometrischen Punkte erhalten (§ 13). Geometrisch wird die Translationsgeschwindigkeit durch eine Strecke von bestimmter Grösse und Richtung dargestellt, welche parallel sich selbst im Raume verschoben werden kann.

Drehung und Translation senkrecht zur Drehaxe.

Ein geometrischer Körper besitze gleichzeitig eine Drehbewegung und eine translatorische Bewegung mit einer zur Drehaxe senkrechten Geschwindigkeit. Es soll bewiesen werden, dass die resultirende Bewegung eine Drehung um eine der gegebenen Drehaxe parallele Axe und mit derselben Winkelgeschwindigkeit ist.

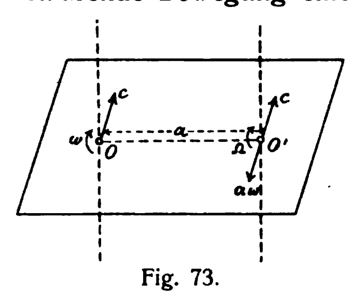


Fig. 73.

Um dies zu zeigen, schneidet man den Körper mit einer zur Drehaxe senkrechten Ebene (Fig. 73). Dabei erhält man eine ebene Figur, welche sich um eine Normale zu ihrer Ebene dreht und noch eine translatorische Bewegung in ihrer Ebene besitzt. Die resultirende Bewegung ist folglich eine ebene Bewegung, d. h. in jedem Augenblicke eine Drehung um eine zur Ebene senkrechte Axe. Um diese Axe zu finden, braucht man nur denjenigen Punkt O' der Ebene aufzusuchen, dessen resultirende Geschwindigkeit auf Grund der Rotation und der Translation gleich Null ist. Die Geschwindigkeit der Translation sei c, die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung ω und O der Schnittpunkt der Drehaxe mit der Ebene. In der Ebene werde von O aus eine zur Richtungslinie von c senkrechte Gerade gezogen. Ein Punkt O' dieser Geraden in dem Abstande a von O erhält durch die Drehung die zur Geraden senkrechte Geschwindigkeit $a\omega$. Wählt man den

Punkt O' zugleich auf derjenigen Seite von O, auf welcher die Richtungen von $a\omega$ und von c entgegengesetzt sind und nimmt a so an, dass $c = a\omega$ ist, d. h.

$$a = \frac{c}{\omega},$$

so ist O' der gesuchte Punkt mit der Geschwindigkeit Null.

Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit Ω bei der Drehung um die Axe durch O' beachte man, dass der Punkt O nur die auf seinen Radius $O'O$ senkrechte Geschwindigkeit c besitzt. Somit ist

$$c = a\,\Omega$$

und

$$\Omega = \frac{c}{a} = \omega. \tag{69}$$

Die Drehung um die neue Axe erfolgt in demselben Sinne wie um die ursprüngliche Axe; man erhält also den Satz:

Die aus einer Drehung und einer Translation senkrecht zur Axe der Drehung resultirende Bewegung ist eine Drehung in demselben Sinne wie die ursprüngliche und mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω um eine der ursprünglichen Axe parallele Axe. Die Ebene der beiden Axen ist senkrecht zur Richtung der Translationsgeschwindigkeit c, und der Abstand a der Axen ist gleich dem Quotienten $\frac{c}{\omega}$. Ausserdem ist zu beachten, dass die neue Axe auf derjenigen Seite der ursprünglichen Axe gelegen ist, auf welcher die Geschwindigkeiten eines Punktes infolge der Translation und der Drehung einander entgegengesetzt sind.

Umgekehrt kann eine gegebene Rotation in eine Rotation mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine der ersteren Axe parallele Axe und eine Parallelbewegung zerlegt werden, deren Richtung senkrecht zur Ebene der

beiden Axen ist. Die Geschwindigkeit der Parallelbewegung ist gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit der Drehung und dem Abstande beider Axen von einander, ihr Sinn ist derselbe wie derjenige der Geschwindigkeit eines Punktes der neuen Axe infolge der Drehung um die ursprüngliche Axe.

Drehung und Translation längs der Drehaxe.

In § 21 ist die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Translation in der Richtung der Drehaxe betrachtet worden. Die resultirende Bewegung ist eine Schraubenbewegung.

Drehung und beliebige Translation.

Es bleibt noch die Zusammensetzung einer Drehbewegung des geometrischen Körpers mit einer beliebigen Parallelbewegung übrig. Zu diesem Zwecke wird die Parallelbewegung in eine der Drehaxe parallele und eine zu ihr senkrechte Componente zerlegt. Die Drehung wird in der oben betrachteten Weise mit der letzteren Componente zusammengesetzt, wobei eine neue Drehung um eine der früheren Axe parallele Axe resultirt. Die erstere Translationscomponente giebt dann zusammen mit dieser Drehung eine Schraubenbewegung.

§ 30.

Zusammensetzung zweier Drehungen um parallele Axen.

Wenn ein Körper eine Drehung um eine Axe hat, welche einem Systeme angehört, das sich selbst um eine der ersteren Axe parallele Axe dreht, so setzt sich die resultirende Bewegung des Körpers aus zwei Drehungen um parallele Axen zusammen. Hierbei sind drei Fälle möglich, welche von einander unterschieden werden müssen.

Drehungen um parallele Axen in demselben Sinne.

a) D i e b e i d e n D r e h u n g e n e r f o l g e n u m p a r a l l e l e A x e n u n d i n d e m s e l b e n S i n n e. Um die resultirende Bewegung zu finden, betrachtet man eine mit dem Körper fest verbundene ebene Figur in

einer Normalebene zu den Drehaxen. Diese ebene Figur bleibt bei beiden Drehungen in ihrer Ebene, so dass also der Körper eine ebene Bewegung besitzt, welche in jedem Augenblicke eine Drehung um eine zur Ebene der Figur senkrechte und folglich den beiden Drehaxen parallele Axe ist. Zur Bestimmung der Lage dieser Axe sucht man denjenigen Punkt der Ebene auf, dessen resultirende Geschwindigkeit infolge der beiden Drehungen gleich Null ist.

Es seien O der gesuchte Punkt, Ω die gesuchte Winkelgeschwindigkeit, O_1 und O_2 die Schnittpunkte der gegebenen Drehaxen mit der Ebene, ω_1 und ω_2 die beiden Winkelgeschwindigkeiten (Fig. 74). Die beiden Drehungen erteilen einem auf der Verbindungslinie O_1O_2, zwischen O_1 und O_2 liegenden Punkte entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten. Benennt man die Abstände dieses Punktes von O_1 und O_2 a_1 und a_2, so ist die Geschwindigkeit infolge der Drehung ω_1 gleich $a_1\omega_1$ und die Geschwindigkeit infolge der Drehung ω_2 gleich $a_2\omega_2$. Die resultirende Geschwindigkeit wird somit gleich Null für

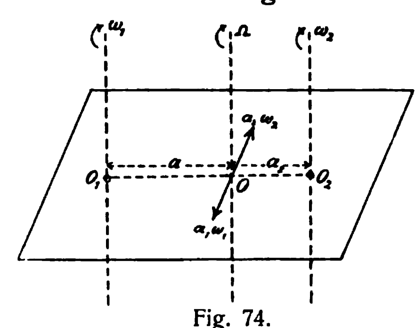


Fig. 74.

$$a_1\omega_1 = a_2\omega_2,$$

oder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{70}$$

d. h. O teilt den Abstand O_1O_2 im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten und liegt zwischen O_1 und O_2.

Die Winkelgeschwindigkeit Ω der resultirenden Drehung berechnet man aus der Geschwindigkeit eines zweck-

mässig gewählten Punktes, z. B. des Punktes O_2 (oder O_1). Die resultirende Drehung erteilt diesem Punkte die Geschwindigkeit $a_2\Omega$, die Drehungen ω_1 und ω_2 zusammen die Geschwindigkeit $(a_1 + a_2)\,\omega_1$. Also ist

$$a_2\Omega = (a_1 + a_2)\,\omega_1,$$

$$\Omega = \omega_1 + \frac{a_1}{a_2}\,\omega_1$$

und infolge (70)

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{71}$$

Die resultirende Bewegung zweier in demselben Sinne erfolgenden Drehungen um parallele Axen ist also eine Drehung in demselben Sinne um eine den gegebenen Axen parallele und zwischen ihnen liegende Axe, welche in ihrer Ebene liegt und ihren Abstand im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten teilt. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Summe der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten.

Drehungen in entgegengesetztem Sinne.

b) Die beiden Drehungen erfolgen um parallele Axen in entgegengesetztem Sinne; die beiden Winkelgeschwindigkeiten sind ungleich gross. Angenommen, dass ω_1 grösser als ω_2 sei. (Fig. 75). In derselben Weise wie in dem Falle a) erkennt man, dass die resultirende Bewegung eine Drehung um eine der gegebenen Axe parallele Axe ist. Diese Axe schneidet die Ebene in einem Punkte O auf der Verlängerung von O_1O_2 über O_1 hinaus. Dabei hat man mit den Bezeichnungen der Figur

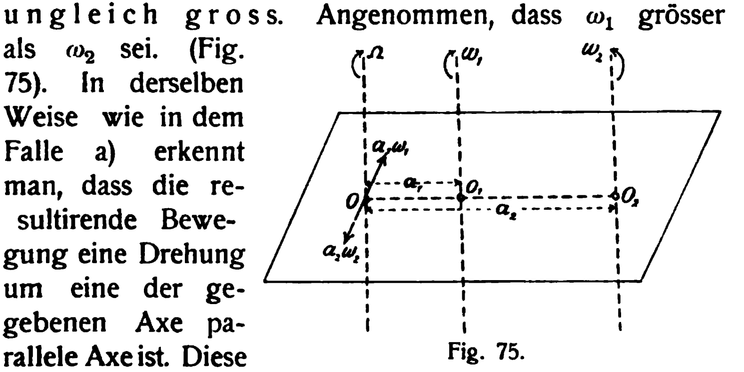


Fig. 75.

$$a_1\omega_1 = a_2\omega_2,$$

(72) $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Der Punkt O teilt den Abstand O_1O_2 im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten und liegt ausserhalb des von den beiden Axen eingeschlossenen Streifens. Wenn man die Geschwindigkeit z. B. des Punktes O_2 in Betracht zieht, so findet man für die resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω

$$a_2\,\Omega = (a_2 - a_1)\,\omega_1$$

$$\Omega = \omega_1 - \frac{a_1}{a_2}\,\omega_1$$

und gemäss der Gleichung (72)

(73) $$\Omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Somit: ***Zwei in entgegengesetztem Sinne erfolgende Drehungen um parallele Axen setzen sich zu einer einzigen Drehung um eine diesen Axen parallele Axe zusammen, welche in der Ebene der Axen liegt und den Abstand beider Axen von einander im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten teilt. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist gleich der Differenz zwischen den beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten, und die Drehung hat denselben Sinn wie die Componente mit der grösseren Winkelgeschwindigkeit.***

Drehpaar.

c) Die beiden Drehungen erfolgen in entgegengesetztem Sinne um parallele Axen und ihre Winkelgeschwindigkeiten sind gleich gross. Ein solches System wird ein Drehpaar oder Rotationspaar genannt. Ein Drehpaar erteilt dem Körper eine translatorische Bewegung. Bei dem Versuche wie im Falle b) zu verfahren, erhält man in der That eine resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω gleich Null und eine Axe, welche den Abstand

beider Axen in dem Verhältnisse 1 : 1 teilt, d. h. unendlich fern liegt. Die zusammengesetzte Bewegung, welche also eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit Null um eine unendlich ferne Axe ist, ist keine eigentliche Drehung mehr, sondern eine Parallelbewegung, wie man leicht erkennt, indem man die Geschwindigkeiten der Punkte O_1 und O_2 berechnet (Fig. 76). Dieselbe Geschwindigkeit wie O_1 haben alle Punkte der durch O_1 gehenden Drehaxe. Ebenso ist es mit O_2. Die beiden Geschwindigkeiten sind parallel und gleich $a\omega$, wo a der Abstand beider Axen und ω die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit beider Drehungen ist. Folglich ist $a\omega$ die resultirende Translationsgeschwindigkeit. Man erhält den Satz:

Fig. 76.

Die resultirende Bewegung zweier im entgegengesetzten Sinne erfolgenden Drehungen mit derselben Winkelgeschwindigkeit um parallele Axen ist eine Translation mit einer Geschwindigkeit, deren Richtung senkrecht zur Ebene der Drehaxen und deren Grösse gleich dem Producte der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit in den Abstand zwischen den Drehaxen ist. Der Abstand a heisst der Arm, das Product $a\omega$ das Moment des Drehpaares.

Umgekehrt kann eine Translation eines Körpers durch ein Drehpaar ersetzt werden. Zu diesem Zwecke wählt man zwei parallele Axen, welche senkrecht zur Translationsgeschwindigkeit sind, und eine solche Winkelgeschwindigkeit ω, dass das Moment des entstandenen Drehpaares gleich der Translationsgeschwindigkeit ist. Dabei ist noch zu beachten, dass die beiden Drehungen den richtigen Sinn bekommen, und zwar so, dass die Punkte der einen Drehaxe infolge der Drehung um die andere Axe Bewegungen in der Richtung der Translation annehmen.

Wenn die Axe der beiden gleich grossen Winkelgeschwindigkeiten sich mehr und mehr nähern, so nehmen das Moment des Drehpaares und die Geschwindigkeit der Translationsbewegung ab. Indem die beiden Axen schliesslich zusammenfallen, werden beide Grössen gleich Null. Natürlich müssen auch zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Drehungen eines Körpers um dieselbe Axe einander aufheben.

§ 31.

Zusammensetzung zweier Drehungen um Axen, welche sich schneiden.

Drehungen um Axen durch einen Punkt.

Wenn ein Körper zwei gleichzeitige Drehungen um die durch den Punkt O gehenden Axen OC_1 und OC_2 besitzt, so ist die resultirende Bewegung auch eine Drehung um eine Axe durch denselben Punkt O (Fig. 77). Denn O bleibt bei beiden Drehungen unbeweglich, somit auch bei der resultirenden Bewegung; diese ist also eine Drehung um eine Axe durch O. Zur Bestimmung der Lage der Drehaxe sucht man diejenigen Punkte in der durch die beiden gegebenen Axen geführten Ebene auf, welchen die beiden Drehungen gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten erteilen. Es seien ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um OC_1, ω_2 die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um OC_2, x_1 der Abstand eines Punktes A von OC_1 und x_2 der Abstand desselben Punktes von OC_2. Durch die Drehung ω_1 erhält A die Geschwindigkeit $x_1\omega_1$, durch die Drehung ω_2 die Geschwindigkeit $x_2\omega_2$. Die Axe OC muss so gewählt werden, dass

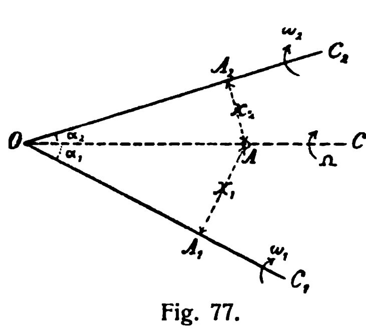


Fig. 77.

$$x_1 \, \omega_1 = x_2 \, \omega_2 \tag{74}$$

ist, was immer möglich ist. Diese Axe der resultirenden Drehung teilt den Winkel zwischen den beiden Drehaxen in die beiden Teile α_1 und α_2, wobei

$$x_1 = OA \,.\, \sin \alpha_1;\ x_2 = OA \,.\, \sin \alpha_2$$

ist. Mit Hinzuziehung der Gleichung (74) erhält man dann

$$(75) \qquad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ω der resultirenden Drehung zu erhalten, berechne man z. B. die Geschwindigkeit des auf der Axe OC_1 liegenden Punktes A (Fig. 78). Von A aus zieht man eine Senkrechte AB auf OC_2 und eine Senkrechte AD auf OC. Die Geschwindigkeit von A ist infolge der resultirenden Drehung Ω gleich $AD \,.\, \Omega$ und infolge der beiden Drehungen ω_1 und ω_2 gleich $AB \,.\, \omega_2$. Somit folgt

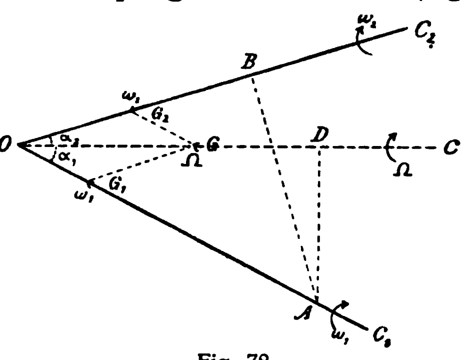


Fig. 78.

$$AD \,.\, \Omega = AB \,.\, \omega_2,$$

und mit Hülfe der Gleichungen

$$AB = OA \,.\, \sin (\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$AD = OA \sin \alpha_1$$

erhält man ferner

$$\Omega = \frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_1} \omega_2.$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (75) findet man noch die Analogien

$$(76) \qquad \omega_1 : \omega_2 : \Omega = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Rotationslinie. Eine einfache Behandlung der Drehungen und ihrer Zusammensetzung ergiebt sich durch eine geometrische

Darstellung mit Hülfe der sog. R o t a t i o n s l i n i e. Diese ist eine Strecke, der Länge nach gleich der in einem bestimmten Massstabe gemessenen Winkelgeschwindigkeit, welche auf der Drehaxe abgetragen wird und zwar in einem bestimmten Sinne, so dass daraus der Sinn der Drehung hervorgeht. Man trifft z. B. das Übereinkommen, dass die Rotationslinie so abzutragen ist, dass die Drehung von links nach rechts für eine Person zu erfolgen scheint, deren Längenaxe von den Füssen nach dem Kopfe dem Sinne nach mit der Rotationslinie übereinstimmt. So wäre z. B. die Rotationslinie für die Drehung der Uhrzeiger von der Uhrtafel nach vorne, die Rotationslinie für die Erddrehung vom Mittelpunkte gegen den Südpol u. s. w. abzutragen. Der Endpunkt der Rotationslinie wird gewöhnlich durch einen kleinen Halbkreis bezeichnet (Siehe Fig. 78).

Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten.

In der Figur 78 sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 auf den entsprechenden Drehaxen als Rotationslinien abgetragen. Die Gleichungen (76) zeigen dann unmittelbar, dass die resultirende Winkelgeschwindigkeit Ω die Diagonale eines Parallelogramms ist, in welchem ω_1 und ω_2 Seiten sind, wie OG_1GG_2 in der Figur 78. (Man vergleiche die Formel 24, § 13). Dieses Parallelogramm heisst das P a r a l l e l o g r a m m d e r W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t e n. Zugleich erkennt man, dass zwei Drehungen um Axen durch denselben Punkt mit Hülfe der Rotationslinien genau so wie Translationen eines Körpers, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen eines Punktes zusammengesetzt werden.

Dasselbe gilt für beliebig viele Drehungen um Axen durch denselben Punkt. Für drei Drehungen hat man auf diese Weise eine Parallelepipedregel, für eine beliebige Anzahl von Drehungen eine Polygonregel. Die resultirende Strecke wird immer als Rotationslinie einer Drehung um eine Axe durch den gemeinsamen Schnittpunkt der verschiedenen Axen aufgefasst. Durch die

Rotationslinie ist, wie früher gesagt, die Drehung in Bezug auf die Lage der Axe, die Grösse der Winkelgeschwindigkeit und den Drehsinn bestimmt. Analytisch wird die Zusammensetzung mit Hülfe ganz ähnlicher Formeln ausgeführt wie die in § 13 enthaltenen Formeln für Geschwindigkeiten. Nur muss überall die Geschwindigkeit u durch die Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt werden, und statt der Richtungswinkel einer Geschwindigkeit hat man die Richtungswinkel einer Rotationslinie zu setzen.

In allen den oben behandelten Fällen sind nur momentane Bewegungen, Translationen oder Drehungen, betrachtet worden, was darauf hinauskommt, den Geschwindigkeitszustand des Körpers in einem bestimmten Augenblicke zu erforschen. Ferner umfassen die betrachteten Fälle der Zusammensetzung der Bewegungen des geometrischen Körpers noch nicht alle, welche vorkommen können. Es lassen sich aber alle übrigen Fälle auf Grund des oben dargestellten behandeln; einige weitere Beispiele kommen unten in den Anwendungen vor.

§ 32.

Anwendungen der Regeln zur Zusammensetzung der Bewegungen.

1) Eine Drehung soll mit einer zur Axe der Drehung senkrechten Translation mit Anwendung der Resultate in § 30 zusammengesetzt werden (Fig. 79). Zu diesem Zwecke wird die translatorische Geschwindigkeit c durch ein Rotationspaar ersetzt, welches man so wählt, dass die eine Winkelgeschwindigkeit ω die gegebene Winkelgeschwindigkeit ω aufhebt, indem ihre Rotationslinie auf derselben Geraden liegt und den entgegengesetzten Sinn hat. Die andere, allein übrig bleibende

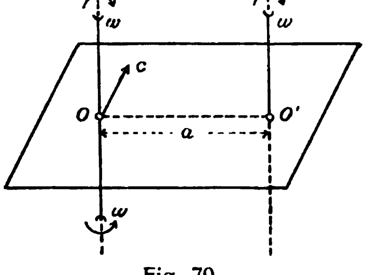


Fig. 79.

Winkelgeschwindigkeit ω ist gleich gross und von demselben Sinne mit der gegebenen, und ihre Axe liegt so, dass c senkrecht zur Ebene beider Axen ist, und der Abstand a beider Axen durch die Gleichung

$$a\omega = c$$

bestimmt wird. Man beachte noch, dass die neue Axe auf die richtige Seite fällt und bekommt so dasselbe Resultat wie in § 29.

2) Es sollen zwei Drehungen um parallele Axen mit einer zu diesen Axen senkrechten translatorischen Geschwindigkeit zu einer einzigen Drehung zusammengesetzt werden.

Nach § 30 könnten die beiden Drehungen zuerst zu einer einzigen Drehung vereinigt und diese mit der Translation zu der resultirenden Drehung zusammengesetzt werden. Nur wenn die beiden Drehungen im entgegengesetzten Sinne mit gleich grossen Winkelgeschwindigkeiten erfolgen, ist die resultirende Bewegung eine Translation. Es soll hier in dem allgemeinen Falle, dass eine Drehung entsteht, die Axe dieser Drehung direct bestimmt werden.

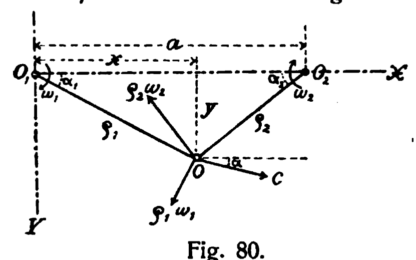


Fig. 80.

Mit den Bezeichnungen und dem Coordinatensysteme in der Figur (80) folgen für die Componenten u_x und u_y der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes O parallel den Coordinatenaxen

$$u_x = c \cos \alpha - \varrho_1 \omega_1 \sin \alpha_1 - \varrho_2 \omega_2 \sin \alpha_2,$$
$$u_y = c \sin \alpha + \varrho_1 \omega_1 \cos \alpha_1 - \varrho_2 \omega_2 \cos \alpha_2.$$

Mit Anwendung der Formeln

$$x = \varrho_1 \cos \alpha_1;\ y = \varrho_1 \sin \alpha_1,$$
$$a - x = \varrho_2 \cos \alpha_2;\ y = \varrho_2 \sin \alpha_2$$

erhält man ferner

$$u_x = c \cos \alpha - y\omega_1 - y\omega_2,$$
$$u_y = c \sin \alpha + x\omega_1 - (a - x)\,\omega_2.$$

Für den Fusspunkt der gesuchten Drehaxe ist

$$u_x = 0 \text{ und } u_y = 0$$

somit

$$c \cos \alpha - y(\omega_1 + \omega_2) = 0,$$
$$c \sin \alpha - a\omega_2 + x(\omega_1 + \omega_2) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{a\omega_2 - c \sin \alpha}{\omega_1 + \omega_2},$$

$$y = \frac{c \cos \alpha}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehung ist gleich der algebraischen Summe $\omega_1 + \omega_2$ der beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten.

3) Ein Körper dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um eine horizontale Axe, während diese Axe selbst mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 sich um eine verticale Axe dreht, welche die erstere Axe schneidet. Die resultirende Drehung werde bestimmt.

Die Drehungen werden durch zwei Rotationslinien, eine horizontale ω_1 und eine verticale ω_2 dargestellt (Fig. 81). Zusammen geben sie die Diagonale

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

eines Rechteckes, welche mit der Horizontalebene einen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

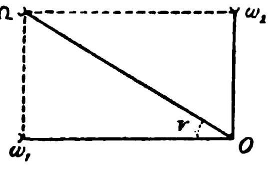


Fig. 81.

bestimmten Winkel einschliesst. Es bleiben Ω und ν unverändert, die Axe der resultirenden Drehung Ω dreht sich aber gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um die verticale Axe.

4) Man setze zwei Drehungen zusammen, deren Axen sich im Raume kreuzen.

Nach § 29 kann die eine Winkelgeschwindigkeit sich selbst parallel nach einer Axe verlegt werden, welche die andere Axe schneidet; hierbei entsteht eine durch diese Verschiebung genau bestimmte translatorische Geschwindigkeit. Die beiden Drehungen um die sich schneidenden Axen setzen sich nach § 31 zu einer einzigen Drehung zusammen. Die resultirende Drehung wird dann mit der erhaltenen Translation nach § 29 zu einer Schraubenbewegung vereinigt. Zwei Drehungen um sich kreuzende Axen geben somit zusammen eine Schraubenbewegung.

Um die resultirende Schraubenbewegung näher zu bestimmen, denkt man sich die beiden Rotationslinien ω_1 und ω_2 nach einem

Punkte O der gemeinsamen Normalen beider Drehaxen verschoben und sucht diesen Punkt O so zu wählen, dass die Resultirende Ω der beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 dieselbe Richtung wie die Resultirende u der beiden translatorischen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 erhält, welche bei der Verschiebung der Drehaxen entstehen (Fig. 82 und 83). Die Parallelogramme zur Zusammensetzung von ω_1 und ω_2 einerseits, c_1 und c_2 andererseits liegen in der Figur 83 in derselben Ebene, einer Parallelebene zu den Richtungen der beiden ursprünglichen Drehaxen. Mit den Bezeichnungen in den Figuren folgt

Fig. 82.

$$a = a_1 + a_2,$$

$$c_1 = a_1 \omega_1, \quad c_2 = a_2 \omega_2.$$

$$\Omega : \omega_1 : \omega_2 = \sin(\beta_1 + \beta_2) : \sin \beta_2 : \sin \beta_1,$$

$$u : c_1 : c_2 = \sin(\beta_1 + \beta_2) : \cos \beta_2 : \cos \beta_1.$$

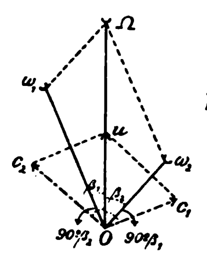


Fig. 83.

Man erhält hieraus

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 \omega_1}{a_2 \omega_2} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1},$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2 \cos \beta_2}{\omega_1 \cos \beta_1} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} = \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2},$$

eine Gleichung, welche die Lage der Axe der Winkelgeschwindigkeit Ω bestimmt. Ferner folgt

$$a : a_1 : a_2 = (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) : \operatorname{tg} \beta_1 : \operatorname{tg} \beta_2,$$

$$a : a_1 : a_2 = \sin(\beta_1 + \beta_2) : \sin \beta_1 \cos \beta_2 : \sin \beta_2 \cos \beta_1$$

und

$$u = a \omega_1 \sin \beta_1 = a \omega_2 \sin \beta_2.$$

Einen sehr symmetrischen Ausdruck für die resultirende translatorische Geschwindigkeit u erhält man in folgender Weise: Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$u^2 = a^2 \omega_1 \omega_2 \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

Setzt man hier

$$\sin \beta_1 = \frac{\omega_2}{\Omega} \sin(\beta_1 + \beta_2),$$

$$\sin \beta_2 = \frac{\omega_1}{\Omega} \sin(\beta_1 + \beta_2)$$

ein, so wird

$$u^2 = a^2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\Omega^2} \sin^2 (\beta_1 + \beta_2),$$

$$u = \frac{a\omega_1 \omega_2}{\Omega} \sin (\beta_1 + \beta_2).$$

Die gefundenen Resultate geben den Satz von Chasles: Die resultirende Bewegung aus zwei Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um Axen, welche sich kreuzen, ist eine Schraubenbewegung, deren Schraubenaxe den kürzesten Abstand zwischen den Axen für ω_1 und ω_2 senkrecht schneidet und mit diesen Axen zwei Winkel β_1 und β_2 einschliesst, deren Sinusse sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 verhalten, endlich den genannten kürzesten Abstand im Verhältnisse der Tangenten der Winkel β_1 und β_2 teilt. Die Winkelgeschwindigkeit Ω der Schraubenbewegung ist die Resultirende der nach einem Punkte verschobenen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2; die Gleitgeschwindigkeit u ist gleich dem Producte des kürzesten Abstandes a, der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 und des Sinus des Winkels $\beta_1 + \beta_2$ zwischen ihren Drehaxen, dividirt durch Ω.

§ 33.

Relative Bewegung eines Punktes.

Absolute und relative Bewegung.

Im vorhergehenden ist die Bewegung eines Punktes, eines Punktsystemes oder eines Körpers fast ohne Ausnahme auf ein Coordinatensystem oder auf andere Körper bezogen worden, welche selbst im Raume unbeweglich waren. Die Bewegung wird dann eine absolute Bewegung genannt; die bisher betrachteten Bewegungen waren also absolute Bewegungen. In der Wirklichkeit sind aber beim Studium der Natur keine unbeweglichen Systeme gefunden worden; alles was wir beobachten können, wie die Himmelskörper im Raume, die Erde, die Sonne u. s. w. befindet sich in Bewegung. Wirkliche absolute Bewegungen in dem obigen Sinne existiren also nicht, sondern alle Bewegungen sind relative Bewegungen, d. h. Bewegungen, welche auf Coordinatensysteme oder Körper bezogen werden, die selber in

Bewegung sind. In vielen Fällen ist jedoch die eigene Bewegung des Coordinatensystems von keiner Bedeutung für die Lösung des Bewegungsproblems und kann unbeachtet gelassen werden; in anderen Fällen ist das Problem nicht lösbar, ohne dass man die eigene Bewegung des Coordinatensystems in Betracht zieht. Der Unterschied zwischen absoluter und relativer Bewegung kann in folgender Weise ausgedrückt werden: ***Eine Bewegung wird absolut genannt, falls sie auf ein Coordinatensystem bezogen ist, welches selbst im Ruhezustande ist oder dessen Bewegung unbeachtet gelassen werden kann, relativ heisst die Bewegung dagegen, wenn das Coordinatensystem eine Bewegung besitzt, die auch in Betracht gezogen werden muss.***

Beispiele von relativer Bewegung fehlten nicht gänzlich im vorhergehenden. In § 12 Fig. 16 wurde die Bewegung eines Punktes M in einer ebenen Bahn durch die Parallelverschiebung der Geraden BC' und die Bewegung des Punktes M längs dieser Geraden entstanden gedacht. Die Bewegung des Punktes M längs BC' ist die relative Bewegung, seine Bewegung in der Curve die absolute Bewegung. Ferner ist BC' die relative Bahn, hier speciell geradlinig, die ebene Curve ist die absolute Bahn. Die relative Bahn hat eine translatorische Bewegung; wie vorher gezeigt wurde, entsteht die absolute Bewegung durch Zusammensetzung der relativen Bewegung und der Bewegung der relativen Bahnlinie.

Ein anderes Beispiel einer relativen Bewegung bietet eine Person dar, welche auf dem Deck eines Schiffes wandert oder in den Mast des Schiffes hinaufklettert, während das Schiff in Fahrt ist. Die relative Strecke ist der Richtung nach bez. horizontal oder vertical; zugleich ist das Schiff um ein gewisses Stück in seiner Längenrichtung fortgeschritten. Die absolute Bahnstrecke, d. h. die auf die stillstehende Wasserfläche bezogene Bahn wird

durch Zusammensetzen der beiden genannten Strecken erhalten.

Einteilung der Probleme über relative Bewegung.

Die Probleme betreffend die relative Bewegung eines Punktes sind hauptsächlich von zweierlei Art:

1) Man kennt die Bewegung eines Raumes und die Bewegung eines Punktes innerhalb dieses Raumes, d. h. die relative Bewegung; es wird verlangt die absolute Bewegung zu bestimmen.

2) Man kennt die absolute Bewegung und die Bewegung des Raumes, innerhalb welches die relative Bewegung erfolgt. Die relative Bewegung wird gesucht.

Beide Probleme werden mit Hülfe der Regeln für die Zusammensetzung der Bewegungen gelöst. Die beiden obigen Beispiele gehören dem Falle 1) an. Es sollen jetzt drei feste, auf einander senkrechte Coordinatenaxen *OX*, *OY* und *OZ* (Fig. 84) gewählt werden, auf welche die Bewegung eines Punktes bezogen wird. Der Punkt bewegt sich innerhalb

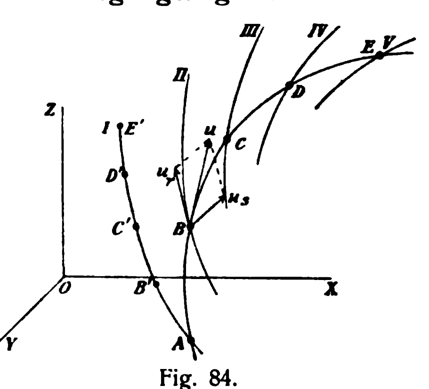


Fig. 84.

eines Raumes, welcher selbst eine Bewegung in Bezug auf die genannten Coordinatenaxen hat. Die erste Bewegung ist dann die relative Bewegung und die zweite die Bewegung der relativen Bahn. Es kann die Bewegung des Raumes und der relativen Bahn beispielsweise eine translatorische Bewegung, eine Drehung um eine feste Axe u. s. w. oder auch die allgemeine Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems sein (§ 27). In der Figur 84 sind I, II . . V eine Anzahl auf einander folgender Lagen der relativen Bahn, *A*, *B'*, *C'*, *D'* und *E'* die zu denselben Zeitpunkten gehörenden Lagen des

Punktes in seiner relativen Bahn, gezeichnet für die Lage I. Wenn die Bahn sammt dem Raume sich von der Lage I in die Lage II bewegt hat, hat der Punkt sich gleichzeitig in seiner Bahn von A nach B' bewegt; durch die Zusammensetzung beider Bewegungen entsteht die wirkliche Lage B in Bezug auf die festen Coordinatenaxen; wenn die Bahn und der Raum von II nach III sich bewegt haben, ist der Punkt um das Stück $B'C'$ in seiner Bahn weitergekommen, und die Lage in Bezug auf die festen Coordinatenaxen ist jetzt C u. s. w. Die Figur $ABCDE$ ist die absolute Bahn.

Geschwindigkeiten bei relativer Bewegung.

In gleicher Weise wie die Bewegungen zusammengesetzt werden, werden auch die Geschwindigkeiten behandelt. Der in Bewegung sich befindende Punkt hat in jedem Augenblicke zwei Geschwindigkeiten, von welchen die eine die Geschwindigkeit in der relativen Bahn, die sog. relative Geschwindigkeit ist, und die zweite Geschwindigkeit aus der Bewegung des Raumes (oder was dasselbe ist der relativen Bahn) entsteht. Diese zweite Geschwindigkeit ist identisch mit der Geschwindigkeit desjenigen Punktes des Raumes, welcher in dem gegebenen Augenblicke mit dem bewegten Punkte zusammenfällt und deshalb der zusammenfallende Systempunkt heisst. Durch Zusammensetzung der beiden, jetzt betrachteten Geschwindigkeiten entsteht die Geschwindigkeit in Bezug auf die festen Axen, die sog. absolute Geschwindigkeit; zu ihrer Bestimmung erhält man den Satz: *Die absolute Geschwindigkeit ist die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes.* (In der Figur 84 sind die drei Geschwindigkeiten bez. u, u_r und u_s für die Lage B eingezeichnet). Die absolute Geschwindigkeit u, welche durch ihre beiden Componenten u_r und u_s völlig bestimmt ist, hat die Richtung der Tangente der absoluten Bahn. Hieraus ergiebt sich ein in manchen Fällen bequemes Verfahren zur Con-

struktion der Tangenten von Curven; in § 15 wurde diese Methode als Roberval'sche Tangentenmethode erwähnt.

Beim Probleme 2) sind die absolute Bewegung und die Bewegung des sich bewegenden Raumes bekannt, man sucht die relative Bewegung innerhalb dieses Raumes. Da die absolute Bewegung die Resultirende der relativen Bewegung und der Bewegung der relativen Bahn ist, so ist ersichtlich, dass, wenn man diese zweite Bewegungscomponente durch Hinzufügung der dem Sinne nach entgegengesetzten Bewegung vernichtet, die relative Bewegung allein übrig bleibt. Die relative Bewegung ist somit die Resultirende aus der absoluten Bewegung und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Bewegung des Raumes. Diese letztere Bewegung heisst auch die scheinbare Bewegung der Umgebung. Für die Geschwindigkeiten ergiebt sich in derselben Weise der Satz: *Die relative Geschwindigkeit ist die Resultirende aus der absoluten Geschwindigkeit und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes.* So zeigt die Figur 85 u_r als Diagonale eines Parallelogrammes, in welchem u und (u_s), womit die entgegengesetzte Geschwindigkeit zu u_s bezeichnet werde, zusammenstossende Seiten sind.

Fig. 85.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass in dem speciellen Falle, in welchem die Bewegung des Raumes translatorisch ist, alle Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben und somit die Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes gleich der Translationsgeschwindigkeit ist.

Beschleunigungen bei relativer Bewegung.

Bei der Untersuchung der bei der relativen Bewegung eines Punktes auftretenden Beschleunigungen werde zuerst derjenige einfache Fall betrachtet, in welchem die Bewe-

gung des Raumes, innerhalb welches die relative Bewegung erfolgt, eine translatorische ist.

I:o Translatorische Bewegung des Raumes.

Zur Zeit t sei u die absolute und u_r die relative Geschwindigkeit des Punktes M, ferner u_s die Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes (Fig. 86). Nach dem Satze auf p. 140 ist u die Resultirende aus u_r und u_s d. h. die Diagonale eines Parallelogrammes mit den Seiten u_r und u_s. Zu einer folgenden Zeit $t + \triangle t$ sind dieselben Geschwindigkeiten in derselben Reihenfolge bez. $u + \triangle u$, $u_r + \triangle u_r$ und $u_s + \triangle u_s$. Der zusammenfallende Systempunkt ist zwar ein anderer; weil aber die Bewegung des Raumes translatorisch ist, so hat zur Zeit $t + \triangle t$ auch derjenige Punkt, welcher zur Zeit t zusammenfallender Systempunkt war, die Geschwindigkeit $u_s + \triangle u_s$. Es ist $u + \triangle u$ die Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten $u_r + \triangle u_r$ und $u_s + \triangle u_s$. Also kommen drei Beschleunigungen in Betracht und zwar die totale Beschleunigung der absoluten Bewegung, welche absolute Beschleunigung heisst und mit a bezeichnet werde, die totale Beschleunigung a_r der relativen Bewegung, welche relative Beschleunigung genannt wird, und die totale Beschleunigung a_s des zusammenfallenden Systempunktes, alles zur Zeit t. Nach p. 52 hat man für die Grösse dieser Beschleunigungen bez.

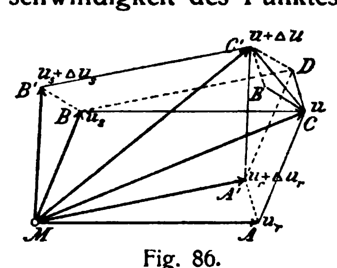


Fig. 86.

$$a = \lim \frac{CC'}{\triangle t},$$

$$a_r = \lim \frac{AA'}{\triangle t} = \lim \frac{CD}{\triangle t}$$

$$a_s = \lim \frac{BB'}{\Delta t} = \lim \frac{DC'}{\Delta t},$$

während ihre Richtungen die Grenzrichtungen von bez. CC', CD und DC' sind, wenn Δt sich der Grenze Null nähert. Es ist CC' die Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten CD und DC'; hieraus folgt, dass an der Grenze a die Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten a_r und a_s sein muss. Also besteht der Satz:

Bei relativer Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen Raum, dessen eigene Bewegung translatorisch ist, ist die absolute Beschleunigung die Resultirende aus der relativen Beschleunigung und der Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes.

Wäre die Bewegung des Raumes nicht nur translatorisch, sondern noch geradlinig und gleichförmig, so hätte man $a_s = 0$, und die relative Beschleunigung würde identisch mit der absoluten Beschleunigung sein.

2:o Allgemeine Bewegung des Raumes.

Wenn die Bewegung des Raumes nicht translatorisch, sondern ganz allgemeiner Natur ist, so kommt zu den jetzt betrachteten Beschleunigungen noch eine vierte Beschleunigung hinzu, die sog. z u s a m m e n g e s e t z t e c e n t r i p e t a l e B e s c h l e u n i g u n g, welche mit a_c bezeichnet werde. Der Zusammenhang zwischen diesen vier Beschleunigungen ergiebt sich am einfachsten durch geometrische Betrachtungen und zwar in folgender Weise.

Zu einer Zeit t möge der betrachtete Punkt M die Lage M_1, zur Zeit $t + \Delta t$ die Lage M_2 einnehmen, wobei Δt sehr klein ist (Fig. 87). Die Bewegung von M_1 nach M_2 ist dann die

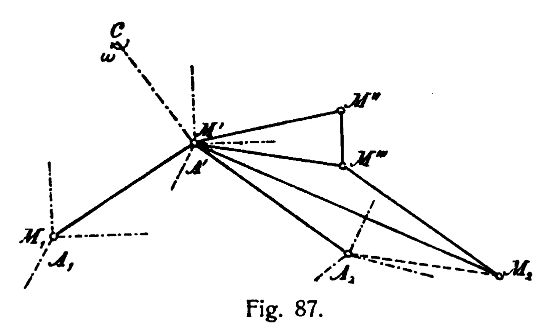


Fig. 87.

absolute Bewegung. Die Lage des beweglichen Raumes (oder des festen Körpers), auf welchen die relative Bewegung bezogen wird, soll zur Zeit t durch ein mit ihm fest verbundenes rechtwinkliges Coordinatensystem A mit dem Anfangspunkte in M_1 bestimmt werden. Zur Zeit $t + \triangle t$ nimmt das Axensystem A eine Lage A_2 ein, wobei die Axen nicht zu den entsprechenden Axen in der Lage A_1 parallel sind. Die absolute Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t sei u. Man kann sich dann die absolute Bewegung während der Zeit $\triangle t$ zusammengesetzt denken aus der gleichförmigen Bewegung längs der Tangente der absoluten Bahn um das Stück $u . \triangle t = M_1 M'$ und der Bewegung von M' nach M_2, welche durch die absolute Beschleunigung verursacht wird und mit der Geschwindigkeit Null anfängt. Diese letztere Bewegung soll in drei Bewegungen zerlegt werden. Die erste dieser Bewegungen ist die relative Bewegung in Bezug auf das Axensystem A', mit der relativen Ortsveränderung $M'M''$ während der Zeit $\triangle t$. Um die beiden anderen Bewegungen zu erhalten, wird der Übergang des Axensystems A von A_1 nach A_2 betrachtet. Dieser Übergang kann in folgende Bewegungen aufgelöst werden: 1) eine gleichförmige translatorische Bewegung von A_1 nach A', identisch mit der Bewegung des Punktes M von M_1 nach M', 2:o eine augenblickliche Drehung mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch M' gehende Axe $M'C$, wobei A' in eine, in der Figur nicht angegebene Lage A'' übergeht, und zwar so, dass die Axen ihren Endlagen in A_2 parallel sind. 3:o eine translatorische Bewegung, welche das Axensystem aus der Lage A'' in die Endlage A_2 überführt. Bei der Drehung des Axensystemes um den Winkel $\omega . \triangle t$ um die Axe $M'C$ geht der Punkt M aus der Lage M'' in die Lage M''' über, und nachher bei der Parallelbewegung des Axensystemes von M''' in die Endlage M_2, welche die relative Lage des Punktes in Bezug auf das System A_2 ist.

Folglich ist die Bewegung $M'M_2$ aus den drei Bewegungen $M'M''$, $M''M'''$ und $M'''M_2$ zusammengesetzt, also auch die absolute Beschleunigung a aus den drei Beschleunigungen, die zu diesen drei Bewegungen gehören. Die Beschleunigung bei der Bewegung $M'M''$ ist die relative Beschleunigung a_r. Die Beschleunigung bei der Bewegung $M''M'''$ ist die zusammengesetzte centripetale Beschleunigung a_c. Endlich ist die Beschleunigung bei der Bewegung $M'''M_2$ dieselbe wie in der Parallelbewegung des Raumes von A'' nach A_2 und somit die Beschleunigung a_s des zusammenfallenden Systempunktes, da die gesamte Bewegung des zusammenfallenden Systempunktes aus der gleichförmigen Bewegung M_1M' und einer mit der Translation $A''A_2$ identischen, die Beschleunigung enthaltenden Bewegung besteht. Somit folgt der Satz:

Die absolute Beschleunigung ist die Resultirende aus der relativen Beschleunigung, der Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes und der zusammengesetzten centripetalen Beschleunigung.

Satz von Coriolis.

Die absolute Beschleunigung a ist also die Diagonale eines Parallelepipeds, in welchem a_r, a_s und a_c Kanten sind (Fig. 88). Wenn man a_s und a_c im entgegengesetzten Sinne nimmt, so erhält man ein anderes Parallelepiped, in welchem a_r eine Diagonale, a, (a_s) und (a_c) Kanten sind. Man nennt (a_c) die zusammengesetzte centrifugale Beschleunigung. Für die relative Beschleunigung gilt also der folgende nach Coriolis benannte Satz:

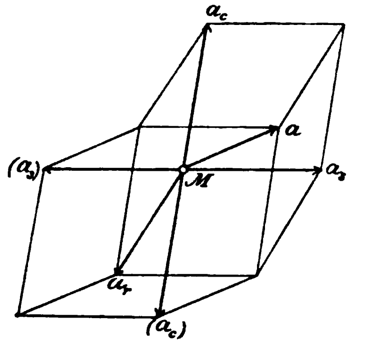


Fig. 88.

Die relative Beschleunigung ist die Resultirende aus der absoluten Beschleunigung, der im entgegengesetzten Sinne genommenen Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes und der zusammengesetzten centrifugalen Beschleunigung.

Zusammengesetzte centripetale Beschleunigung.

Endlich soll noch die zusammengesetzte centripetale Beschleunigung berechnet werden. In der Figur 87 ist der Weg $M'M''$ in der relativen Bewegung während der sehr kurzen Zeit $\triangle t$ gleich $u_r \,.\, \triangle t$, wo u_r die relative Geschwindigkeit bezeichnet. Die Projection von $M'M''$ auf eine zur Axe $M'C$ senkrechte Ebene hat den Wert $u_r \sin (\omega u_r) \,.\, \triangle t$, wo (ωu_r) der Winkel $CM'M''$ zwischen den Richtungen der relativen Geschwindigkeit und der Drehaxe für ω ist. Da der Bogen $M''M'''$ durch eine Drehung um den Winkel $\omega \,.\, \triangle t$ um die Axe $M'C$ entsteht, erhält man

$$M''M''' = \omega u_r \sin (\omega u_r) \,.\, (\triangle t)^2.$$

Zu einem anderen Ausdrucke für denselben Bogen, welcher auch als eine kurze geradlinige Strecke betrachtet werden kann, kommt man dadurch, dass man $M''M'''$ als den durch die Beschleunigung a_c ohne Anfangsgeschwindigkeit hervorgebrachten Weg während der Zeit $\triangle t$ betrachtet. Dass keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, folgt daraus, dass die relative Geschwindigkeit u_r bei der Bewegung $M'M''$ und die Geschwindigkeit u_s des zusammenfallenden Systempunktes bei der Bewegung $M'''M_2$ schon in Betracht gezogen sind. Während der kurzen Zeit $\triangle t$ kann a_c als constant angesehen werden, so dass man nach der Formel (12) für den Weg bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung den Ausdruck

$$M''M''' = \tfrac{1}{2}\, a_c\, (\triangle t)^2$$

findet. Durch Vergleichung der beiden Werte von $M''M'''$ folgt

$$a_c = 2\,\omega u_r \sin (\omega u_r), \tag{77}$$

d. h. *Die zusammengesetzte centripetale Beschleunigung ist gleich dem doppelten Producte aus der Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung des Raumes und der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine Ebene, welche senkrecht zur Axe dieser Drehung steht. Der Richtung nach ist sie senkrecht auf der Drehaxe und auf der relativen Geschwindigkeit.* Wie Fig. 87 zeigt, ist ihr Sinn derjenige, welcher dem Endpunkte der relativen Geschwindigkeit zukommt, wenn man sie von einem Punkte der momentanen Drehaxe aus abträgt und an dieser Drehung teilnehmen lässt.

Wie die Formel (77) zeigt, wird die zusammengesetzte centripetale Beschleunigung in drei Fällen gleich Null und zwar: 1:o wenn $\omega = 0$ ist; der Raum hat dann in dem betrachteten Augenblicke eine translatorische Bewegung, und der allgemeine Satz auf p. 145 ergiebt den specielleren auf p. 143 gefundenen Satz; 2:o wenn $u_r = 0$ ist; der Punkt befindet sich in diesem Falle wenigstens in dem betrachteten Augenblicke in relativer Ruhe; und 3:o wenn $\sin(\omega u_r) = 0$ ist, d. h. wenn die relative Geschwindigkeit parallel der augenblicklichen Drehaxe ist.

Anwendungen.

1) Man bestimme die Bewegung eines Punktes auf dem Umfange eines Rades, welches gleichförmig längs eines geraden horizontalen Weges rollt.

Dem Punkte kann eine doppelte Bewegung zugeschrieben werden und zwar die gleichförmig fortschreitende Bewegung der Radaxe und die gleichförmige Drehung um diese Axe. Die relative Bahn ist

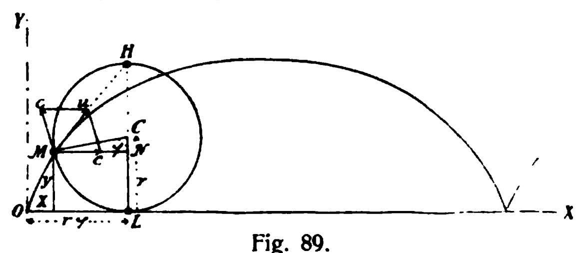


Fig. 89.

ein Kreis, der Radumfang; und die Bewegung der relativen Bahn ist translatorisch. Wenn das Rad rollt ohne zu gleiten, so werden gleichzeitig gleich grosse Wege in der relativen Bewegung und in der Bewegung der relativen Bahn zurückgelegt; die gemeinsame Geschwindigkeit in diesen beiden Bewegungen werde mit c, der Radius des Kreises mit r bezeichnet. In dem festen Coordinatensysteme werden eine horizontale x-Axe und zwar diejenige Gerade, längs welcher der Kreis rollt, und eine verticale y-Axe gewählt, so dass der Anfangspunkt in demjenigen Punkte O liegt, in welchem der Punkt des Radumfanges der Berührungspunkt des Kreises mit der x-Axe ist (Fig. 89). Es sei M eine Lage des Punktes, L der entsprechende Berührungspunkt auf der x-Axe und φ der Winkel zwischen den Kreisradien CL und CM. Dann sind OL und LM gleichzeitige und gleich grosse Wege in der Bewegung der relativen Bahn und in der relativen Bewegung, somit beide gleich $r\varphi$. Aus der Figur 89 folgen dann für die Coordinaten eines Punktes der absoluten Bahn

$$x = OL - MN = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = CL - CN = r(1 - \cos\varphi).$$

Diese Gleichungen stellen eine Cykloide dar. Aus der geometrischen Erzeugungsweise der absoluten Bahn geht auch unmittelbar hervor, dass diese eine Cykloide ist.

Man erhält die absolute Geschwindigkeit u des Punktes M und zugleich die Tangente der Cykloide, indem man die zwei gleich grossen Geschwindigkeiten c zusammensetzt, von welchen die eine parallel der x-Axe ist und die andere die Richtung der Tangente des Kreises hat. Das Parallelogramm ist also ein Rhombus, und die resultirende Geschwindigkeit u halbirt den Winkel bei M zwischen den beiden genannten Richtungen und geht folglich durch den höchsten Punkt H des Kreises. Durch Anwendung der Roberval'schen Tangentenmethode erhält man somit den Satz: Die Tangente einer Cykloide geht durch den höchsten Punkt des erzeugenden Kreises. Die Geschwindigkeit u hat die Grösse

$$u = 2c\sin\frac{\varphi}{2}$$

und liegt in dem Intervalle

$$0 \leqq u \leqq 2c,$$

wobei der Grenzwert 0 den Spitzen, der Grenzwert $2c$ den Scheiteln der Cykloide angehört.

2) Eine Gerade dreht sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um einen auf ihr liegenden Punkt O. Gleichzeitig bewegt

sich ein Punkt gleichförmig mit der Geschwindigkeit c längs der Geraden. Man berechne die absolute Bahn und die absolute Geschwindigkeit.

Die Lage der Geraden sei OX zur Zeit $t = 0$ (Fig. 90) und der Punkt möge sich dann in dem Drehmittelpunkte O befinden. Nach einer Zeit t hat sich die Gerade um den Winkel

$$\varphi = \omega t$$

gedreht, und der Punkt hat in seiner relativen Bewegung längs der Geraden das Stück

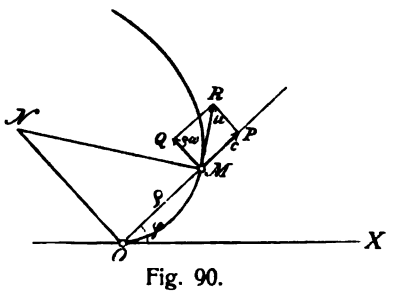


Fig. 90.

$$OM = \varrho = ct$$

beschrieben. Die Gleichung der absoluten Bahn in Polarcoordinaten erhält man durch Elimination von t zwischen diesen Gleichungen und zwar in der Form

$$\varrho = \frac{c}{\omega}\varphi.$$

Der Radiusvector ist also proportional dem Polarwinkel; die Curve ist eine Archimedische Spirale.

Die absolute Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes auf der Spirale hat zwei Componenten: die relative Geschwindigkeit $u_r = c$ längs der Geraden und die Geschwindigkeit $u_s = \varrho\omega = c\varphi$ des zusammenfallenden Systempunktes senkrecht zu der Geraden. Die Grösse der absoluten Geschwindigkeit ist

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_s^2} = c\sqrt{1 + \varphi^2}$$

und nimmt von dem kleinsten Werte c im Punkte O mit wachsender Zeit zu. Die absolute Geschwindigkeit hat die Richtung der Tangente der Spirale. Zieht man nun durch O die Normale ON auf den Radiusvector ϱ des Punktes M und durch M die Normale der Curve, so wird auf der ersteren das Stück ON, die sog. polare Subnormale der Spirale abgeschnitten. Aus den ähnlichen Dreiecken MON und RPM leitet man

$$ON = \frac{MP}{PR} OM = \frac{c}{\varrho\omega}\varrho = \frac{c}{\omega}$$

ab, und erkennt folglich, dass die polare Subnormale der Archimedischen Spirale constant ist. Auf dieser bekannten Eigen-

schaft beruht eine einfache Construction der Tangente der Spirale in einem beliebigen Punkte.

3) Das Schiff A befindet sich in einem gewissen Augenblicke 6 Seemeilen südlich vom Schiffe B (Fig. 91). A steuert Ost 1 Strich Nord, B gegen Südost. A macht 10 Knoten, B 14.5 Knoten Fahrt. Man bestimme die relative Bahn und Geschwindigkeit von B in Bezug auf A, die kürzeste gegenseitige Entfernung beider Schiffe und die Zeit, welche vergeht, bis diese kürzeste Entfernung erreicht wird. (1 Strich $= 11° 15'$; ein Knoten = 1 Seemeile = 1,8522 km; 1 Knoten Fahrt = 1 Seemeile in der Stunde).

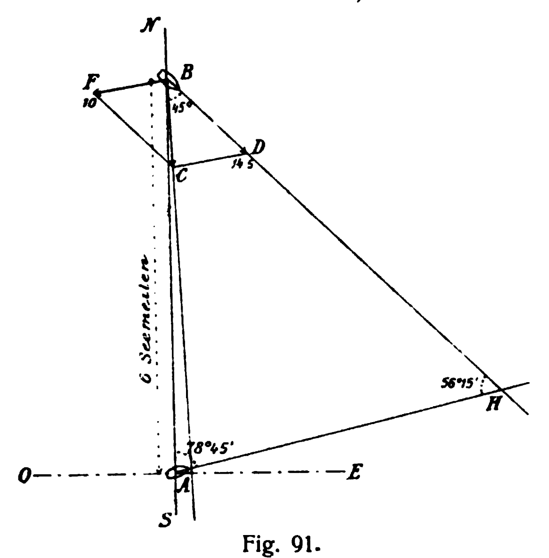


Fig. 91.

Die relative Bewegung ist gleichförmig und die relative Bahn geradlinig. Um sie zu construiren denkt man sich A als stillstehend und erteilt B ausser der wirklichen Bewegung die scheinbare oder entgegengesetzte Bewegung von A. Nach dem Parallelogrammgesetze ergiebt sich die Richtung BC; sie schneidet die Strecke AH. Die Berechnung ergiebt für die Abweichung der Linie BC von der Richtung NS $2° 5.3'$ (zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{4}$ Strich), für die relative Geschwindigkeit 12.21 Knoten, für die gesuchte kürzeste Entfernung 405 m und für die Zeit, welche verfliesst, bis sie erreicht wird, 29 Min. 27 Sec.

4) Zwei Stäbe AC und BC (Fig. 92) sind vermittelst eines Gelenkes bei C mit einander verbunden. Die Geschwindigkeiten von A und B sind gegeben, die Geschwindigkeit von C wird gesucht.

Dieses Problem, welches in § 22 auf zwei verschiedene Arten gelöst wurde, kann auch mit Hülfe des Satzes von der relativen Geschwindigkeit behandelt werden. Man sucht zuerst die relative Geschwindigkeit von C in Bezug auf B, d. h. in einem Raume, welcher die Geschwindigkeit u_B von B besitzt. Die Geschwindigkeit des Punktes

A in Bezug auf B ist die Resultirende aus der wirklichen Geschwindigkeit u_A von A und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit (u_B) von B; sie werde mit u_1 bezeichnet. Die relative Bewegung von AC in Bezug auf B ist eine ebene Bewegung, und zwar eine Drehung um einen augenblicklichen Drehpunkt Γ, welcher in dem Schnittpunkte der Normalen in A auf die relative Geschwindigkeit u_1 von A und der Verlängerung von BC liegt. Die relative Bewegung von BC ist eine Drehung um B und also BC senkrecht zu der relativen Geschwindigkeit u_2 von C. Wenn Γ und u_1 bekannt sind, kann u_2 construirt werden, und zwar so dass

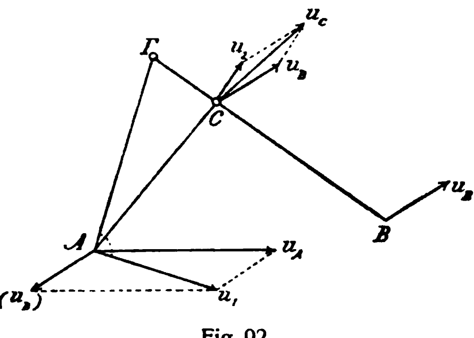


Fig 92.

$$u_2 : u_1 = \Gamma C : \Gamma A.$$

Schliesslich erhält man die gesuchte Geschwindigkeit u_c von C, indem man u_2 mit u_B zusammensetzt.

§ 34.

Übungsaufgaben zu der Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und zu der relativen Bewegung.

1) Auf einem Raddampfer machen die Triebräder 50 Umdrehungen in der Minute; dabei erreicht der Dampfer die Geschwindigkeit $7 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$. Man bestimme die zusammengesetzte Bewegung der Räder, wenn der Dampfer in stillstehendem Wasser, aufwärts oder abwärts auf einem Strome mit der Stromgeschwindigkeit $1.5 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ fährt.

2) Auf ein horizontales Schwungrad mit der Winkelgeschwindigkeit $10.5 \frac{\text{abs.} \wedge \text{Einh.}}{\text{Sec}}$ wird ein Kreisel gestellt, der 250 Umdrehungen in der Minute macht, und zwar in 0.5 m Entfernung von der Axe

des Schwungrades. Man bestimme die zusammengesetzte Bewegung des Kreisels, für Drehungen in demselben Sinne und im entgegengesetzten Sinne.

3) Ein geometrisches Punktsystem besitzt drei Drehungen um Axen, welche durch einen Punkt gehen und auf einander senkrecht stehen. Die Axe und die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehung werde bestimmt.

4) Zwei Drehungen um parallele Axen sollen mit einer beliebigen translatorischen Bewegung zusammengesetzt werden.

5) Man bestimme diejenige Schraubenbewegung, welche aus einer gegebenen Schraubenbewegung und einer Drehung resultirt, deren Axe die Axe der Schraubenbewegung senkrecht schneidet.

6) Zwei Schraubenbewegungen, deren Axen sich schneiden, sollen mit einander zusammengesetzt werden. Wann geht die Axe der resultirenden Schraubenbewegung durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Axen?

7) Eine Person rudert über einen Strom von einem Punkte auf dem einen Ufer nach dem gerade gegenüberliegenden Punkte auf dem anderen Ufer. In stillem Wasser wird die Geschwindigkeit u_1 erreicht; die Geschwindigkeit des Stromes ist u_2. In welcher Richtung muss das Boot gesteuert werden und welche Geschwindigkeit wird erreicht? Man nehme $u_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}, u_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$.

8) Mit welcher Geschwindigkeit muss das Schiff *B* in der Anw. 3 § 33 fahren um mit dem Schiffe *A* zu kollidieren, und wann geschieht der Zusammenstoss?

9) Eine Drehbrücke dreht sich gleichförmig um 90° in 2.5 Minuten. Man bestimme die absolute Bewegung einer Person, welche längs der Brücke mit der Geschwindigkeit $1.2 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ in der einen oder der entgegengesetzten Richtung geht.

10) Aus einem Luftballon wird ein Sandsack heruntergelassen[1]; man bestimme die relative Bewegung des Sandsackes in Bezug auf den Ballon, welcher gleichförmig mit der Geschwindigkeit *c* steigt. Nach *T* Secunden wird ein zweiter Sandsack heruntergelassen. Seine relative Bewegung in Bezug auf den ersten Sack wird gesucht.

11) Ein Punkt, welcher die Geschwindigkeit *c* hat, giebt in einem ebenen Spiegel einen Bildpunkt, dessen Geschwindigkeit in Bezug auf den Spiegel unter der Annahme gesucht wird, 1:o dass der Spiegel eine translatorische Bewegung besitzt und 2:o dass der Spiegel

[1] In Wirklichkeit werden die Sandsäcke ausser Bord geöffnet, so dass der Sand herausrinnt.

sich um eine zur Richtung der Geschwindigkeit c senkrechte Axe dreht.

12) Ein Schiff bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Man bestimme diejenige Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Visirlinie nach dem Schiffe in einem beliebigen Zeitpunkte dreht 1:o wenn das Schiff von einem festen Punkte aus betrachtet wird und 2:o wenn das Schiff von einem zweiten Schiffe aus betrachtet wird, welches sich ebenfalls geradlinig und gleichförmig bewegt. Die Anfangslagen u. s. w. werden als gegeben betrachtet.

13) Ein Punkt an der Erdoberfläche hat die Geschwindigkeitscomponenten u_x, u_y und u_z in einem rechtwinkligen Coordinatensystem mit der x-Axe nach Süden, der y-Axe nach Westen und der z-Axe nach dem Zenit. Man leite für die Componenten der zusammengesetzten centripetalen Beschleunigung in Bezug auf diese Axen die Ausdrücke bez. $2\,\omega \sin\varphi\, u_y$, $-\,2\,\omega\,(\cos\varphi\, u_z + \sin\varphi\, u_x)$, $2\,\omega \cos\varphi\, u_y$ ab, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung und φ die Polhöhe des Ortes bezeichnen.

14) Ein Raum dreht sich um eine feste Axe. Man suche die Componenten für die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung eines Punktes nach zwei zu einander und auch zu der Drehaxe senkrechten Coordinatenaxen, wenn die relative Geschwindigkeit des Punktes gegeben ist.

Zweiter Teil.

Mechanik des materiellen Punktes.

Vierter Abschnitt.

Grundbegriffe und allgemeine Lehrsätze.

§ 35.

Kräfte und Erfahrungssätze über Kräfte.

Die Sätze der geometrischen Bewegungslehre.

Bei der Behandlung der ersten Abteilung der Mechanik, der geometrischen Bewegungslehre, ist keine Anwendung von eigentlichen Erfahrungssätzen erforderlich gewesen. Die sich bewegenden Objekte wurden als rein geometrische Grössen betrachtet; Voraussetzungen über die Ursachen der Bewegung wurden nicht gemacht. Die Sätze der Geometrie und der geometrischen Bewegungslehre stehen deshalb in Bezug auf strenge Gültigkeit auf derselben Stufe.

Notwendigkeit von Erfahrungssätzen.

Die Sache ändert sich aber, wenn es sich um Anwendungen der Mechanik auf die Bewegungserscheinungen der materiellen Welt handelt. Dabei ist man gezwungen einige Principe zum Ausgangspunkte zu wählen, welche in der Erfahrung, d. h. in unserer Kenntnis der

Materie und der auf sie wirkenden Kräfte wurzeln. Diese Principe sehr allgemeiner Art, welche ebenso wie alle von uns aufgestellten Naturgesetze einen hypothetischen Charakter tragen, finden ihre Berechtigung darin, dass die Folgerungen, welche aus ihnen gezogen werden, mit der Erfahrung übereinstimmen. In der That ist dies immer in der Mechanik der Fall gewesen.

Bewegungs-Ursachen – Kräfte.

Als Ursachen des Entstehens und der Veränderungen der Bewegungen, welche in der materiellen Welt wahrgenommen werden, nehmen wir die sog. Kräfte an. Von dem Vorhandensein von Kräften erlangen wir Kenntnis durch die Beobachtung gewisser aus der Erfahrung stammenden äusseren Bedingungen sowie der Wirkungen der Kräfte. Es ist hauptsächlich Aufgabe der Physik zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Kräfte entstehen und vorhanden sind; die Mechanik dagegen hat zum Ziele die Untersuchung der Wirkungen der Kräfte.

Beispiele von Kräften in der Natur.

Eine erste, etwas unbestimmte Vorstellung von einer Kraft erhalten wir, indem wir durch Ziehen oder Drücken einen Körper in Bewegung versetzen, seine Bewegung verhindern oder verändern, z. B. indem wir einen Stein vom Boden aufheben, eine rollende Kugel zum Stehen bringen, einen Schlitten schieben u. s. w. Diese Erfahrung giebt uns zugleich mit einer gewissen Genauigkeit die drei Bestimmungsstücke der Kraft. Wir stellen uns den Zug oder Druck als von einem gewissen Punkte weg oder gegen einen gewissen Punkt hin (Angriffspunkt der Kraft) und in einer bestimmten Richtung (Richtungslinie und Sinn der Kraft) wirkend vor. Die Grösse unserer Anstrengung giebt einen ungefähren Begriff von der Grösse der Kraft. In dem jetzt betrachteten Falle wirkt streng genommen nicht eine Kraft, sondern es sind mehrere Kräfte, sog. Muskelkräfte thätig. In der Natur trifft man aber auf eine Mannigfaltigkeit von Kräften verschiedener Art. Unserer Erfahrung gemäss können sie in

zwei Hauptarten eingeteilt werden: Kräfte, welche bei unmittelbarer Berührung zu wirken scheinen und Kräfte, welche in die Entfernung wirken.[1] Zu der ersteren Art gehören z. B. die Reibung, welche bei der Berührung zweier Körper auftritt, Widerstandskräfte verschiedener Art, wie der Widerstand der Luft oder einer Flüssigkeit gegen die Bewegung eines Körpers in derselben u. s. w. Fernkräfte sind: die Schwere, die allgemeine Massenanziehung der Himmelskörper und zum Teil die magnetischen und elektrischen Kräfte.

Princip der Wirkung und Gegenwirkung.

Unsere Erfahrung hat gezeigt, dass ***die Kräfte der Natur immer paarweise gleich und entgegengesetzt gerichtet auftreten.*** Das Dasein einer Kraft bedingt also stets das Dasein einer anderen damit gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten Kraft. Wenn ein Körper einen anderen zieht oder drückt, so zieht oder drückt der letztere Körper den ersteren seinerseits mit einer ebenso grossen Kraft, so z. B. ein Magnet und ein Stück weiches Eisen. Von dem Magneten geht eine Kraft aus, welche ihren Angriffspunkt im Eisenstücke hat und dieses gegen den Magneten zieht, wenn kein Hindernis für die Bewegung vorhanden ist. Hält man dagegen das Eisenstück fest und macht den Magneten beweglich, indem man ihn z. B. an einem Drahte aufhängt, so zieht das Eisenstück den Magneten zu sich. Hierbei wirkt eine von dem Eisenstücke ausgehende Kraft, deren Angriffspunkt in dem Magneten liegt. Wenn ein Zug auf einen Körper mit Hülfe einer Schnur ausgeübt wird, so wirkt auch der Körper auf die Schnur mit einer ebenso grossen Kraft zurück, wodurch die Schnur in einen Spannungszustand versetzt wird. In vielen Fällen können die bei-

[1] In unserer Zeit beginnt die Auffassung sich mehr und mehr geltend zu machen, dass wirkliche Fernkräfte nicht vorkommen, sondern dass die Wirkung jeder sog. Fernkraft durch ein zwischenliegendes Medium vermittelt wird.

den gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte nicht unmittelbar wahrgenommen werden, wie z. B. die Anziehung der Sonne auf die Erde und die von der Erde ausgehende auf die Sonne wirkende Gegenkraft, die gegenseitigen Kräfte zwischen Erde und Mond, zwischen der Erde und einem fallenden Stein u. s. w.; beide sind aber immer gleichzeitig vorhanden. Dieses aus der Erfahrung abgeleitete Naturgesetz heisst das G e s e t z v o n d e r W i r k u n g u n d G e g e n w i r k u n g.

Es mag noch bemerkt werden, dass die beiden gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte im allgemeinen einander nicht aufheben, und zwar weil ihre Angriffspunkte verschiedenen Körpern (möglicherweise auch verschiedenen Teilen desselben Körpers) angehören. Es seien A und B die beiden Körper. Die von A ausgehende Kraft hat ihren Angriffspunkt in B und übt eine Wirkung (Action) aus, welche den Bewegungszustand von B verändert. Die von B ausgehende Gegenkraft greift den Körper A an, welcher hierbei eine Gegenwirkung (Reaction) erfährt, wodurch sein Bewegungszustand verändert wird. Das Gesetz ist ein Ausdruck der gegenseitigen Einwirkung von Körpern auf einander.

Gesetz der Trägheit.

Die Erfahrung zeigt, dass wenn eine Kraft auf einen in Bewegung sich befindenden Körper wirkt, ohne dass zugleich andere Ursachen (Kräfte, Widerstandskräfte) auftreten, welche die Wirkung der Kraft aufheben, die Bewegung des Körpers sich verändert, d. h. sie wird eine andere als wenn die Kraft nicht angebracht worden wäre. Ferner lehrt die Erfahrung, dass je vollständiger ein in Bewegung begriffener Körper von dem Einflusse von Kräften befreit wird oder je besser man die Wirkung vorhandener Kräfte aufheben kann, die Bewegung des Körpers sich um so mehr einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung nähert. So würde z. B. ein Geschoss seine Geschwindigkeit und seine Bewegungsrichtung beibehalten, wenn der Luftwiderstand die Bewegung nicht

verzögerte und die Schwere eine Richtungsablenkung zu Stande brächte. Durch eine Abstraction leitet man aus diesen Erfahrungen das sog. Trägheitsgesetz ab:

1) *Ein materielles Teilchen, welches in Ruhe ist, kann nicht von sich aus in Bewegung geraten,* und

2) *Ein materielles Teilchen, welches in Bewegung begriffen ist, kann nicht von sich aus die Grösse oder Richtung seiner Geschwindigkeit verändern.*

Die geradlinige, gleichförmige Bewegung ist deshalb ebenso wie die Ruhe als ein natürlicher Zustand des materiellen Teilchens anzusehen. Als Ursache irgend welcher Veränderung dieses Zustandes ist eine Kraft zu denken. In der That bildet somit das Trägheitsgesetz bloss einen Teil des Inhaltes des Kraftbegriffes.

Wie in der geometrischen Bewegungslehre gezeigt worden ist, rührt die Veränderung der Geschwindigkeit eines Punktes nach Grösse oder Richtung von einer Beschleunigung her. Die Haupteigenschaft der Kräfte, welcher Art sie sein mögen, ist deshalb, materiellen Teilchen oder Körpern Beschleunigungen zu erteilen. Die Beschleunigungen werden als die directen Wirkungen der Kräfte angesehen; von dem Vorhandensein von Beschleunigungen wird auf das Dasein von Kräften geschlossen. Auf Grund eines wichtigen Erfahrungssatzes kann man ferner den Einfluss verschiedener, gleichzeitig auf einen Punkt oder Körper wirkender Kräfte von einander unterscheiden. Dieser Satz von der sog. unabhängigen Wirkung der Kräfte lautet:

Princip der unabhängigen Wirkung der Kräfte.

Jede Kraft erteilt einem materiellen Punkte eine Beschleunigung in ihrer eigenen Richtung, welche unabhängig von der Geschwindigkeit des Punktes und von denjenigen Beschleunigungen ist, welche andere Kräfte möglicherweise dem Punkte erteilen.

Weil die Grösse einer Beschleunigung gemessen werden kann, so ergiebt sich aus dem oben gesagten die Möglichkeit, Kräfte mit einander zu vergleichen.

Constante und veränderliche Kräfte.

Eine der Grösse und Richtung nach unveränderliche Kraft heisst eine c o n s t a n t e Kraft; sie erteilt einem materiellen Körper eine gleichförmig veränderliche Bewegung in der Richtung der Kraft. Wenn ein Körper umgekehrt eine gleichförmig veränderliche Bewegung besitzt, so wirkt auf ihn eine constante Kraft oder ein System von Kräften, welche zusammen eine constante Kraft ergeben. V e r ä n d e r l i c h nennt man eine Kraft, welche einem Körper eine Beschleunigung erteilt, deren Grösse oder Richtung oder beide zugleich sich mit der Zeit verändern. Eine veränderliche Kraft kann in jedem Augenblicke mit einer constanten Kraft verglichen werden.

Das Vergleichen der Kräfte mit einander.

Zwei Kräfte heissen gleich gross, wenn sie einem Körper gleich grosse Beschleunigungen erteilen.

Eine Kraft heisst n Mal so gross wie eine andere Kraft, wenn die erstere Kraft einem Körper eine n Mal so grosse Beschleunigung wie die letztere Kraft erteilt.

Diese beiden Definitionen sind in dem allgemeineren Satze enthalten:

Die Kräfte verhalten sich wie die Beschleunigungen, die sie ein und demselben Körper erteilen.

Wählt man also eine genau bestimmte Kraft als Einheit, so können alle Kräfte durch Zahlen ausgedrückt und ihrer Grösse nach so gemessen werden, dass man die Beschleunigungen bestimmt, welche sie einem und demselben Körper erteilen. Es entsteht jetzt die Frage, ob diese Zahlwerte sich ändern, wenn man einen anderen Körper wählt und diejenigen Beschleunigungen zu Grunde legt, welche dieselben Kräfte diesem Körper erteilen. Die Antwort kann nur aus der Erfahrung geschöpft werden und lautet: die Grösse der Kräfte ist unabhängig von demjenigen Körper, dessen Beschleunigungen bei der Bestimmung benützt werden.

§ 36.

Masse der Körper. Einheiten der Kraft und der Masse.

Messen der Kräfte.

Es seien P_1 und P_2 zwei Kräfte, welche einem Körper A die Beschleunigungen a_1 und a_2, einem Körper B zwei andere Beschleunigungen b_1 und b_2 erteilen. Die Erfahrung lehrt, dass das Verhältnis zwischen den Beschleunigungen a_2 und a_1 dasselbe ist wie zwischen den Beschleunigungen b_2 und b_1 und zwar unabhängig von der Beschaffenheit der Körper und von der Art der Kräfte. Also ist

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}. \tag{78}$$

Vorausgesetzt, dass der Körper A bei der Bestimmung der relativen Grösse der Kräfte benützt wurde, so ist

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{79}$$

Nach der Gleichung (78) ergiebt sich dann auch

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{b_2}{b_1}. \tag{80}$$

Man erhält also dieselbe gegenseitige Grösse der Kräfte wie früher, wenn man die dem Körper B erteilten Beschleunigungen der Bestimmung zu Grunde legt.

Masse eines Körpers.

Das Erfahrungsergebnis, dass dieselbe Kraft P zwei verschiedenen Körpern A und B im allgemeinen zwei verschiedene Beschleunigungen a und b erteilt, erklärt man sich dadurch, dass die beiden Körper verschiedene M a s s e n haben. Der Begriff der Masse soll jetzt näher definirt werden. Nach der Gleichung (79) kann

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = m_A$$

gesetzt werden, wenn man mit m_A das constante Verhältnis einer Kraft, welche auf den Körper A wirkt, und der von der Kraft erzeugten Beschleunigung bezeichnet. In derselben Weise erhält man für den Körper B zufolge (80) und mit Anwendung einer entsprechenden Bezeichnung m_B

$$\frac{P_1}{b_1} = \frac{P_2}{b_2} = m_B.$$

Es geht hieraus hervor, dass das Verhältnis zwischen den Zahlwerten einer Kraft und der Beschleunigung, welche die Kraft ein und demselben Körper erteilt, eine von der Kraft unabhängige, für den Körper charakteristische Constante darstellt. Nach Übereinkunft wird diese Constante jetzt als Ausdruck für die Masse des Körpers gewählt. Wenn somit P, a und m beliebige zusammengehörende Werte der Kraft, der Beschleunigung und der Masse des Körpers bezeichnen, so ist

$$m = \frac{P}{a}$$

oder

$$P = ma. \tag{81}$$

Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung.

Die Zahl, welche die Masse eines Körpers angiebt, ist gleich dem Quotienten des Zahlwertes einer Kraft und der durch die Kraft erzeugten Beschleunigung des Körpers.

Oder kürzer: *Die Kraft ist gleich dem Producte aus Masse und Beschleunigung.*

Wenn die Kraft und die Masse, ausgedrückt in ihren Einheiten (von denen unten die Rede sein wird) gegeben sind, so folgt die Beschleunigung als der Quotient

$$a = \frac{P}{m}.$$

Diese Gleichung, welche das sog. Gesetz von der Beschleunigung ausspricht, ist eine wichtige Grund-

formel für die ganze Mechanik. Einige directe Anwendungen der Formel verdienen Interesse.

Wenn eine Kraft P_1 dem Körper A_1 mit der Masse m_1 und eine Kraft P_2 dem Körper A_2 mit der Masse m_2 dieselbe Beschleunigung a erteilen, so erhält man nach (81)

$$P_1 = m_1 a,$$
$$P_2 = m_2 a$$

und durch Division

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2}{m_1},$$

d. h. *zwei Kräfte, welche je zwei verschiedenen Körpern dieselbe Beschleunigung erteilen, verhalten sich wie die Massen der betreffenden Körper.*

Wenn dieselbe Kraft P nach einander dem Körper A_1 mit der Masse m_1 die Beschleunigung a_1 und dem Körper A_2 mit der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 erteilt, so erhält man

$$P = m_1 a_1 = m_2 a_2$$

und ferner

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

d. h. *die Massen zweier Körper verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, welche dieselbe Kraft ihnen erteilt.*

Einheit der Kraft.

Wie gesagt, werden Kräfte dadurch gemessen, dass man sie mit einer genau bestimmten Kraft, welche zur Einheit gewählt wird, vergleicht. Diese Krafteinheit soll jetzt festgestellt werden. Eine Kraft, deren Wirkungen in der Natur in jedem Augenblicke wahrgenommen werden, ist die Schwerkraft. Jeder Körper, welcher von der Erdoberfläche aus gehoben wird und den m andann frei fallen lässt, nimmt, wie die Erfahrung zeigt, (im luftleeren

Raume) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung senkrecht nach unten an. Die Grösse der Beschleunigung dieser Bewegung verändert sich etwas, wenn auch sehr wenig, von Ort zu Ort an der Erdoberfläche. Sie heisst **Beschleunigung der Schwere** oder **Beschleunigung beim freien Falle** und wird mit g bezeichnet (Vergl. § 9). Bei der Polhöhe 45° hat man

$$g = 9.806 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}.$$

Die zugehörige Kraft, die Schwerkraft, ist für jeden Ort der Erde eine constante Kraft. Sie verleiht den Körpern an der Erdoberfläche diejenige Eigenschaft, welche Schwere genannt wird. Verschiedene Körper sind im allgemeinen verschieden schwer. Wenn ein Körper auf einer Unterlage ruht, so übt er einen mit seiner Schwere gleich grossen Druck auf die Unterlage aus. Nach dem Gesetze von der Wirkung und Gegenwirkung erleidet der Körper von der Unterlage einen ebenso grossen, entgegengesetzt gerichteten Druck; die diesem letzteren Druck entsprechende Beschleunigung hebt die Beschleunigung der Schwere auf. Wenn man diese Drücke z. B. mit elastischen Kräften vergleicht und zwar mit Hülfe der von den elastischen Kräften herrührenden Deformationen (wie bei der gewöhnlichen Federwage), kann man die Gewichte der Körper messen. Eine genauere Methode ist das Wägen mit der gewöhnlichen Wage. Die Theorie der Wage, welche sich auf die Lehre vom Hebel gründet, wird jedoch hier nicht aufgenommen.

Zur Bestimmung der Gewichte wird eine **Gewichtseinheit** festgestellt und zwar nach Übereinkunft das sog. **Kilogramm**.[1] Das Kilogramm ist das Gewicht von

[1] Eigentlich ist das Kilogramm ursprünglich zur Masseneinheit gewählt worden, und zwar nahm man 1 kg = der Masse von 1 Cubikdecimeter physikalisch und chemisch reinem Wasser bei 4° C. an. Die

einem Cubikdecimeter physikalisch und chemisch reinem Wasser, bei der Temperatur der grössten Dichte $+4^\circ$ Celsius, am Meeresniveau.

Das Kilogramm, welches in dieser Weise als Einheit bei der Messung von Gewichten oder von der Wirkung der Schwere auf die Körper festgestellt worden ist, wird jetzt als allgemeine Krafteinheit gebraucht. Eine Kraft wird also in kg (oder dessen Ober- und Unterabteilungen: Tonne, Gramm u. s. w.) angegeben. Es mag hier bemerkt werden, dass die in der obigen Weise festgestellte Krafteinheit ganz wie die Beschleunigung der Schwere mit dem Orte auf der Erdoberfläche sich ein wenig ändert, wie man z. B. mittelst der Federwage nachweisen kann. Um eine derartige Krafteinheit ganz genau zu bezeichnen, müsste deshalb der Ort oder die Breite hinzugefügt werden, wie z. B. kg (Paris) oder kg (bei 45°).

Es sei W das Gewicht, m die Masse eines Körpers, man hat dann nach der Formel (81)

(82) $$W = mg$$

und

$$m = \frac{W}{g}.$$

Die Masse eines Körpers wird also dadurch erhalten, dass man sein Gewicht durch die Beschleunigung der Schwere dividirt. In der Breite 45° muss man also das Gewicht des Körpers in kg durch 9.806 teilen um die Masse zu erhalten. Weil g mit dem Orte auf der Erde etwas variirt, so findet man für denselben Körper etwas verschiedene Zahlwerte der Masse je nach dem Orte auf der Erde. Nach p. 161 bleibt aber die wahre Masse des Körpers unverändert, welche Kraft auch auf den Körper wirken mag. Der Widerspruch erklärt sich

Herstellung der so bestimmten Pariser Normalmasseneinheit 1 kg, welche die wirkliche Masseneinheit bildet und von der mehrere Länder Kopien besitzen, gelang aber nicht vollkommen, sondern wurde etwa 10 bis 15 Millionstel zu klein.

dadurch, dass die hierbei eingeführte Masseneinheit selbst veränderlich ist. In Übereinstimmung mit der Gleichung (81) ist die Einheit der Masse die Masse desjenigen Körpers, welchem die Kraft 1 kg die Beschleunigung $1 \frac{m}{Sec^2}$ erteilt. Nun erhält ein 1 kg schwerer Körper durch sein Gewicht die Beschleunigung g $(= 9.806 \frac{m}{Sec^2}$ bei 45°); also muss derjenige Körper, welcher durch die Kraft 1 kg die Beschleunigung $1 \frac{m}{Sec^2}$ erhalten soll, das Gewicht g (= 9.806) kg besitzen. ***Die Masseneinheit ist also die Masse desjenigen Körpers, welcher g kg wiegt.*** Die Masseneinheit variirt folglich proportional mit g, der Zahlwert der Masse aber mit g umgekehrt proportional; das Product beider bleibt unverändert.

Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten.

Bis jetzt wurden nur die Einheiten der Länge, z. B. der Meter und der Zeit, die Secunde nebst solchen Einheiten gebraucht, die mit Hülfe dieser beiden gebildet sind, wie z. B.

$$\text{Geschwindigkeitseinheit} = \frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Zeiteinh.}} \text{ z. B. } \frac{m}{Sec},$$

$$\text{Beschleunigungseinheit} = \frac{\text{Längeneinh.}}{(\text{Zeiteinh.})^2} \text{ z. B. } \frac{m}{Sec^2}.$$

Zuletzt kam noch eine neue selbstständige Einheit, die Krafteinheit hinzu, z. B. das Kilogramm. Die drei Einheiten für Länge, Zeit und Kraft werden G r u n d e i n h e i t e n genannt; alle übrigen Einheiten, welche durch die Grundeinheiten ausgedrückt werden können, heissen a b g e l e i t e t e E i n h e i t e n. Die Masseneinheit ist somit eine abgeleitete Einheit; sie wird durch die Gleichung

$$\text{Masseneinheit} = \frac{\text{Krafteinheit}}{\text{Beschleunigungseinheit}} =$$

$$= \frac{\text{Krafteinh. } (\text{Zeiteinh.})^2}{\text{Längeneinh.}} \text{ z. B. } \frac{kg \cdot Sec^2}{m}$$

bestimmt und hat die Dimension 1 in Bezug auf die Krafteinheit, 2 in Bezug auf die Zeiteinheit und −1 in Bezug auf die Längeneinheit (siehe p. 11).

Verändert man eine oder mehrere der Grundeinheiten, so ändern sich auch die abgeleiteten Einheiten und die Zahlwerte der in ihnen ausgedrückten Grössen. Wenn die Dimensionen angegeben sind, wie man ja immer verlangen muss, so sind alle derartige Änderungen leicht zu überschauen. So z. B. hat ein Körper von 100 kg Gewicht (bei 45° Polhöhe) die Masse

$$m = \frac{100}{9.806} \text{ Masseneinh.} = 10.20 \, \frac{\text{kg (bei } 45^\circ\text{). Sec}^2}{\text{m}}.$$

In neuen Masseneinheiten $\frac{\text{gr. Min}^2}{\text{m}}$ wird der Zahlwert der Masse

$$m = 10.20 \, \frac{1000}{60^2} = 2.83 \, \frac{\text{gr (bei } 45^\circ\text{). Min}^2}{\text{m}}.$$

Verschiedene Einheitssysteme.

Das System mit den Einheiten der Zeit, der Länge und der Kraft als Grundeinheiten ist das von den Ingenieuren am meisten gebrauchte und heisst auch das t e c h n i s c h e oder das p r a k t i s c h e M a s s - s y s t e m. Doch wird die oben gefundene abgeleitete Masseneinheit fast gar nicht gebraucht, sondern man entlehnt die Masseneinheit einem anderen Systeme, von welchem unten die Rede sein wird, und schreibt einem Körper von 1 kg Gewicht auch die Masse 1 kg zu. Diese neue Masseneinheit soll hier der Deutlichkeit wegen M a s s e n - k i l o g r a m m genannt werden. Sie ist nur der g:te Teil der früheren Masseneinheit, und wird als die Masse des Pariser Normalkilogramms definirt. Die Zahlwerte aller Massen in Massenkg sind g mal so gross als in der Einheit $\frac{\text{kg. Sec}^2}{\text{m}}$. In einer aus der Gleichung (81)

$$P = ma \tag{81}$$

abgeleiteten Formel dürfen aber nie z. B. Kräfte in kg und Massen in Massenkg eingeführt werden, sondern es müssen immer zusammengehörende Einheiten benützt werden. Statt der Gleichung (81) wäre es zwar möglich eine Beziehung

$$P = c\,ma$$

einzuführen; man würde dann z. B. mit Kräften in kg und Massen in Massenkg

$$c = \frac{1}{g} \frac{\text{kg}}{\text{Massenkg}} \frac{\text{Sec}^2}{\text{m}}$$

erhalten, doch wollen wir dies nicht thun.

Ein wissenschaftlicheres, in der Physik und in der Elektrotechnik vielfach angewandtes Einheitssystem erhält man, wenn man die Längeneinheit, die Zeiteinheit und die Masseneinheit als Grundeinheiten wählt und die Krafteinheit zu einer abgeleiteten Einheit macht. Dabei folgt aus (81)

$$\text{Krafteinheit} = \text{Masseneinh.} \times \text{Beschleunigungseinh.} = \\ = \frac{\text{Masseneinh.} \times \text{Längeneinh.}}{(\text{Zeiteinh.})^2},$$

so dass also die Dimensionen der Krafteinheit 1 in Bezug auf die Masseneinheit, 1 in Bezug auf die Längeneinheit und -2 in Bezug auf die Zeiteinheit sind. Mit dem Massenkg als Masseneinheit, dem Meter als Längeneinheit und der Secunde als Zeiteinheit ist die Krafteinheit

$$\frac{\text{Massenkg. m}}{\text{Sec}^2}.$$

Die Kraft 1 erteilt dem Massenkg die Beschleunigung $1\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$, woraus hervorgeht, dass diese Krafteinheit $\frac{1}{g}$ $\left(= \frac{1}{9.806}\right.$ bei 45°) mal so gross wie die Schwere des Mas-

senkilogramms ist. Sie ändert sich etwas von Ort zu Ort an der Erdoberfläche, während die Masseneinheit unverändert bleibt.

Systeme mit den Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse als Grundeinheiten werden gewöhnlich absolute Einheitssysteme genannt. Ein solches ist das sog. *CGS* System mit dem Centimeter als Längen-, der Secunde als Zeit- und dem Massengramm als Masseneinheit. In diesem System hat die Krafteinheit den Namen Dyne, so dass also

$$1 \text{ Dyne} = \frac{\text{Massengr. cm}}{\text{Sec}^2}$$

ist. Sie ist diejenige Kraft, welche der Masse 1 gr die Beschleunigung $1 \frac{\text{cm}}{\text{Sec}^2}$ erteilt, und zwar ist sie bei 45° Polhöhe gleich $\frac{1}{980.6}$ mal dem Gewichte des Gramms.

Es sollen hier noch einige aus dem obigen unmittelbar hervorgehende Beziehungen zwischen den verschiedenen Krafteinheiten sowie zwischen den verschiedenen Masseneinheiten aufgestellt werden, wobei g gleich $9.81 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$ angenommen wird.

$$1 \text{ kg} = 9.81 \frac{\text{Massenkg. m}}{\text{Sec}^2} = 981000 \text{ Dynen.}$$

$$1 \text{ Dyne} = 0.00001 \frac{\text{Massenkg. m}}{\text{Sec}^2} = 0.000001019 \text{ kg.}$$

$$1 \frac{\text{kg Sec}^2}{\text{m}} = 9.81 \text{ Massenkg; } 1 \text{ Massenkg} = 0.1019 \frac{\text{kg. Sec}^2}{\text{m}}.$$

Im folgenden wird nicht das absolute, sondern das technische Mass-system angewandt werden.

Vervollständigung des Kraftbegriffes.

Durch die bisherige Darstellung wird der Kraftbegriff noch nicht genügend genau bestimmt um einer strengen, mathematischen Behandlung der Bewegung der Körper

zu Grunde gelegt werden zu können. Es ist von Kräften die Rede gewesen, welche zwischen zwei Körpern von einer gewissen Ausdehnung bei ihrer Berührung oder aus der Ferne wirken. Damit sind aber der Angriffspunkt und die Richtungslinie der Kraft nur annähernd bestimmt. Wenn beispielsweise zwei Körper einander berühren, so wirkt nicht nur eine Kraft an der Berührungsfläche, sondern es wirken Kräfte in sämtlichen Berührungspunkten. Ebenso existiren zwischen Körpern in einer Entfernung von einander gegenseitige Kraftwirkungen zwischen sämtlichen materiellen Teilchen des einen Körpers und sämtlichen materiellen Teilchen des anderen Körpers. Diese Kräfte werden Elementarkräfte genannt. Die Körper können als materielle Punktsysteme aufgefasst werden, d. h. als geometrische Systeme von Punkten, in welchen die Masse sich concentrirt befindet. Diejenige Kraft, mit welcher ein materieller Punkt des einen Körpers einen materiellen Punkt des anderen Körpers beeinflusst, ist dann die Elementarkraft. Sie ist völlig bestimmt hinsichtlich des Angriffspunktes, welcher der Punkt des zweiten Körpers ist, hinsichtlich der Richtungslinie, welche die Verbindungslinie beider Punkte ist, und hinsichtlich der Grösse, vorausgesetzt dass man die Masse m des dem zweiten Körper angehörenden Punktes und seine von der Kraft erzeugte Beschleunigung a kennt; die Grösse der Kraft ist dann

$$P = ma. \tag{81}$$

Die Mechanik des materiellen Punktes behandelt die Bewegung eines materiellen Punktes, auf den eine oder mehrere Kräfte wirken.

§ 37.

Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte. Gleichgewicht.

Zusammensetzung von Kräften.

Die Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte gründet sich auf den auf p. 158 gegebenen Erfahrungssatz von der unabhängigen Wirkung der Kräfte. Nach diesem Satze ist die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt unabhängig von dem Bewegungszustande dieses Punktes und von den Kräften, welche gleichzeitig auf den Punkt wirken. Jede Kraft erteilt dem Punkte in ihrer eigenen Richtung eine Beschleunigung, deren Grösse gleich dem Quotienten aus der Kraft und der Masse des Punktes ist. Man kann also zuerst diejenigen Beschleunigungen bestimmen, welche ein Punkt unter dem Einflusse jeder einzelnen Kraft erhält, und nachher diese Beschleunigungen mit Hülfe früher gefundener Regeln (d. h. vermittelst des Parallelogramms, Parallelepipeds u. s. w. der Beschleunigungen) zu einer einzigen Beschleunigung zusammensetzen. Bei der Untersuchung der Bewegung selbst wird dann die von der Trägheit herrührende gleichförmige, geradlinige Bewegung mit der wirklichen Geschwindigkeit des Punktes entweder mit sämtlichen einzelnen beschleunigten Bewegungen, wobei die Anfangsgeschwindigkeit der letzteren gleich Null ist, oder mit einer einzigen beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit zusammengesetzt, welche der resultirenden Beschleunigung entspricht.

Die Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen erlangt also eine wesentliche Bedeutung für die Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes, auf welchen mehrere Kräfte wirken. Man kann aber auch, wie wir sehen werden, in directerer Weise verfahren, wenn man zuerst alle Kräfte zu einer Resultirenden ver-

einigt und nachher die von dieser Resultirenden verursachte Bewegung bestimmt.

Parallelogramm der Kräfte.

Es werde angenommen, dass zwei Kräfte P_1 und P_2 auf einen materiellen Punkt mit der Masse m wirken, von welchen die erstere dem Punkte die Beschleunigung a_1, die letztere die Beschleunigung a_2 erteilt. Diese Beschleunigungen können dann vermittelst des Parallelogrammgesetzes zu einer resultirenden Beschleunigung a zusammengesetzt werden, welche die Diagonale des Parallelogramms mit den Seiten a_1 und a_2 ist. Nach der Gleichung (81) ist

Fig. 93.

$$P_1 = ma_1,$$

$$P_2 = ma_2.$$

Construirt man deshalb ein Parallelogramm, in welchem die durch Strecken geometrisch dargestellten Kräfte P_1 und P_2 Seiten sind, so wird es dem aus a_1 und a_2 gebildeten Parallelogramm ähnlich, und hat mit diesem eine Ecke und zwei Seitenrichtungen gemeinsam. Seine Diagonale ist deshalb

$$R = ma$$

und hat die Richtung von a, d. h. stellt geometrisch eine Kraft dar, welche allein dem Punkte dieselbe Beschleunigung in Bezug auf Richtung und Grösse erteilt wie die Kräfte P_1 und P_2 zusammen. Sie heisst deshalb die Resultirende von P_1 und P_2, welche selbst Kraftcomponenten genannt werden. Die Zusammensetzung geschieht also vermittelst des sog. Parallelogramms der Kräfte.

Zusammensetzung zweier Kräfte.

Aus dem Parallelogramm der Kräfte ergiebt sich eine Anzahl von Relationen zwischen den Componenten, der Resultirenden und den Winkeln des Parallelogramms, welche den entsprechenden Relationen im Parallelogramm

der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen analog sind (§§ 13 und 14). Bei der Construction braucht nicht das ganze Parallelogramm gezeichnet zu werden; es genügt die Construction der einen Hälfte des Parallelogramms, des sog. Kraftdreieckes. Die Regel für die Zusammensetzung lässt sich so formuliren: ***Die Resultirende R zweier Kräfte P und Q ist die dritte Seite eines Dreieckes, dessen andere Seiten die beiden nach einander mit unveränderter Grösse und Richtung abgetragenen Kräfte P und Q sind*** (Fig. 94).

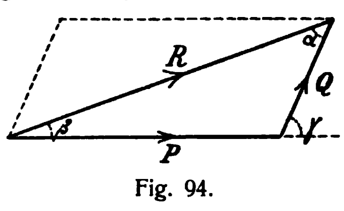


Fig. 94.

Die Winkel des Dreieckes seien α, β und $180^\circ - \gamma$, wobei

$$\gamma = \alpha + \beta$$

ist. Es bestehen dann die Relationen

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = P : Q : R \tag{83}$$

und

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos\gamma}. \tag{84}$$

Die letztere Formel dient in Verbindung mit einer der Relationen

$$\sin\alpha = \frac{P}{R}\sin\gamma,$$

$$\sin\beta = \frac{Q}{R}\sin\gamma$$

bei gegebenen Componenten P und Q zur analytischen Bestimmung der Resultirenden.

Wenn der Winkel γ speciell gleich Null ist, d. h. wenn die beiden Kräfte dieselbe Richtung haben, so giebt die Formel (84) die Resultirende

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ} = P + Q$$

gleich der Summe der beiden gegebenen Kräfte.

Ist dagegen $\gamma = 180^\circ$, d. h. wenn die beiden Kräfte entgegengesetzten Sinn haben und beispielsweise $P > Q$ ist, so wird

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,PQ} = P - Q.$$

Die Resultirende ist gleich der Differenz zwischen den beiden Kräften und hat die Richtung der grösseren Kraft. Wenn die Kräfte entgegengesetzt gerichtet und gleich gross sind, d. h. wenn $P = Q$ ist, so wird $R = 0$, und man sagt, dass die beiden Kräfte einander aufheben oder auch dass der materielle Punkt im Gleichgewichte sei; dabei befindet er sich entweder in Ruhe oder er besitzt eine geradlinige, gleichförmige Bewegung. Bei dem auf p. 163 angeführten Falle eines schweren Körpers auf horizontaler Unterlage besteht Gleichgewicht zwischen der Schwere des Körpers und dem damit gleich grossen Drucke der Unterlage, der lotrecht nach oben gerichtet ist.

Ein bemerkenswerter specieller Fall ist auch der, in welchem die Kräfte P und Q zu einander senkrecht sind, und das Parallelogramm der Zusammensetzung somit ein Rechteck wird. Es ergiebt sich

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{P}{R};\ \cos\alpha = \sin\beta = \frac{Q}{R},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \cot\beta = \frac{P}{Q}.$$

Zerlegung einer Kraft.

Umgekehrt kann eine Kraft mit Hülfe der Parallelogramm- oder der Dreiecksregel in zwei Componenten zerlegt werden. Dabei kann man folgende Fälle betrachten:

1) Die Richtung der beiden Componenten ist gegeben.

2) Die eine Componente ist der Grösse und Richtung nach gegeben.

3) Die Grösse der einen und die Richtung der anderen Componente sind gegeben.

4) Beide Componenten sind der Grösse nach gegeben.

Das Problem wird in jedem Falle in einfacher Weise analytisch oder graphisch gelöst, was hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Zusammensetzung mehrerer Kräfte.

Es mögen jetzt mehrere Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$ auf denselben Angriffspunkt wirken, wobei zuerst vorausgesetzt wird, dass alle Kräfte in derselben Ebene liegen. Die Kräfte können sowohl graphisch als auch analytisch zusammengesetzt werden.

Kräftepolygon.

Die graphische Zusammensetzung kann in folgender Weise ausgeführt werden. Die Kraft P_1 wird zuerst nach der Dreiecksregel mit der Kraft P_2 zu einer Resultirenden R_{12} zusammengesetzt (Fig. 95); die Kraft P_3 wird dann mit R_{12} zu der Resultirenden R_{123} zusammengesetzt u. s. w.; man fügt immer nach der Dreiecksregel jede folgende Kraft zu der Resultirenden der vorhergehenden Kräfte, bis man zuletzt die Resultirende R sämtlicher n-Kräfte erhält. Wie ersichtlich ist es aber nicht erforderlich die Zwischen-Resultirenden R_{12}, R_{123} u. s. w. zu zeichnen; die Regel der Zusammensetzung wird also folgende: *Sämtliche Kräfte werden mit unveränderter Grösse und Richtung nach einander abgetragen. Diejenige Strecke, welche von dem Anfangspunkte der ersten Kraft nach dem Endpunkte der zuletzt abgetragenen Kraft gezogen wird, stellt dann die Resultirende des gegebenen Kraftsystemes dar.*

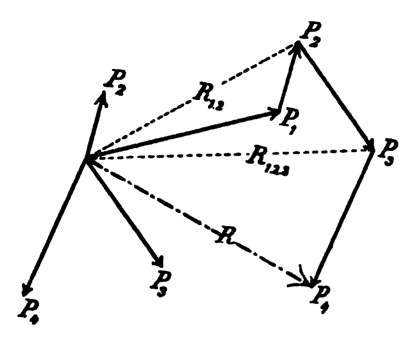


Fig. 95.

Diese Regel der graphischen Zusammensetzung einer Anzahl von Kräften in derselben Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte wird die Polygonregel genannt und

ist völlig analog der Polygonregel für Geschwindigkeiten oder für Beschleunigungen (p. 48 u. 53). Die nach einander abgetragenen Kräfte und die Resultirende R bilden eine geschlossene gebrochene Linie, das sog. Kräftepolygon.

Analytische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Bei der analytischen Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene mit dem gleichen Angriffspunkte werden zwei zu einander senkrechte Richtungen durch den Punkt als Coordinatenaxen gewählt (Fig. 96). Eine Kraft P_1 giebt nach diesen Axen die Componenten X_1 und Y_1, eine Kraft P_2 die Componenten X_2 und Y_2 u. s. w. endlich P_n die Componenten X_n und Y_n, wobei jede Componente positiv in der positiven Axenrichtung und negativ in der entgegengesetzten Richtung gerechnet wird. Durch algebraische Addition werden die X-Componenten zu der Kraft R_x, die Y-Componenten zu der Kraft R_y zusammengesetzt; es wird also

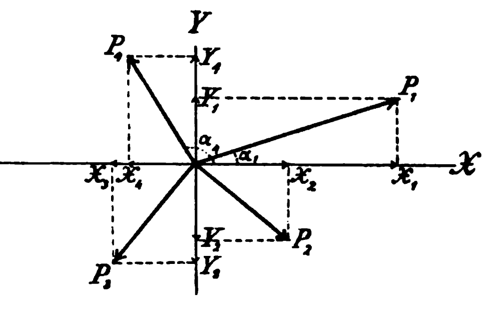


Fig. 96.

$$(85)\qquad \begin{aligned} R_x &= \Sigma X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ R_y &= \Sigma Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n. \end{aligned}$$

Die beiden Kräfte R_x und R_y geben dann als resultirende Kraft die Diagonale R eines Rechteckes; und zwar ist

$$(86)\qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};$$

R bildet einen Winkel φ mit der positiven x-Axe, für den die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{R_x}{R}, \ \sin\varphi = \frac{R_y}{R},$$
(87)
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_y}{R_x}$$

gelten.

Drückt man die Kraftcomponenten X_1, Y_1, X_2, Y_2 u. s. w. durch die Kräfte und die Winkel bez. α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ aus, welche ihre Richtungen mit der positiven x-Axe bilden, setzt man also

$$X_1 = P_1 \cos\alpha_1; \ Y_1 = P_1 \sin\alpha_1,$$
$$X_2 = P_2 \cos\alpha_2; \ Y_2 = P_2 \sin\alpha_2,$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$X_n = P_n \cos\alpha_n; \ Y_n = P_n \sin\alpha_n,$$

so ergiebt sich

(88)
$$R_x = \Sigma X = \Sigma (P\cos\alpha),$$
$$R_y = \Sigma Y = \Sigma (P\sin\alpha),$$

wo jede Summe n Glieder enthält. Die Resultirende R aller Kräfte folgt dann wie vorher aus den Formeln (86) und (87).

Kräfte im Raume.

Es sollen jetzt Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$ betrachtet werden, welche einen gemeinsamen Angriffspunkt haben, aber ein räumliches System bilden. Sie können wieder sowohl graphisch als analytisch zusammengesetzt werden.

Graphische Zusammensetzung.

Die Zusammensetzung wird graphisch vermittelst eines Kräftepolygons ausgeführt, welches man erhält, wenn man die Kräfte der Reihe nach mit unveränderter Grösse und Richtung nach einander abträgt. Dieses Polygon ist aber ein räumliches Polygon und wird nach den Regeln der darstellenden Geometrie durch Zeichnen seiner Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen construirt. In den meisten Fällen wird es bequemer sein die Zusammensetzung analytisch auszuführen.

Analytische Zusammensetzung.

Für die analytische Zusammensetzung wählt man drei zu einander senkrechte Coordinatenaxen im Raume (Fig. 97). Es seien die Richtungswinkel der Kräfte in Bezug auf diese Axen

α_1, β_1 und γ_1 f. d. Kraft P_1,
α_2, β_2 „ γ_2 „ „ „ P_2,
— — — — — — — — — —
α_n, β_n „ γ_n „ „ „ P_n.

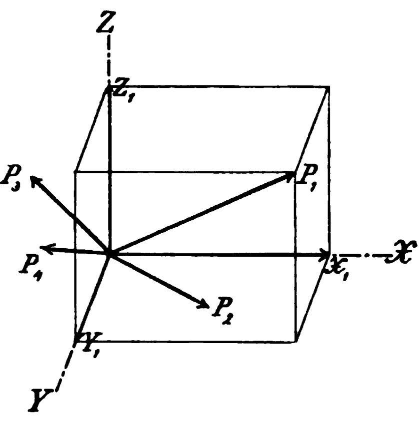


Fig. 97.

Jede Kraft wird vermittelst eines rechtwinkligen Parallelepipeds in ihre Componenten nach den drei Axen zerlegt (vergl. p. 49). Diese Componenten sind für die Kräfte

	P_1	P_2	P_n
nach der x-Axe	$X_1 = P_1 \cos \alpha_1$,	$X_2 = P_2 \cos \alpha_2$ ..	$X_n = P_n \cos \alpha_n$,
„ „ y- „	$Y_1 = P_1 \cos \beta_1$,	$Y_2 = P_2 \cos \beta_2$ ..	$Y_n = P_n \cos \beta_n$,
„ „ z- „	$Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$,	$Z_2 = P_2 \cos \gamma_2$ ..	$Z_n = P_n \cos \gamma_n$.

Summirt man jetzt alle Componenten längs jeder Coordinatenaxe, so erhält man als Componenten der gesuchten Resultirenden

$$R_x = \Sigma X = \Sigma(P \cos \alpha),$$
$$R_y = \Sigma Y = \Sigma(P \cos \beta), \tag{89}$$
$$R_z = \Sigma Z = \Sigma(P \cos \gamma).$$

Die resultirende Kraft R hat die Grösse

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{90}$$

und ihre Richtungswinkel α, β, γ ergeben sich aus den Formeln

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R},$$

(91) $$\cos\beta = \frac{R_y}{R},$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Beschleunigung des Angriffspunktes der Kräfte.

Die vorhin beschriebene Art der Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte hat eine besondere Bedeutung für die Untersuchung der Bewegung dieses Angriffspunktes, welcher ein freier materieller Punkt mit der Masse m sein möge. Die Untersuchung der Bewegung eines Punktes im Raume wird nach § 12 vermittelst ihrer Projectionsbewegungen auf drei Coordinatenaxen ausgeführt. Wenn die Componenten R_x, R_y und R_z der Gesamtkraft R nach den drei Coordinatenaxen gefunden sind, so erhält man unmittelbar die Beschleunigungen in diesen drei Projectionsbewegungen mit Hülfe der Formeln

$$a_x = \frac{R_x}{m},$$

(92) $$a_y = \frac{R_y}{m},$$

$$a_z = \frac{R_z}{m}.$$

Aus den gefundenen Formeln können mehrere Schlüsse gezogen werden.

Gleichgewicht.

Das aus n Kräften gebildete Kraftsystem heisst ein Gleichgewichtssystem, wenn die Resultirende gleich Null ist. Es wird R gemäss der Formel (90) nur dann gleich Null, wenn die drei Bedingungen

(93) $$R_x = \Sigma(P\cos\alpha) = 0,\quad R_y = \Sigma(P\cos\beta) = 0,\quad R_z = \Sigma(P\cos\gamma) = 0$$

erfüllt sind. Es ergiebt sich also der Satz: *Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte sind im Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Projectionen auf jede von drei zu einander senkrechten Axen gleich Null ist.*

Die Bedingung $R = 0$ wird graphisch dadurch ausgedrückt, dass der Endpunkt der letzten Kraft im Kräftepolygon mit dem Anfangspunkte der ersten Kraft zusammenfällt. Das Kräftepolygon heisst dann ein geschlossenes.

Wenn die drei Bedingungen (93) erfüllt sind, so folgt aus den Formeln (92)

$$a_x = a_y = a_z = 0,$$

d. h. die drei Projectionsbewegungen sind gleichförmig. Die Bewegung des Angriffspunktes des im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems ist dann geradlinig und gleichförmig oder der Punkt befindet sich in Ruhe. Man sagt, dass der Punkt selbst im Gleichgewicht sei und unterscheidet je nach den beiden Fällen zwischen dynamischem und statischem Gleichgewichte.

Wenn die auf einen Punkt wirkenden Kräfte alle in einer Ebene liegen, so sind nach der Formel (86) die Bedingungen, dass die Resultirende gleich Null sei,

$$(94) \qquad \begin{aligned} R_x &= 0, \\ R_y &= 0, \end{aligned}$$

d. h. *Kräfte in derselben Ebene und mit gemeinsamem Angriffspunkte sind im Gleichgewicht, wenn die Summe der Projectionen sämtlicher Kräfte auf jede von zwei zu einander senkrechten Axen in der Ebene gleich Null ist.*

Lami's Princip.

Wenn z. B. drei Kräfte in der Ebene gegeben sind, so erfordert das Gleichgewicht, dass eine beliebige von ihnen gleich gross und entgegengesetzt gerichtet zu der Resultirenden der beiden übrigen Kräfte sei. Die Grössen der drei Kräfte werden dann durch zwei Seiten und die

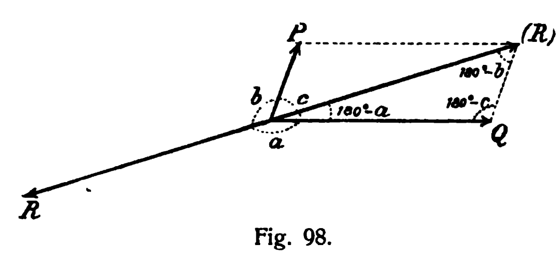


Fig. 98.

Diagonale eines Parallelogramms dargestellt (Fig. 98). Es seien, P, Q und R in der Figur drei Kräfte im Gleichgewicht; die entgegengesetzte Kraft (R) zu R ist die Resultirende aus P und Q.

Mit Hülfe des Sinussatzes findet man

$$P : Q : R = \sin(180^\circ - a) : \sin(180^\circ - b) : \sin(180^\circ - c)$$

d. h.

$$P : Q : R = \sin a : \sin b : \sin c. \tag{95}$$

Die Kräfte verhalten sich also im Falle des Gleichgewichtes wie die Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel. Dieser Satz wird nach seinem Aufsteller das Lami'sche Princip genannt.

Diese Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte werden bei der Lösung einer grossen Menge von Aufgaben benützt.

Anwendungen.

1) Drei Kräfte wirken längs der Halbirungslinien der Winkel eines Dreieckes, und zwar von dem gemeinsamen Schnittpunkte dieser drei Linien gegen die Ecken hin. Das Grössenverhältnis der Kräfte beim Gleichgewicht zwischen denselben sei zu bestimmen. Mit den Bezeichnungen in der Figur 99 ergiebt sich

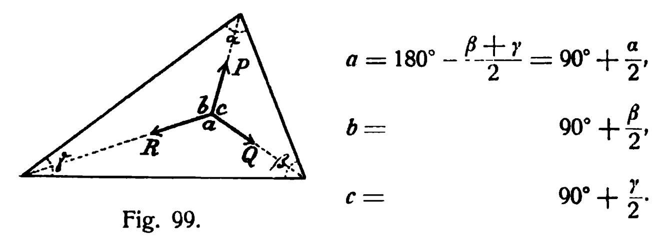


Fig. 99.

$$a = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$b = \qquad 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

$$c = \qquad 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Das Lami'sche Princip liefert also die Lösung

$$P:Q:R = \cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}.$$

2) Das Problem 1) sei mit der Abänderung zu behandeln, dass die Winkelhalbirenden des Dreieckes durch die Höhenlinien ersetzt werden.

3) Ein Gewicht P hängt an drei gleich langen Fäden, deren obere Endpunkte sich in einer Horizontalebene befinden und die mit dem Aufhängepunkte des Gewichtes die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Die Spannung der Fäden wird gesucht.

Die in allen Fäden gleich grosse Spannung sei X. Jeder Faden bildet mit der Richtung senkrecht nach oben einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. Setzt man jetzt die Projectionssumme der drei Spannungen X und der Kraft P auf die Verticale gleich Null, so folgt

$$3\,\mathrm{X} \cos v = P.$$

Die Grösse der Spannung ist also:

$$X = \frac{P}{3\cos v} = \frac{P}{\sqrt{6}} = 0.4082\,P.$$

4) Ein Hebezeug besteht aus drei zu einander senkrechten Stäben von den Längen bez. l_1, l_2 und l_3, welche in einem Punkte verbunden sind und deren untere Endpunkte sich in einer Horizontalebene befinden. Die Last P wirkt lotrecht unter dem Verbindungspunkte. Es werden die Drücke in den Stäben gesucht.

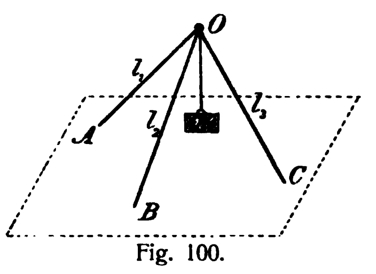


Fig. 100.

Der Verbindungspunkt O (Fig. 100 und 101) werde als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume gewählt, dessen Axen die Mittellinien OA, OB und OC der drei Stäbe seien. Es wird die Richtung der Normalen OP von O aus auf die Ebene ABC in Bezug auf dieses Coordinatensystem gesucht. Die Ebene ABC schneidet auf den Axen die Stücke l_1, l_2 und l_3 ab und hat folglich die Gleichung

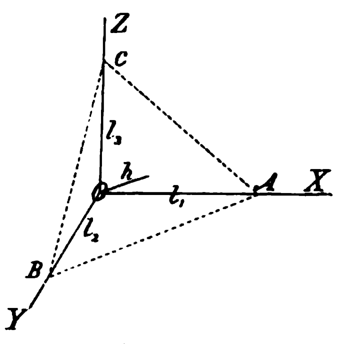


Fig. 101.

$$\frac{x}{l_1}+\frac{y}{l_2}+\frac{z}{l_3}=1.$$

In der Normalform lautet dieselbe Gleichung

$$\frac{\frac{x}{l_1}+\frac{y}{l_2}+\frac{z}{l_3}}{\sqrt{\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}}};$$

sie giebt für die Länge h der Normale aus O zu der Ebene den Wert:

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}}}=\frac{l_1 l_2 l_3}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}}.$$

Für die Winkel α, β und γ, welche die Normale mit den Coordinatenaxen einschliesst, erhält man

$$\cos\alpha=\frac{h}{l_1}=\frac{l_2 l_3}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{h}{l_2}=\frac{l_3 l_1}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{h}{l_3}=\frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}}.$$

Die Kraft P ist die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kantenlängen die gesuchten Drücke darstellen. Bezeichnet man sie mit P_1, P_2 und P_3 nach den Richtungen der x-, y- und z-Axe, so folgt

$$P_1=P\cos\alpha=\frac{l_2 l_3}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}}P,$$

$$P_2=P\cos\beta=\frac{l_3 l_1}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}}P,$$

$$P_3=P\cos\gamma=\frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_2^2 l_3^2+l_3^2 l_1^2+l_1^2 l_2^2}}P.$$

5) Man zeige, dass Gleichgewicht bei einem räumlichen Kräftesysteme mit gemeinsamem Angriffspunkte besteht, wenn die Projectionssumme der Kräfte auf jede von drei Axen, welche nicht parallel einer Ebene sein dürfen, gleich Null ist.

6) In dem gemeinsamen Schnittpunkte der Höhenlinien eines Tetraeders wirken Kräfte, und zwar in den Richtungen der Höhen-

linien gegen die Seitenflächen hin. Die Kräfte sind diesen Seitenflächen proportional. Man beweise, dass Gleichgewicht besteht. Das Tetraeder sei $H_1H_2H_3H_4$ (Fig 102), die Flächeninhalte der gegenüberliegenden Seitenflächen seien bez. A_1, A_2, A_3 und A_4, die entsprechenden Kräfte seien endlich kA_1, kA_2, kA_3 und kA_4. Zuerst wird nachgewiesen, dass die Summe der Projectionen der vier Kräfte auf die Höhenlinie H_1N_1 gleich Null ist. Die Seitenfläche $H_2H_3H_4$ des Tetraeders wird durch die Geraden H_2N_1, H_3N_1 und H_4N_1 in drei Dreiecke geteilt, deren Flächeninhalte mit a_2, a_3 und a_4 bezeichnet werden mögen. Werden die Neigungswinkel der drei übrigen Tetraederseiten gegen die Grundfläche $H_2H_3H_4$ bez. α_2, α_3 und α_4 genannt, so hat man

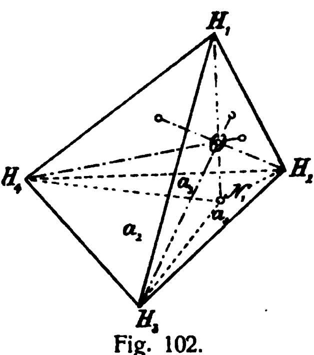


Fig. 102.

$$A_2 = \frac{a_2}{\cos \alpha_2};\ A_3 = \frac{a_3}{\cos \alpha_3};\ A_4 = \frac{a_4}{\cos \alpha_4}.$$

Die Kräfte kA_2, kA_3 und kA_4 schliessen mit der Richtung H_1N_1 die Winkel $180° - \alpha_2$, $180° - \alpha_3$ und $180° - \alpha_4$ ein. Die Projectionssumme aller vier Kräfte auf diese Richtung ist also

$$kA_1 - kA_2 \cos \alpha_2 - kA_3 \cos \alpha_3 - kA_4 \cos \alpha_4 =$$
$$= k(A_1 - a_2 - a_3 - a_4) = 0,$$

weil

$$A_1 = a_2 + a_3 + a_4$$

ist.

In derselben Weise zeigt man, dass die Projectionssumme auf jede der drei übrigen Höhenlinien gleich Null ist. Hieraus folgt dann, dass sie für jede Axe des Raumes gleich Null ist; d. h. die vier betrachteten Kräfte sind im Gleichgewichte, w. z. b. w.

Fünfter Abschnitt.

Bewegung des materiellen Punktes.

§ 38.

Allgemeine Resultate.

Nach der Zusammensetzung der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte zu einer Resultirenden folgt die Untersuchung der Bewegung, welche der Punkt unter dem Einflusse dieser Resultirenden annimmt.

Wenn die Resultirende der wirkenden Kräfte gleich Null ist, so bleibt der materielle Punkt entweder in Ruhe oder er hat eine gleichförmige geradlinige Bewegung. Es besteht dann Gleichgewicht; in dem ersteren Falle ein statisches, in dem letzteren Falle ein dynamisches Gleichgewicht (vergl. p. 179).

Differentialgleichungen der Bewegung.

Wenn dagegen die Resultirende R nicht gleich Null ist, so erhält der materielle Punkt, dessen Masse gleich m ist, in der Richtung der Resultirenden eine Beschleunigung a von der Grösse

$$a = \frac{R}{m}.$$

Die Componenten dieser Beschleunigung nach drei Coordinatenaxen im Raume sind

$$
(92) \qquad
\begin{aligned}
a_x &= \frac{R_x}{m}, \\
a_y &= \frac{R_y}{m}, \\
a_z &= \frac{R_z}{m},
\end{aligned}
$$

wo R_x, R_y und R_z die Componenten der Resultirenden nach den betreffenden Axen bezeichnen (siehe p. 178). Führt man gemäss den Gleichungen (36) die Ausdrücke für die Componenten der totalen Beschleunigung

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\
a_y &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\
a_z &= \frac{d^2z}{dt^2}
\end{aligned}
$$

ein, so erhält man nach Multiplication mit m

$$
(96) \qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= R_x, \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= R_y, \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= R_z,
\end{aligned}
$$

welche Gleichungen die **Differentialgleichungen der Bewegung des materiellen Punktes** genannt werden. Aus den Differentialgleichungen folgen die Gleichungen der Bewegung, d. h. die Ausdrücke für x, y und z als Functionen von t, durch Integration.

Wenn die Resultirende der auf den Punkt wirkenden Kräfte fortwährend in einer Ebene liegt, welche auch die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes enthält, so verläuft die Bewegung ganz in dieser Ebene. Wählt man diese Ebene zur xy-Ebene, so sind nur zwei Differentialgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x,$$
(97)
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R_y$$

der Bewegung erforderlich.

Wenn die Resultirende fortwährend dieselbe Richtung wie die Anfangsgeschwindigkeit hat, so ist die Bewegung geradlinig. Nimmt man dann die Gerade, in der die Bewegung stattfindet, zur x-Axe, so hat man nur die eine Differentialgleichung

(98) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x.$$

Bleibt die Resultirende ausserdem der Grösse nach unverändert, so ist die Bewegung gleichförmig veränderlich.

Tangential- und Normalkraft.

Wenn die Richtung der Resultirenden nicht mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit zusammenfällt, so ist die Bahn immer krummlinig. Die totale Beschleunigung a einer krummlinigen Bewegung ist früher sowohl in ihre Componenten nach drei Coordinatenaxen als auch in ihre beiden Componenten nach der Tangente und nach der Hauptnormalen der Bahn zerlegt worden. Für die Tangentialbeschleunigung wurde der Ausdruck

$$a_t = \frac{du}{dt}$$

und für die Normalbeschleunigung der Ausdruck

$$a_n = \frac{u^2}{\varrho}$$

gefunden. In derselben Weise zerlegt man die Resultirende R der wirkenden Kräfte in zwei Componenten: die Tangentialkraft

(99) $$R_t = ma_t = m\frac{du}{dt}$$

und die Normal- oder Centripetalkraft

(100) $$R_n = ma_n = m\frac{u^2}{\varrho},$$

von welchen die erstere die Richtung der Tangentialbeschleunigung und die letztere die Richtung der Normalbeschleunigung besitzt.

Für die drei Kräfte R, R_t und R_n gelten die Formelsysteme

(101) $$\begin{aligned} R_t &= R\cos\vartheta, \\ R_n &= R\sin\vartheta, \end{aligned}$$

und

(102) $$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_t^2 + R_n^2}, \\ \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{R_n}{R_t}, \end{aligned}$$

wo ϑ der Winkel zwischen der Resultirenden und der Richtung der Geschwindigkeit ist (Vergl. p. 68 und 69). Ferner ergiebt sich aus (99), (100) und (102)

(103) $$\begin{aligned} R &= m\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u^4}{\varrho^2}}, \\ \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{u^2}{\varrho\frac{du}{dt}}. \end{aligned}$$

Die der Tangentialkraft und der Normalkraft entgegengesetzt gleichen Kräfte heissen Tangentialreaction und Normalreaction oder Centrifugalkraft; die Benennungen rühren davon her, dass wenn z. B. nur eine normale Kraft auf den Punkt wirkt, der Punkt selbst auf den Ausgangspunkt dieser Kraft die entgegengesetzte Reaction ausübt.

Specielle Fälle der Bewegung eines Punktes.

In der geometrischen Bewegungslehre sind mehrere specielle Fälle der Bewegung eines Punktes untersucht worden, z. B. die Bewegung eines schweren Punktes längs der Verticalen, die parabolische Wurfbewegung, die

einfache oscillirende Bewegung, die gleichförmige Bewegung in einem Kreise u. s. w. In allen diesen Fällen ist von der in der Bewegung vorhandenen Beschleunigung ausgegangen worden. Man könnte aber auch von der die Bewegung verursachenden Kraft ausgehen, und erhielte dann die Beschleunigung durch Division der Kraft durch die Masse m des Punktes.

Diejenige Kraft, deren zugehörende Beschleunigung im obigen mit g bezeichnet worden ist, ist die Schwere und hat also für einen Punkt von der Masse m die Grösse mg, gleich dem Gewichte des Punktes. Die Schwere hat die Richtung der Lotlinie nach unten und ist sehr nahe gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet. Wie mehrmals erwähnt, ändert sich ihre Grösse ein wenig mit dem Orte auf der Erdoberfläche, worüber näheres in § 46, sowie auch mit der Höhe über dem Meeresspiegel. Für einen nach Breite und Höhe nicht allzu grossen Raum kann aber die Schwere praktisch genommen als der Grösse und Richtung nach constant betrachtet werden.

Ein materieller Punkt, auf den die Schwere allein wirkt, nimmt die parabolische Wurfbewegung an, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nicht vertical ist, und bewegt sich mit gleichförmig veränderlicher Bewegung längs der Verticalen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit vertical gerichtet ist oder wenn dem Punkte keine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird. In beiden Fällen ist die Beschleunigung die senkrecht nach unten gerichtete Beschleunigung g der Schwere.

In der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit u in einem Kreise vom Radius r fällt die totale Beschleunigung mit der Centripetalbeschleunigung zusammen, sie ist somit gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet und hat die unveränderliche Grösse

$$a = a_n = \frac{u^2}{r}.$$

Der constanten Centripetalbeschleunigung entspricht eine constante Centripetalkraft

$$R_n = m\frac{u^2}{r}.$$

Giebt es umgekehrt eine gegen einen festen Punkt gerichtete constante Kraft P, welche auf einen materiellen Punkt von der Masse m wirkt, so wird sich dieser Punkt gleichförmig in einem Kreise bewegen, falls die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zu der Kraft P ist und die Grösse

$$u = \sqrt{\frac{P}{m}r}$$

hat; r bezeichnet den Abstand des Punktes vom Mittelpunkte, gegen den die Kraft P gerichtet ist.

In der einfachen oscillirenden Bewegung ist die Beschleunigung in der Bahn gemäss § 11 proportional dem Abstande von einem festen Punkte der Bahn, dem sog. Schwingungsmittelpunkte. Unter dem Einflusse einer veränderlichen Kraft, welche gegen einen festen Punkt gerichtet ist und deren Grösse proportional dem Abstande von diesem Punkte ist, entsteht immer eine einfache oscillirende Bewegung in einer geradlinigen Bahn, falls die Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit durch den festen Punkt geht.

Freie und gebundene Bewegung.

Die Bewegungen des materiellen Punktes werden in freie Bewegungen und gebundene Bewegungen eingeteilt.

Die Bewegung eines Punktes heisst frei, wenn die Bahn in keiner Weise vorausbestimmt ist, sondern nur von den die Bewegung verursachenden Kräften und der Anfangsgeschwindigkeit abhängt. Eine freie Bewegung ist z. B. die Wurfbewegung.

Die Bewegung eines Punktes heisst gebunden, wenn der Punkt gezwungen ist sich auf einer gegebenen Fläche oder

einer gegebenen Curve zu bewegen.[1] Im ersten Falle ist die Bahn eine auf der Fläche liegende Curve, im zweiten Falle die gegebene Curve selbst und somit völlig bestimmt. Bei der gebundenen Bewegung treten ausser den die Bewegung verursachenden Kräften sog. Widerstandskräfte auf, die von den Hindernissen herrühren, durch welche der Punkt gezwungen wird, von der einer freien Bewegung entsprechenden Bahn abzuweichen. Ein Beispiel der gebundenen Bewegung liefert die gewöhnliche Pendelbewegung.

§ 39.

Beispiele der freien Bewegung eines materiellen Punktes.

Bewegung des Mondes.

1) Die Bewegung des Mondes um die Erde ist annäherungsweise eine freie gleichförmige Bewegung in einem Kreise mit dem Mittelpunkte der Erde als Mittelpunkt. Der Radius des Kreises ist ungefähr 60 Erdradien $= 60 \times 6370000$ m; die Zeit T eines Umlaufs beträgt 27.3 Tage. Aus diesen Angaben können die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Mondbewegung berechnet werden. Die unveränderliche Geschwindigkeit u hat den Wert (Anw. 2, p. 46)

$$u = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 60 \times 6370000}{27.3 \times 86400} \frac{\text{m}}{\text{Sec}} = 1020 \frac{\text{m}}{\text{Sec}},$$

und die Centripetalbeschleunigung ist

$$a_n = \frac{u^2}{R} = \frac{1020^2}{60 \times 6370000} \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2} = 0.00271 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}.$$

Newtons Gravitationsgesetz.

Die Beschleunigung der Mondbewegung kann noch in anderer Weise abgeleitet werden. Die Bewegung des Mondes erfolgt 1) unter dem Einflusse seiner Trägheit, welche ihm eine gleichförmige geradlinige Bewegung längs der Tangente der Bahn erteilen würde und 2)

[1] Der allgemeinere Fall, in welchem die Fläche oder die Curve sich mit der Zeit verändert, wird hier nicht behandelt.

infolge der Anziehung der Erde, welche die Abweichung von der geradlinigen Bahn verursacht. Diese Anziehung zwischen zwei Himmelskörpern, hier der Erde und dem Monde, heisst die universelle Gravitation und ist von Newton entdeckt worden. *Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze ziehen sich zwei Himmelskörper mit einer Kraft an, welche direct proportional ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernung ist.* Dasselbe Gesetz gilt nicht nur für die Himmelskörper sondern für zwei beliebige materielle Teilchen, wenigstens dann, wenn ihre gegenseitige Entfernung nicht so klein ist, dass sie mit der Grösse der Teilchen selbst vergleichbar ist, in welchem letzteren Falle sog. Molecularkräfte auftreten. Die Masse des einen Punktes sei m, die des anderen m', der Abstand r; dann ist die Kraft

$$P = k\frac{mm'}{r^2} \tag{104}$$

wo k die sog. Gravitationsconstante bezeichnet. Es ist k dem Zahlwerte nach gleich derjenigen Kraft, mit der sich zwei Masseneinheiten in dem Abstande 1 von einander anziehen. Diese Kraft erteilt dem Körper m die Beschleunigung

$$\frac{P}{m} = k\frac{m'}{r^2}$$

in der Richtung gegen m' und dem Körper m' die Beschleunigung

$$\frac{P}{m'} = k\frac{m}{r^2}$$

in der Richtung gegen m.

Nennt man nun die Masse der Erde M, die Masse des Mondes m und die Masse eines Körpers an der Erdoberfläche m', so wirkt zwischen M und m' die Kraft

$$P' = k\frac{Mm'}{r^2},$$

wo r der Radius der Erde ist. Diese Kraft ist die Schwere des Körpers und erteilt ihm die Beschleunigung g. Somit folgt

$$\frac{P'}{m'} = k\frac{M}{r^2} = g.$$

Zwischen der Erde und dem Monde wirkt eine Kraft P von der Grösse

$$P = k\frac{Mm}{R^2}$$

wo R der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Erde und des Mondes ist. Die Kraft P erteilt dem Monde die Beschleunigung

$$a = \frac{P}{m} = k\frac{M}{R^2}$$

in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Erde, und der Erde die Beschleunigung

$$a_s = \frac{P}{M} = k\frac{m}{R^2}$$

in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Mondes. Die relative Beschleunigung a_r des Mondes in Bezug auf die Erde ist somit nach dem Satze auf p. 143

$$a_r = a + a_s = k\frac{M+m}{R^2}$$

und ist gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet.

Aus den Ausdrücken für g und a_r folgt durch Elimination von k

$$a_r = \frac{r^2}{R^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)g.$$

Setzt man hier die Werte

$$g = 9.80 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2},$$

$$R = 60\, r,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{80}$$

ein, so erhält man

$$a_r = \frac{81 \,.\, 9.80}{80 \,.\, 60^2} = 0.00276 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem auf p. 190 gefundenen Werte von a_n mit aller nur zu wünschenden Genauigkeit überein. Hierin liegt eine glänzende Bestätigung des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

Beschleunigung an der Mondoberfläche.

Noch eine Anwendung dieses Gesetzes mag hier folgen. Bezeichnet man mit p die Beschleunigung eines an der Mondoberfläche fallenden Körpers, mit ϱ den Radius des Mondes, so ergiebt sich

$$p = k \frac{m}{\varrho^2},$$

$$g = k \frac{M}{r^2},$$

woraus

$$p = \frac{m}{M} \frac{r^2}{\varrho^2} g$$

folgt. Mit den Werten

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{80},$$

$$\frac{\varrho}{r} = 0.273$$

ergiebt sich also für die Beschleunigung des freien Falles an der Mondoberfläche

$$p = \frac{1}{80} \left(\frac{1}{0.273}\right)^2 9.80 = 1.64 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}.$$

Einfache oscillirende Bewegung.

2) In einer einfachen oscillirenden Bewegung in geradliniger Bahn ist die wirkende Kraft P nach p. 189 proportional dem Abstande von dem Schwingungsmittelpunkte O. Diese Kraft P kann als die Projection der constanten Centripetalkraft N einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise auf die Richtung der Bewegung aufgefasst werden, welche die einfache oscillirende Bewegung selbst als Projection auf einen Durchmesser ergiebt (Fig. 103). Man hat nun nach p. 189

$$N = m\frac{u^2}{r},$$

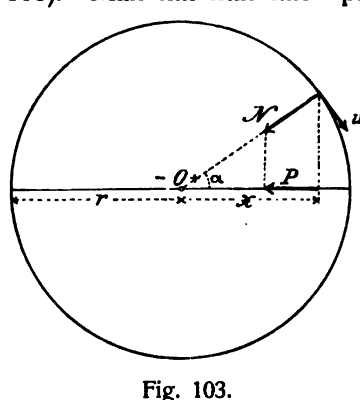


Fig. 103.

worin u die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung ist. Man findet also

$$(105) \quad P = N\frac{x}{r} = m\frac{u^2}{r^2}x.$$

Wird für die Kraft P ein Ausdruck von der Form

$$(106) \qquad P = mcx$$

bestimmt, nimmt man also die Kraft proportional dem Abstande x vom Schwingungsmittelpunkte an, so ergiebt sich

$$c = \frac{u^2}{r^2},$$

ferner aus

$$\frac{P}{m} = a = \frac{u^2}{r^2}x$$

für den Zahlwert der Beschleunigung a_0 in dem Abstande 1 vom Schwingungsmittelpunkte der Ausdruck

$$a_0 = \frac{u^2}{r^2} = c.$$

Wie aus der Gleichung (106) hervorgeht, ist die Einheit der Grösse c Zeiteinheit^{-2}. Wenn der Radius r des Kreises und die Grösse c gegeben sind, so folgen für die Geschwindigkeit u der gleichförmigen Bewegung im Kreise

$$u = \sqrt{c}\, r \tag{107}$$

und für die Umlaufszeit T dieser Bewegung, welche gleich der Zeit einer vollständigen Oscillation ist,

$$T = \frac{2\pi r}{u} = 2 \frac{\pi}{\sqrt{c}}. \tag{108}$$

Die Zeit $\frac{T}{2}$ *einer einfachen Schwingung (nach der einen Seite) wird also erhalten, indem man* π *durch die Quadratwurzel aus dem Zahlwerte der Beschleunigung im Abstande 1 vom Schwingungsmittelpunkte dividirt.*

Wenn die Oscillationszeit T bekannt ist, so ist die Gleichung der Bewegung nach § 11

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

oder auch

$$x = r \sin (\sqrt{c}\, t) \tag{109}$$

wobei die Zeit t von dem Augenblicke an gerechnet wird, in welchem der Punkt den Schwingungsmittelpunkt im positiven Sinne durchläuft.

Die Differentialgleichung der oscillirenden Bewegung ist

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -P = -mcx \tag{110}$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Bewegung in einer Ellipse.

3) Auf einen materiellen Punkt mit der Masse m wirke eine Kraft, welche gegen einen festen Punkt O gerichtet ist und deren Grösse proportional dem Abstande von diesem Punkte ist. In einem bestimmten Augenblicke befinde sich der Punkt in der Entfernung l von O und besitze eine auf der Richtungslinie nach O senkrechte Geschwindigkeit u_0. Man untersuche die Bewegung des Punktes.

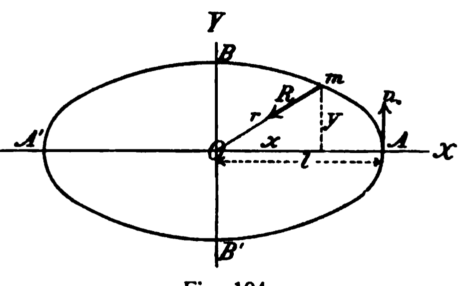


Fig. 104.

Die Bahn liegt in einer Ebene, welche den Punkt O und die Richtungslinie der Geschwindigkeit u_0 enthält. In dieser Ebene werde eine x-Axe gewählt, welche den Punkt O mit derjenigen Lage A des beweglichen Punktes verbindet, in welcher die Geschwindigkeit u_0 ist. Die y-Axe sei die durch O gezogene Parallele zu u_0. Der Ausdruck für die wirkende Kraft R ist

$$(111). \qquad R = mcr = mc\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die mit ihren Vorzeichen gerechneten Componenten von R nach den Coordinatenaxen sind dann

$$R_x = -\frac{x}{r}R = -mcx$$

und

$$R_y = -\frac{y}{r}R = -mcy;$$

es ist somit jede Componente proportional der Projection von r auf die betreffende Coordinatenaxe und gegen O gerichtet. Hieraus folgt, dass die Projectionsbewegungen auf die beiden Coordinatenaxen einfache oscilli-

rende Bewegungen sind, welche jetzt näher bestimmt werden sollen.

Es werde zunächst die Projectionsbewegung in der y-Axe betrachtet. In dem Schwingungsmittelpunkte O ist die Geschwindigkeit gleich u_0, so dass u_0 auch die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung in einem Kreise darstellt, welche die Schwingungsbewegung zur Projection hat. Wird der Radius des genannten Kreises ϱ genannt, so folgt nach der Gleichung (107)

$$u_0 = \sqrt{c}\,\varrho,$$

also für die Amplitude ϱ der Bewegung

$$\varrho = \frac{u_0}{\sqrt{c}},$$

ferner nach (109) als Gleichung der Bewegung selbst

$$y = \frac{u_0}{\sqrt{c}} \sin\,(\sqrt{c}\,t)$$

mit der auf p. 195 getroffenen Annahme über den Nullpunkt der Zeit.

In der Projectionsbewegung auf die x-Axe ist die Amplitude l, somit die Gleichung der Bewegung

$$x = l \sin\,(\sqrt{c}\,t'),$$

wobei die Zeiten t' von einem anderen Augenblicke als die Zeiten t gerechnet werden. Die Oscillationszeit ist für beide Bewegungen dieselbe und zwar gleich

$$T = 2\,\frac{\pi}{\sqrt{c}}. \tag{112}$$

Es kann jetzt

$$t' - t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$$

gesetzt werden; dann folgt

$$\sqrt{c}\,t' = \frac{\pi}{2} + \sqrt{c}\,t.$$

Als Gleichungen der Projectionsbewegungen erhält man schliesslich

$$x = l \cos(\sqrt{c}\, t),$$
(113)
$$y = \frac{u_0}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}\, t).$$

Durch Elimination von t zwischen diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die Gleichung der Bahn

$$\frac{x^2}{l^2} + c\,\frac{y^2}{u_0^2} = 1.$$

Die Bahn ist somit eine Ellipse mit den Halbaxen l und $\frac{u_0}{\sqrt{c}}$; die Bewegung in der Ellipse ist periodisch mit der Periode T.

Zur Zeit t sind die Componenten der Geschwindigkeit

$$u_x = \frac{dx}{dt} = -\, l\sqrt{c} \sin(\sqrt{c}\, t),$$
(114)
$$u_y = \frac{dy}{dt} = u_0 \cos(\sqrt{c}\, t).$$

Für $t = 0$ erhält man

$$u_x = 0 \text{ und } u_y = u_0,$$

d. h. die frühere Anfangsgeschwindigkeit. In der Projectionsbewegung auf die x-Axe ist die grösste Geschwindigkeit $l\sqrt{c}$; der nämliche Wert kommt der gleichförmigen Bewegung in einem Kreise zu, welche die Bewegung auf der x-Axe zur Projection hat.

Anwendungen.

1) Eine Bestimmung der Anziehungsconstanten k ist auf Grund directer Experimente mittelst der sog. Weltwage möglich geworden. Man berechne mit

$$k = \frac{646}{10^{12}} \frac{\text{m}^4}{\text{kg. Sec}^4} = \frac{659}{10^{13}} \frac{\text{m}^3}{\text{Massenkg. Sec}^2}$$

die Masse und mittlere Dichte der Erde.

Nach den früheren Bezeichnungen erhält man die Masse M der Erde

$$M = \frac{gr^2}{k} = \frac{9.80\,(6370000)^2\,10^{12}}{646} = 6.16\,.\,10^{23} \frac{\text{kg Sec}^2}{\text{m}},$$

die mittlere Dichte

$$\frac{3M}{4\pi r^3} = 569 \frac{\text{kg Sec}^2}{\text{m}^4} = 5570 \frac{\text{Massenkg}}{\text{m}^3},$$

das mittlere specifische Gewicht

$$5570 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5.57 \frac{\text{Tonnen}}{\text{m}^3} = 5.57 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

2) Eine Schleuder ist aus einer Schnur von 1.2 m Länge gebildet, an deren freiem Ende ein Stein von 2.5 kg Gewicht angebracht ist. Man berechne die Spannung der Schnur, wenn die Schleuder unmittelbar vor dem Wurfe 3 Umläufe in der Secunde macht.

3) In einer einfachen oscillirenden Bewegung mit der wirkenden Kraft

$$P = mcx$$

ist die Geschwindigkeit in dem Abstande x_0 vom Schwingungsmittelpunkte gleich u_0. Man suche die Gleichung der Bewegung.

Mit den auf p. 194 eingeführten Bezeichnungen hat man für die Zeit eines Umlaufes in der entsprechenden gleichförmigen Bewegung in einem Kreise

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$$

sowie für die Geschwindigkeit dieser Bewegung

$$u = \sqrt{c}\,.\,r,$$

wo die Amplitude r der Schwingungsbewegung vorläufig unbekannt ist. Aus den Gleichungen

$$x_0 = r \sin(\sqrt{c}\,t_0),$$

$$u_0 = \sqrt{c}\,r \cos(\sqrt{c}\,t_0)$$

wird aber

$$r = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{c}}$$

berechnet, sodass schliesslich als Bewegungsgleichung

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{c} \sin(\sqrt{c}\, t)}$$

erhalten wird.

4) Man discutire eine geradlinige Bewegung mit der Gleichung

$$x = a \cos(nt) + b \sin(nt).$$

§ 40.

Gebundene Bewegung.

Widerstandskraft.

Bei der gebundenen Bewegung eines Punktes ist nach p. 189 die Bahn entweder teilweise bestimmt, wenn die Bewegung auf einer gegebenen Fläche vor sich geht oder völlig bestimmt, wenn die Bahn mit einer gegebenen Curve zusammenfällt. Die Fläche oder die Curve bildet ein Hindernis für diejenige Bewegung, welche der Punkt annehmen würde, wenn er sich unter dem Einflusse der wirkenden Kräfte frei bewegen könnte. Das Hindernis der Bewegung kann durch eine gewisse Kraft S dargestellt werden, welche eine Widerstandskraft heisst. Wenn die Kraft S bekannt ist, so kann man sich das Hindernis entfernt und durch die Kraft S ersetzt denken; die Kraft S und die Resultirende R der gegebenen Kräfte können zu einer einzigen Kraft zusammengesetzt werden, unter deren Einfluss der Punkt sich so bewegt, als ob er frei wäre. Dabei wird die Bahn die Bedingung erfüllen in der gegebenen Fläche zu liegen oder mit der gegebenen Curve zusammenzufallen.

Bewegung in einer Ebene.

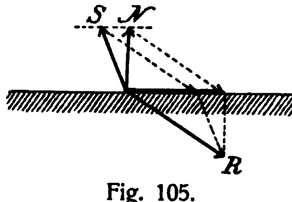


Fig. 105.

Es werde zunächst der Fall betrachtet, dass der materielle Punkt gezwungen ist, sich auf einer ebenen Fläche zu bewegen. Auf den Punkt wirke eine gewisse Kraft R (Fig. 105), welche nicht nach aussen von demjeni-

gen starren Körper gerichtet sein darf, dessen Begrenzung die Ebene ist, weil der Punkt sich sonst von der Ebene entfernen und seine Bewegung frei fortsetzen könnte. Das Hindernis ist hier ein sog. einseitiges Hindernis bei der Bewegung. Aber auch doppelseitige Hindernisse kommen vor; der materielle Punkt verbleibt dann in der gegebenen Fläche, wie auch die Kräfte wirken mögen (Fig. 106).

Bei der gezwungenen Bewegung in einer Ebene (Fig. 105) muss die Resultirende der gegebenen Kraft R und des unbekannten Widerstandes S in der Ebene liegen, weil sonst der Punkt sich nicht unter dem Einflusse von R und S als ein freier Punkt in der Ebene bewegen könnte. Durch diese Bedingung wird aber die Kraft S noch nicht bestimmt. Damit die Resultirende von R und S in der Ebene liege, ist es in der That nur erforderlich, dass der Endpunkt von S in einer Parallelebene zu der gegebenen Ebene liege, in demselben Abstande wie der Endpunkt von R, aber auf der entgegengesetzten Seite. Zerlegt man die Kraft S in zwei Componenten, so dass die eine Componente N normal zur Ebene ist und die andere T in der Ebene liegt (Fig. 107), so wird N völlig bestimmt und gleich der normalen Componente R_n der Kraft R, T dagegen völlig unbestimmt. N und R_n heben sich auf und es bleiben T und die tangentiale Componente R_t der Kraft R. In Wirklichkeit hat T immer einen bestimmten Wert, welcher von mehreren Umständen abhängig sein kann, wie von der Beschaffenheit der Oberfläche, der Grösse des Druckes N, der Geschwindigkeit der Bewegung u. s. w. Meistens ist T ein sog. Reibungswiderstand, von

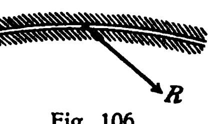


Fig. 106.

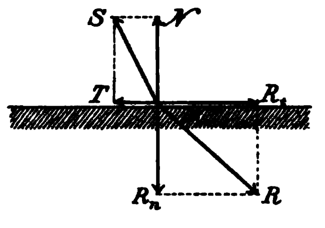


Fig. 107.

dem die Erfahrung unter anderem gelehrt hat, dass er der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist. Im eilften Abschn. wird die Reibung einer ausführlicheren Behandlung unterzogen werden. Bis auf weiteres wird der einfachste Fall betrachtet, in welchem der tangentiale Bewegungswiderstand T gleich Null ist, d. h. dass keine Reibung vorhanden ist. Flächen mit dieser Eigenschaft heissen g l a t t e F l ä c h e n. In einer glatten Ebene reducirt sich somit die Widerstandskraft S auf den Normaldruck

$$N = R_n = R \sin \alpha,$$

wo α der Winkel zwischen R und der Ebene ist. Als bewegende Kraft bleibt nur die tangentiale Componente von R

$$R_t = R \cos \alpha.$$

Wenn R speciell senkrecht zu der Ebene wäre, so würde sich $R_t = 0$ ergeben und der Punkt keine Beschleunigung erhalten, sondern sich geradlinig und gleichförmig bewegen müssen.

Bewegung auf einer ebenen Curve.

Es werde weiter vorausgesetzt, dass ein materieller Punkt gezwungen sei sich auf einer glatten ebenen Curve unter dem Einflusse einer in der Ebene der Curve liegenden Kraft R zu bewegen. Wie die oben betrachtete glatte Ebene übt die glatte Curve auf den Punkt einen gewissen Normaldruck N aus, der wie jetzt gezeigt werden soll berechnet werden kann, wenn die Geschwindigkeit des Punktes bekannt ist. Man hat dabei mehrere Fälle zu unterscheiden.

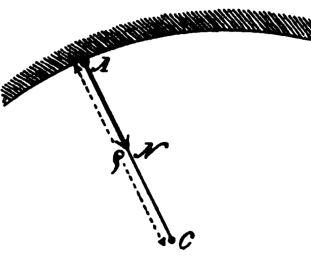


Fig. 108.

In dem einfachsten Falle ist die Kraft R gleich Null und der Punkt bewegt sich wie ein freier Punkt, auf den eine auf der Geschwindigkeit des Punktes normale Kraft N

wirkt (Fig. 108). Dabei ist N identisch mit der Centripetalkraft und hat den Wert (§ 38)

$$N = m\frac{u^2}{\varrho},$$

wo m die Masse des Punktes, u die Geschwindigkeit im Punkte A und ϱ den entsprechenden Krümmungsradius der Bahn bezeichnen. Weil keine tangentiale Kraft vorhanden ist, so ist die Tangentialbeschleunigung Null und die Bewegung gleichförmig. Die Kraft N hat die Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt, d. h. nach der concaven Seite der Curve (oder kürzer gesagt nach innen). Der Gegendruck, den der Punkt auf die Bahn ausübt, ist also nach aussen gerichtet und hat dieselbe Grösse N. Damit der Punkt in der Curve verbleibe, muss die convexe Seite der Curve den erforderlichen Widerstand darbieten. Würde dieser Widerstand irgendwo aufhören, so wäre die Fortsetzung der Bewegung eine geradlinige Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit u in der Richtung der Tangente der Bahn.

Ein anderer Fall ist der, dass die Kraft R, ohne gleich Null zu sein, fortwährend normal zu der gegebenen Bahncurve ist. Auch jetzt erhält man eine Tangentialbeschleunigung Null, und die Geschwindigkeit bleibt unverändert. Dies ist augenscheinlich noch der Fall, wenn die Bahn eine Raumcurve ist. Es gilt somit der Satz:

In jeder gebundenen Bewegung in einer vollkommen glatten krummlinigen Bahn, in welcher die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft fortwährend normal zu der Bahncurve ist, bleibt die Geschwindigkeit unverändert.

Nebst der normalen Kraft R bei der ebenen krummlinigen Bahn wirke auf den Punkt eine normale Widerstandskraft N, welche den Druck der Bahn darstellt. R und N müssen zusammen die Centripetalkraft der Bewegung erzeugen. Wenn die Kraft R wie in der Figur

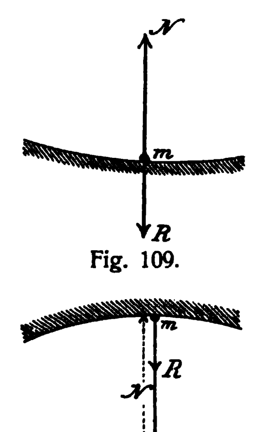


Fig. 109.

Fig. 110.

Fig. 111.

109 nach aussen gerichtet ist, so wirkt der Druck N nach innen und hat die Grösse

$$N = R + m\frac{u^2}{\varrho}.$$

Ist dagegen die Kraft R nach innen gerichtet und kleiner als die Centripetalkraft (Fig. 110), so hat der Druck N die Grösse

$$N = m\frac{u^2}{\varrho} - R$$

und die Richtung nach innen. Wenn schliesslich R nach innen wirkt und grösser als die Centripetalkraft ist (Fig. 111), so übt die Bahn einen nach aussen gerichteten Druck von der Grösse

$$N = R - m\frac{u^2}{\varrho}$$

aus. Wäre ganz besonders R gleich der Centripetalkraft, so würde N gleich Null sein und der Punkt würde sich in derselben Bahn bewegen, auch wenn er frei wäre.

Um die verschiedenen Fälle nicht von einander unterscheiden zu müssen, rechne man die nach innen gerichteten Kräfte als positiv, die nach aussen gerichteten als negativ, und erhält dann folgende allgemeine Regel:

Die algebraische Summe der gegebenen Normalkraft und des normalen Druckes der Bahn auf den Punkt ist gleich der Centripetalkraft der krummlinigen Bewegung.

In dem allgemeinen Falle ist die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft R nicht senkrecht zu der Bahn, sondern sie bildet einen von 90° verschiedenen Winkel ϑ

mit der Bahntangente (Fig. 112). Es giebt dann eine tangentiale Componente von R, gleich $R \cos \vartheta$, von der die Tangentialbeschleunigung des Punktes

$$a_t = \frac{R \cos \vartheta}{m}$$

Fig. 112.

herrührt und welche die Bewegung zu einer ungleichförmigen macht, sowie eine normale Componente von R, gleich $R \sin \vartheta$, welche nebst dem normalen Drucke N der Bahn auf den Punkt die Centripetalkraft der Bewegung erzeugt. Rechnet man wie oben die Kräfte positiv nach innen, so hat man zur Berechnung des Druckes N in einem Punkte der Bahn die Gleichung

$$(115) \qquad N + R \sin \vartheta = m \frac{u^2}{\varrho}.$$

§ 41.

Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer schiefen Ebene.

Kräfte.

Ein materieller Punkt mit der Masse m, auf den seine Schwere mg allein wirkt, sei gezwungen sich auf einer glatten schiefen Ebene zu bewegen, deren Neigungswinkel mit der Horizontalebene gleich α ist (Fig. 113). Die Schwere mg ergiebt die Componente

$$R_n = mg \cos \alpha$$

senkrecht zur Ebene und die Componente

$$R_t = mg \sin \alpha$$

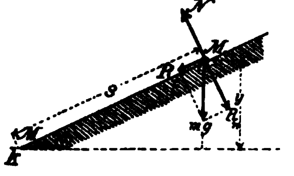


Fig. 113.

in der Ebene selbst, senkrecht zu der Kante k, längs welcher die schiefe Ebene eine Horizontalebene schneidet. Die erstere Componente ist gleich

dem normalen Drucke N, die letztere erteilt dem Punkte die Beschleunigung

$$g \sin \alpha$$

in der Richtung senkrecht zu k. Sowohl der Druck N wie die Beschleunigung $g \sin \alpha$ behalten während der Bewegung ihre Grösse unverändert bei. Weil die Beschleunigung g der Schwere hier in dem Verhältnis $1 : \sin \alpha$ vermindert worden ist, kann die schiefe Ebene zur experimentellen Bestimmung von g benützt werden. Zu diesem Zwecke ersann auch Galilei seine schiefe Rinne.

Gleichungen der Bewegung.

In der Anfangslage M_0 möge der materielle Punkt eine zu der Kante k senkrechte, abwärts gerichtete Geschwindigkeit c besitzen. Die Bewegung geschieht dann in einer zu k senkrechten Geraden auf der schiefen Ebene, einer sog. Fall-linie, und ist gleichförmig beschleunigt. Bezeichnet man den von M_0 aus nach abwärts gerechneten Wegabstand mit s und rechnet die Zeit von dem Augenblicke an, in welchem der Punkt sich in M_0 befindet, so erhält man gemäss § 8 die Gleichungen

$$u = c + g \sin \alpha \, . \, t,$$
$$s = ct + \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \, . \, t^2.$$

Ist ferner y der verticale Höhenunterschied zwischen M_0 und M, so hat man

$$s = \frac{y}{\sin \alpha}$$

und leitet durch Elimination von t zwischen den Gleichungen für u und s die Formel

$$u^2 - c^2 = 2gy$$

oder

$$u = \sqrt{c^2 + 2gy} \tag{116}$$

Fallgeschwindigkeit.

ab. Die Geschwindigkeit u wird somit durch die Anfangsgeschwindigkeit c und den Höhenunterschied y völlig bestimmt, ist aber nicht von dem Neigungswinkel α abhängig. Die Geschwindigkeit bei der Ankunft in einer bestimmten Horizontalebene ist dieselbe für alle Ebenen durch M_0 für die gleiche Anfangsgeschwindigkeit c. (Fig. 114). Dasselbe ist noch der Fall, wenn der Weg aus mehreren auf einander folgenden ebenen Stücken gebildet ist, wenn die Geschwindigkeit keine plötzliche Veränderung bei dem Übergange von einem Teile der gebrochenen Linie zu dem folgenden erleidet. Schliesslich gilt dasselbe Gesetz noch bei dem Falle längs einer continuirlichen Curve (Fig. 115).

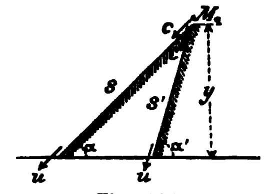


Fig. 114.

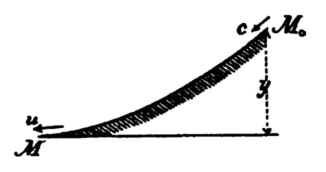


Fig. 115.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit c gleich Null ist, so erhält man die Formeln

$$u = g \sin \alpha \,.\, t,$$
$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2.$$

Es werde hiervon eine besondere Anwendung gemacht. In einem in einer Verticalebene liegenden Kreise (Fig. 116) zieht man aus dem höchsten Punkte M_0 zwei Sehnen M_0M und M_0M' mit den Längen l und l' sowie den Neigungswinkeln α und α' gegen die Horizontalebene. Nennt man ferner t und t' diejenigen Zeiten, welche der Fall aus

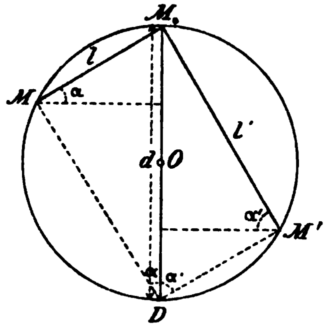


Fig. 116

M_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit längs der beiden Sehnen beansprucht, so erhält man

$$t^2 = \frac{2l}{g \sin \alpha}$$

und

$$t'^2 = \frac{2l'}{g \sin \alpha'}.$$

Ist d der Durchmesser des Kreises, so geben die Dreiecke M_0MD und $M_0M'D$

$$d = \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l'}{\sin \alpha'},$$

sodass

$$t^2 = t'^2 = \frac{2d}{g}$$

folgt. Die aus M_0 gezogenen Sehnen werden somit alle in derselben Zeit durchlaufen, welche mit der Fallzeit längs des verticalen Durchmessers übereinstimmt.

Wenn dem auf der schiefen Ebene befindlichen materiellen Punkte die Geschwindigkeit c längs der Fall-linie nach aufwärts erteilt wird, so ist die Bewegung anfangs gleichförmig verzögert, dann wird in einem gewissen Augenblicke ein Umkehrpunkt erreicht und der Punkt gleitet nachher abwärts mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Parabolische Bewegung.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit c nicht senkrecht zu der Kante k und somit von verschiedener Richtung mit der constanten Beschleunigung $g \sin \alpha$, so entsteht eine der parabolischen Wurfbewegung ganz analoge Bewegung in einer in der geneigten Ebene liegenden Parabel (vergl. p. 67).

§ 42.

Bewegung eines schweren Punktes in einem verticalen Kreise.

Geschwindigkeit.

Der materielle Punkt möge seine Bewegung in einem Punkte M_0 des Kreises (Fig. 117) mit der Anfangsge-

schwindigkeit c beginnen. Diese Anfangsgeschwindigkeit kann man sich dadurch entstanden denken, dass der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit von einem Punkte H aus längs einer Curve oder einer Geraden gefallen ist, welche den Kreis im Punkte M_0 berührt. Es seien r der Radius des Kreises, h, y_0 und y bez. die Abstände der Punkte H, M_0 und M von der horizontalen Tangente im untersten Punkte A des Kreises. Der verticale Höhenunterschied

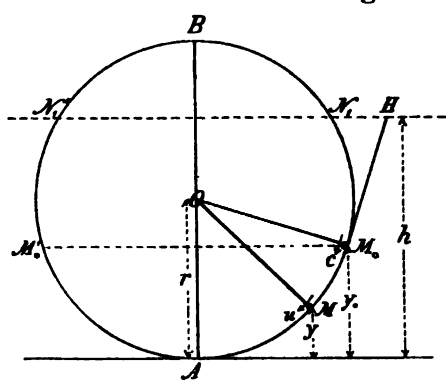


Fig. 117.

zwischen M_0 und H beträgt dann $h-y_0$ und ist die zur Geschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe, so dass (p. 25)

$$c = \sqrt{2g(h-y_0)}$$

folgt. In dem Punkte M ist die Geschwindigkeit u

$$u = \sqrt{2g(h-y)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen oder unmittelbar aus der Gleichung (116) ergiebt sich

$$u^2 = c^2 + 2g(y_0 - y). \tag{117}$$

Hieraus geht hervor, dass die Geschwindigkeit u grösser ist als die Geschwindigkeit c für $y_0 > y$, d. h. unterhalb der Horizontalen durch M_0. Ihren grössten Wert erreicht die Geschwindigkeit in dem untersten Punkte A des Kreises, und zwar findet man

$$u_{max} = \sqrt{2gh}.$$

In dem zu M_0 symmetrischen Punkte M_0' ist die Ge-

schwindigkeit gleich c, in Punkten des Kreises oberhalb M_0M_0' kleiner als c, und zwar um so mehr, je höher der Punkt steigt. Damit u den Wert Null annehme, muss

$$c^2 + 2g(y_0 - y) = 0$$

sein, woraus

$$y = y_0 + \frac{c^2}{2g} = h$$

folgt. Weil aber der Punkt gezwungen ist auf dem Kreise zu bleiben, so sind nur den Ungleichheiten

$$0 \lesseqgtr y \leqq 2r$$

Einteilung der Bewegungen.

genügende Werte von y möglich. Es können nun drei Fälle vorkommen, je nachdem

1) $h > 2r$ 2) $h = 2r$ 3) $h < 2r$

ist. Diese drei Fälle lassen sich auch so charakterisiren, dass eine horizontale Gerade durch H im ersten Falle oberhalb des Kreises liegt, im zweiten Falle den Kreis in seinem höchsten Punkte B berührt und im dritten Falle den Kreis in zwei Punkten schneidet.

Im ersten Falle wird die Geschwindigkeit der Bewegung im Kreise nie gleich Null. Der kleinste Wert kommt im Punkte B vor und beträgt

$$u_{\min} = \sqrt{2g(h - 2r)}.$$

Der Punkt macht jetzt volle Umläufe im Kreise.

Im zweiten Falle entspricht die Geschwindigkeit $u = 0$ dem höchsten Punkte B des Kreises. Wie eine nähere Untersuchung zeigt, wird aber diese Lage nicht in endlicher Zeit erreicht. Man sagt, dass der von M_0 ausgegangene Punkt sich asymptotisch dem Punkte B nähert.

Im dritten Falle ist die Geschwindigkeit gleich Null in den beiden Schnittpunkten N_1 und N_1' der Horizontalen durch H mit dem Kreise. Sie sind Umkehrpunkte der Bewegung, welche in einer Schwingung hin und her zwischen diesen Punkten besteht.

Der normale Druck.

Wird der Winkel, welchen der Radius OM mit OA bildet, mit φ bezeichnet (Fig. 118), wobei φ positiv nach rechts, negativ nach links gerechnet wird, so erhält man vermittelst der Gleichung (115) für den Normaldruck N, den die kreisförmige Bahn auf den Punkt ausübt,

$$N - mg\cos\varphi = m\frac{u^2}{r}; \tag{118}$$

ferner folgt mit Hülfe der Relationen

$$u^2 = 2g(h-y)$$

und

$$\cos\varphi = \frac{r-y}{r},$$

$$N = \frac{2h+r-3y}{r}mg. \tag{119}$$

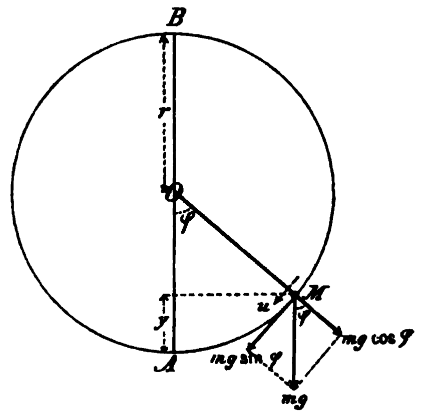


Fig. 118.

N ist ein Maximum im Punkte A und zwar hat man

$$N_{\max} = \frac{2h+r}{r}mg;$$

je grösser y wird, desto kleiner ist N.

In dem auf p. 210 betrachteten Falle 1), in welchem der höchste Punkt B des Kreises erreicht wird, ergiebt sich in diesem Punkte der kleinste Wert des Druckes N

$$N_{\min} = \frac{2h-5r}{r}mg.$$

Damit dieser Druck positiv, d. h. nach innen gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet sei, wobei zugleich der Druck in allen Punkten des Kreises nach innen gerichtet ist, muss

$$h > \tfrac{5}{2} r$$

sein. Die horizontale Gerade durch den Punkt H muss in einem Abstande $h' = h - 2r > \frac{r}{2}$ oberhalb des höchsten Punktes des Kreises liegen; dann ist nur eine äussere Bahnwand erforderlich um den Punkt zu zwingen in seiner Bahn zu verbleiben. Ein Beispiel hiervon ist die sog. **Centrifugalbahn** (Fig. 119), welche Gelegenheit zu einem lehrreichen Experimente bietet. Dabei bezeichnet r den Krümmungsradius der Schleife in ihrem höchsten Punkte.

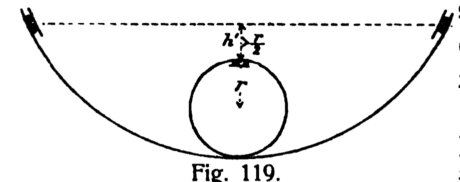


Fig. 119.

Wenn die Bedingung

$$h - 2r > \frac{r}{2}$$

nicht erfüllt ist, so giebt es zwei symmetrisch liegende Punkte des Kreises, in welchen der Druck N gleich Null ist. Bezeichnet man mit z ihre Höhe über der Horizontalen durch A, so findet man

$$z = \frac{2h + r}{3}.$$

Wenn die Begrenzung in der Weise einseitig ist, dass der Punkt sich nach innen vom Kreise entfernen kann, so trifft dies in den betrachteten Punkten wirklich ein. Der Punkt bewegt sich nachher wie ein freier Punkt und beschreibt unter dem Einfluss der Schwere eine Parabel, welche den Kreis berührt; die Anfangsgeschwindigkeit der parabolischen Bewegung in diesem Punkte ist gleich der Geschwindigkeit der Bewegung im Kreise.

Ein besonderer Fall der Bewegung eines schweren Punktes in einem verticalen Kreise ist die Bewegung des sog. mathematischen Pendels.

§ 43.

Das mathematische Pendel.

Unter einem mathematischen oder einfachen Pendel versteht man einen schweren materiellen Punkt, welcher vermittelst eines gewichtlosen, unbiegsamen Fadens mit einem festen Punkte verbunden ist. Das Pendel schwingt in einer Verticalebene zwischen zwei Grenzlagen hin und zurück. Es werde angenommen, dass diese Grenzlagen nicht sehr weit von einander entfernt seien; unter dieser Voraussetzung soll ein angenäherter Ausdruck für die Schwingungszeit des Pendels hergeleitet werden.

Geschwindigkeit.

Der grösste Ausschlagswinkel oder die Amplitude, welche der Grenzlage N_1 angehört, sei α. Der anderen Grenzlage N_1' entspricht dann der Ausschlagswinkel $-\alpha$. Dem Winkel φ zwischen dem Pendelfaden OM und der Verticalen entspricht die Geschwindigkeit u, welche die verticale Höhendifferenz zwischen N_1 und M zur Geschwindigkeitshöhe hat (Fig. 120). Man erhält also

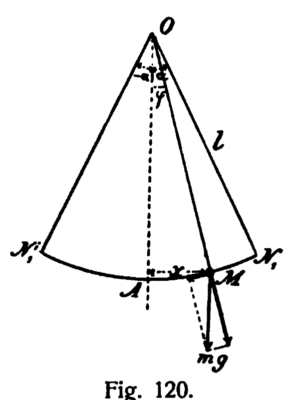


Fig. 120.

$$u^2 = 2g(l\cos\varphi - l\cos\alpha), \tag{120}$$
$$u = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

In dem tiefsten Punkte A hat die Geschwindigkeit den Wert

$$u_{\max} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Spannung des Fadens.

In der Lage M werde das Gewicht mg des materiellen Punktes in die beiden Componenten $mg\cos\varphi$ in der

Richtung des Pendelfadens und $mg \sin \varphi$ in der Richtung der Tangente der Bahn zerlegt. Die erstere Componente ist gleich dem Unterschiede zwischen der Spannung des Fadens, deren Wert $mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha)$ aus den Gleichungen (118) und (120) folgt, und der Centripetalkraft; der zweiten Componente entspricht die tangentiale Beschleunigung

$$g \sin \varphi = g \frac{x}{l},$$

wo x den Abstand des Punktes M von der Verticalen des Aufhängepunktes O bezeichnet. Die tangentiale Beschleunigung ist somit proportional dem Abstande des Punktes von der Verticalen durch O. Bei kleinen Amplituden α kann man mit einer gewissen Annäherung den Abstand x durch den Bogen zwischen M und dem tiefsten Punkte A ersetzen. Die Beschleunigung in der Bahn ist also annähernd proportional dem Abstande von einem festen Punkte der Bahn, und die Bewegung in der Bahn folglich sehr nahe eine einfache oscillirende Bewegung. Nach der Gleichung (108) ist die Zeit einer einfachen Schwingung gleich dem Quotienten von π durch die Quadratwurzel aus dem Zahlwerte a_0 der Beschleunigung in dem Abstande 1. Es ergiebt sich jetzt

Schwingungszeit.

$$a_0 = \frac{g}{l};$$

die Schwingungszeit des Pendels ist also

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{121}$$

Dieser angenäherte Ausdruck der Schwingungszeit ist etwas kleiner als der wahre Wert, weil der Abstand x kürzer als der Bogen, und somit die Tangentialbeschleunigung der Pendelbewegung kleiner als die Tangentialbeschleunigung der einfachen oscillirenden Bewegung ist, durch

welche die Pendelbewegung ersetzt wurde. So lange die Amplitude α klein ist, übt sie jedoch kaum einen merkbaren Einfluss auf die Schwingungszeit T aus. Zwei Pendel mit derselben Pendellänge aber verschiedenen Amplituden führen deshalb i s o c h r o n e Schwingungen aus.

Wenn die Pendellänge gemessen und die Schwingungszeit T beobachtet worden ist, so kann der Wert von g aus der Formel (121) berechnet werden, und zwar ergiebt sich

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

In der That bieten die Pendelbeobachtungen das beste Mittel zur Bestimmung von g dar. In dieser Weise ist auch die Veränderlichkeit der Schwere mit dem Orte an der Erdoberfläche untersucht worden.

Secundenpendel.

Nimmt man in der Formel (121)

$$T = 1 \text{ Secunde},$$

so erhält man als Länge des sog. S e c u n d e n p e n d e l s

$$L = \frac{g}{\pi^2}.$$

So entspricht z. B. dem Werte $g = 9.806 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$ die Länge

$$L = 0.994 \text{ m}.$$

§ 44.

Relative Bewegung eines materiellen Punktes.

Bei der in § 33 behandelten relativen Bewegung eines geometrischen Punktes kamen drei Geschwindigkeiten in Betracht: die absolute Geschwindigkeit, die relative Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit des zu-

sammenfallenden Systempunktes; die erstere ist die Resultirende der beiden anderen.

Ferner hatte man vier verschiedene Beschleunigungen zu berücksichtigen: 1) die absolute Beschleunigung a, 2) die relative Beschleunigung a_r, 3) die Beschleunigung a_s des zusammenfallenden Systempunktes und 4) die zusammengesetzte centripetale Beschleunigung a_c. Die absolute Beschleunigung ist die Resultirende der drei übrigen.

Die Kräfte bei der relativen Bewegung.

Diesen vier Beschleunigungen entsprechen beim materiellen Punkte mit der Masse m vier Kräfte: 1) die absolute Kraft, welche dieselbe Richtung wie die absolute Beschleunigung und die Grösse $P = ma$ hat, 2) die relative Kraft, mit der Richtung der relativen Beschleunigung und der Grösse $P_r = ma_r$, 3) die sog. Mitführungskraft, worunter eine Kraft von der Richtung der Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes und von der Grösse $P_s = ma_s$ verstanden wird, sowie 4) die zusammengesetzte Centripetalkraft, welche die Richtung der zusammengesetzten centripetalen Beschleunigung und die Grösse $P_c = ma_c = 2\, m\omega u_r \sin(\omega u_r)$ besitzt.

Der Satz von den Beschleunigungen bei der relativen Bewegung liefert nun unmittelbar für die Kräfte den Satz: ***Die absolute Kraft ist die Resultirende aus der relativen Kraft, der Mitführungskraft und der zusammengesetzten Centripetalkraft*** (Fig. 121).

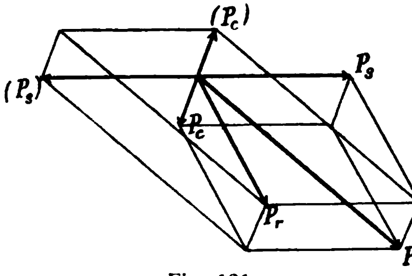


Fig. 121.

Man kann auch die relative Kraft finden, wenn die drei anderen Kräfte gegeben sind. Es ist nämlich *die relative Kraft die Resultirende aus der absoluten Kraft, der in entgegengesetzter Rich-*

tung genommenen Mitführungskraft und der zusammengesetzten Centrifugalkraft (Fig. 121). Die zusammengesetzte Centrifugalkraft ist gleich und entgegengesetzt der zusammengesetzten Centripetalkraft.

Die absolute Kraft heisst oft die wahre Kraft, die relative Kraft scheinbare Kraft, weil sie einem Beobachter als einzige Bewegungskraft erscheint, wenn er an der Bewegung des Raumes teilnimmt. Die der Mitführungskraft entgegengesetzt gleiche Kraft wird manchmal Trägheitswiderstand genannt. Mit diesen Benennungen erhält man in denjenigen auf p. 147 erwähnten speciellen Fällen, in welchen die Centripetalkraft gleich Null ist, den Satz: *Die scheinbare Kraft ist die Resultirende der wahren Kraft und des Trägheitswiderstandes.*

Die Mitführungskraft ändert sich im allgemeinen von Punkt zu Punkt innerhalb des bewegten Raumes. Wenn aber die Bewegung des Raumes translatorisch ist, so haben alle Punkte dieselbe Beschleunigung, und die Mitführungskraft ist in allen Punkten dieselbe. In diesem Falle ist auch die zusammengesetzte Centripetalkraft gleich Null. Ist die translatorische Bewegung des Raumes noch specieller geradlinig und gleichförmig, so sind die Beschleunigung und die Mitführungskraft in jedem Punkte gleich Null. Es besteht dann der Satz: *In einem gleichförmig fortschreitenden Raume fallen die wahre und die scheinbare Kraft zusammen.*

Innerhalb eines Raumes, welcher sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe dreht, kommt einem Punkte in dem Abstande r von der Axe die Centripetalbeschleunigung

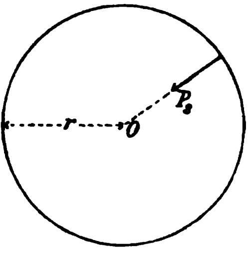


Fig. 122.

$$\frac{u^2}{r} = \omega^2 r$$

zu, welche senkrecht zu der Axe und längs des Radius nach innen gerichtet ist. Die Mitführungskraft ist somit die Centripetalkraft

$$P_s = m\omega^2 r$$

und der Trägheitswiderstand die entgegengesetzte Kraft, die Centrifugalkraft. Die Grösse der Mitführungskraft wächst proportional dem Abstande r von der Drehaxe.

Wenn die Drehung des Raumes um eine feste Axe ungleichförmig ist, so setzt sich die Mitführungskraft aus der Centripetalkraft $m\omega^2 r$ und der Tangentialkraft $mr\varepsilon = mr\frac{d\omega}{dt}$ (vergl. § 20 p. 85) zusammen. Sie hat die Grösse

$$P_s = mr\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

steht senkrecht auf der Drehaxe und bildet mit dem Radius des Punktes einen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt}$$

bestimmten Winkel ϑ (Fig. 123).

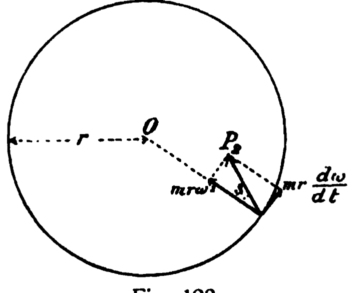


Fig. 123.

Relative Ruhe.

Wenn die relative Kraft gleich Null ist, so befindet sich der Punkt in sog. relativem Gleichgewichte, d. h. entweder in Ruhe innerhalb des beweglichen Raumes (statisches Gleichgewicht) oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung innerhalb dieses Raumes (dynamisches Gleichgewicht). Im ersteren Falle ist die relative Geschwindigkeit fortwährend Null und folglich auch die zusammengesetzte Centripetalkraft Null. Weil ferner die relative Kraft Null ist, so fällt die absolute Kraft mit der Mitführungskraft zusammen. Man kann dieses Resultat auch so

ausdrücken: *Bei relativer Ruhe halten sich die wahre Kraft und der Trägheitswiderstand das Gleichgewicht.* Beide sind also gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

Oft ist es vorteilhaft statt einer Bewegung eines Punktes eine relative Ruhe desselben Punktes zu betrachten und zwar innerhalb eines Raumes, welchen man sich so bewegt denkt, dass der mit dem Punkte zusammenfallende Systempunkt die nämliche Bewegung wie der Punkt selbst hat. Zu den auf den Punkt wirkenden Kräften fügt man dann den Trägheitswiderstand bei der Bewegung des gedachten Raumes hinzu und wendet auf das so erhaltene Kraftsystem die Gleichgewichtsbedingungen an.

Wenn ein materieller Punkt sich z. B. gleichförmig mit der Geschwindigkeit u in einem Kreise vom Radius r bewegt, so bleibt er in Ruhe innerhalb eines Raumes, welcher sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{u}{r}$ in dem Sinne der Bewegung um die Axe des Kreises dreht. Der Trägheitswiderstand ist hier die Centrifugalkraft $m\omega^2 r$; diese ist im Gleichgewicht mit den auf den Punkt wirkenden gegebenen Kräften, deren Resultirende in der That die Centripetalkraft sein muss.

§ 45.

Beispiele des relativen Gleichgewichtes innerhalb eines sich gleichförmig drehenden Raumes.

Centrifugalpendel.

1) Das Centrifugalpendel. Ein Centrifugalpendel ist ein mathematisches Pendel, dessen Pendelkugel sich in einem horizontalen Kreise bewegt anstatt in einer verticalen Ebene zu oscilliren. Der Pendelfaden beschreibt dabei eine Kegelfläche. Damit die Bewegung des Centrifugalpendels zu Stande komme, entfernt man

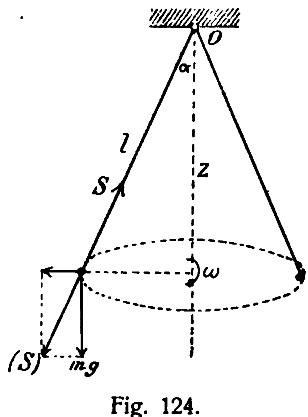


Fig. 124.

die Pendelkugel aus der Gleichgewichtslage, so dass der Pendelfaden mit der Verticalen einen gewissen Winkel α bildet (Fig. 124), und erteilt der Kugel eine gewisse bestimmte Geschwindigkeit u senkrecht zu der Verticalebene durch den Faden. Die Beziehung zwischen α und u soll zuerst abgeleitet werden. Die Pendelkugel befindet sich in relativem Gleichgewichte innerhalb eines Raumes, welcher sich um die Verticale durch den Aufhängepunkt O im Sinne der Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{u}{l \sin \alpha}$$

gleichförmig dreht. Die Pendelkugel kann als ein freier materieller Punkt betrachtet werden, wenn man die Spannung S des Fadens durch eine gleich grosse äussere Kraft ersetzt. Ausserdem wirkt auf die Kugel ihre Schwere mg. Die Kräfte S und mg müssen jetzt der Centrifugalkraft

$$m\omega^2 l \sin \alpha$$

das Gleichgewicht halten. Aus dem Kräftedreiecke mit den Seiten S, mg und $m\omega^2 l \sin \alpha$ ergiebt sich dann

$$m\omega^2 l \sin \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha;$$

man erhält also die Relation

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

oder auch

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{u^2}{gl}.$$

Der Abstand z des Punktes O von der Bahnebene der Pendelkugel ist

$$z = l \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2}.$$

Für die Umlaufszeit T folgt ferner

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}}, \tag{122}$$

d. h. *die Umlaufszeit eines Centrifugalpendels ist doppelt so gross als die einfache Schwingungszeit eines mathematischen Pendels, dessen Länge gleich dem Abstande des Aufhängepunktes des Centrifugalpendels von der Bahnebene der Pendelkugel ist.*

Sich drehendes Rohr.

2) Ein sich drehendes Rohr. Ein geneigtes gerades Rohr drehe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Axe (Fig. 125). Es fragt sich, ob eine kleine schwere Kugel irgendwo im Rohre in Ruhe verbleiben kann.

Auf die Kugel, deren Abstand von der Drehaxe gleich x sei, wirkt ihre Schwere mg und der auf der Axe des glatten Rohres senkrechte Druck N. Diese beiden Kräfte müssen zusammen mit der Centrifugalkraft $m\omega^2 x$ ein Gleichgewichtssystem bilden. Aus dem Dreiecke mit den Seiten mg, $m\omega^2 x$ und N ergiebt sich dann,

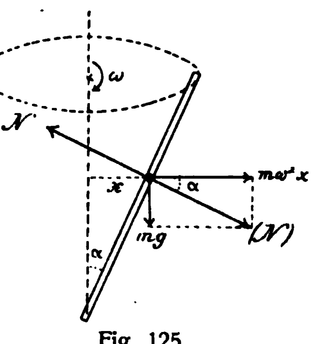


Fig. 125.

wenn α der Neigungswinkel des Rohres gegen die Verticale ist,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mg}{m\omega^2 x} = \frac{g}{\omega^2 x}$$

und

$$x = \frac{g}{\omega^2 . \operatorname{tg} \alpha}.$$

Damit ist die Gleichgewichtslage bestimmt. Eine solche ist wie ersichtlich immer dann vorhanden, wenn die von der Drehaxe aus gerechnete Rohrlänge grösser als $\frac{g}{\omega^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}$ ist. Der Druck N der Rohrwand beträgt

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

3) Relatives Gleichgewicht in einem Rohr mit krummliniger Axe. Es entsteht jetzt die Frage, ob das rotirende Rohr im vorigen Beispiele so gekrümmt werden kann, dass die Kugel in allen Lagen im Gleichgewichte ist (Fig. 126).

Damit dies der Fall sei, muss für jede Lage der Kugel im Rohre die Resultirende (N) aus der Schwerkraft mg der Kugel und der Centrifugalkraft $m\omega^2 x$ senkrecht auf der Tangente der Axe des Rohres stehen. Bezeichnet man mit y die Höhe der Kugel über einem festen Punkte der Drehaxe, z. B. dem Schnittpunkte mit dem Rohre, so ist die Bedingung dafür

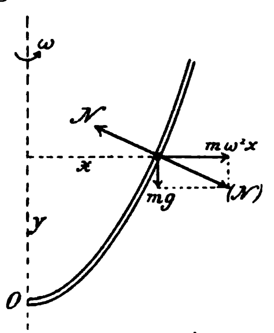


Fig 126.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Daraus folgt

$$dy = \frac{\omega^2}{g} x \, dx$$

und

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C,$$

ferner, wenn die Werte $x = 0$ und $y = 0$ einander entsprechen müssen, als Gleichung der gesuchten Curve

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

oder

(123) $$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y.$$

Die Axe des Rohres muss folglich eine Parabel mit dem Parameter $\frac{2g}{\omega^2}$ sein. Wenn die Winkelgeschwindigkeit ω geändert wird, so hört die relative Ruhe der Kugel im Rohre auf, ausser in dem auf der Drehaxe gelegenen Scheitel O der Parabel, wo es für alle Werte von ω vorhanden ist. Wächst ω, so steigt die Kugel beständig, nimmt ω ab, so sinkt die Kugel fortwährend.

Centrifugalregulator.

4) Der Centrifugalregulator. Man könnte das oben beschriebene parabolische Rohr mit seiner Kugel gebrauchen um die Ganggeschwindigkeit einer Dampfmaschine zu reguliren. Das Rohr müsste dann an einer von der Maschine getriebenen verticalen Axe befestigt sein, und die Kugel durch irgend eine Einrichtung, z. B. durch ein System von Hebeln, derart mit einem Ventil verbunden sein, welches den Dampfzufluss im Cylinder regulirt, so dass das Ventil sich mehr schliesst und den Dampfzufluss vermindert, wenn die Kugel steigt, und sich mehr öffnet und den Dampfzufluss vergrössert, wenn die Kugel im Rohre sinkt. Zu diesem Zwecke wird der sog. Centrifugalregulator benützt, welcher dasselbe Princip in mehr praktischer Weise verwirklicht (Fig. 127). An der verticalen sich drehenden Axe ist ein Querstück OO' befestigt, welches vermittelst zweier Gelenke bei O und O' zwei leichte Stäbe trägt, die in einer verticalen Ebene drehbar sind. An den unteren Enden dieser Stäbe befinden sich zwei Kugeln P und P', durch zwei andere Stäbe AC und $A'C'$ sind sie mit einer längs der Drehaxe gleitenden Hülse CC' verbunden, welche ihrerseits durch ein Hebelsystem mit dem directen Regulator an der Kraftquelle, z. B. einem Drosselventil in Verbindung steht. Die Construction ist symmetrisch in Bezug auf die verticale Axe. Der Punkt O und der Abstand

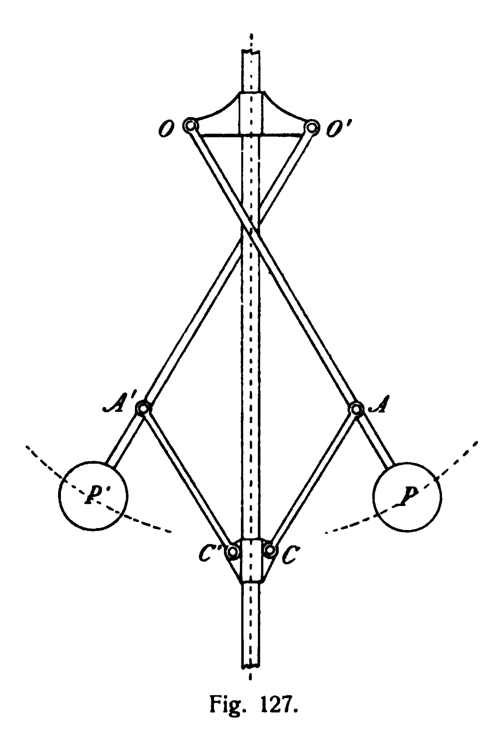


Fig. 127.

OP sind so gewählt, dass der Kreis, auf welchem der Mittelpunkt von P in der Verticalebene beweglich ist, der Krümmungskreis einer im Beispiele 3) oben betrachteten Gleichgewichtsparabel ist. Wenn P sich nur unbedeutend aus der normalen Lage entfernt, sind die Bedingungen genügend genau dieselben wie bei dem parabolischen Rohre.

Als die für den Centrifugalregulator gegebenen Grössen hat man die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um die verticale Axe bei normalem Gange der Maschine sowie den Abstand x_0 des Mittelpunktes der Kugel P von der Drehaxe zu betrachten. Es kann x_0 beliebig angenommen werden (Fig. 128). Unbekannt sind der Krümmungsradius $OP = \varrho_0$ der Gleichgewichtsparabel und der Abstand a des Punktes O von der Drehaxe.

Bezeichnet man ähnlich wie in der Figur 126 die Coordinaten eines Punktes der Parabel mit x und y, so ist ihre Gleichung nach (123)

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y.$$

Der Krümmungsradius der Parabel hat den Wert

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(g^2 + \omega^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{g^2\omega^2},$$

und somit ergiebt sich für den gesuchten Krümmungsradius ϱ_0

$$\varrho_0 = \frac{\{g^2 + \omega^4 x_0^2\}^{\frac{3}{2}}}{g^2\omega^2}.$$

Den Abstand a findet man durch Projection der gebrochenen Linie $NPOB$ auf eine horizontale Gerade:

$$a = \varrho_0 \cos \alpha_0 - x_0.$$

Aus der allgemeinen Formel

$$\cos \alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\omega^2 x}{\sqrt{g^2 + \omega^4 x^2}}$$

erhält man $\cos \alpha_0$ und findet nach einer einfachen Transformation

$$a = \frac{\omega^4 x_0^3}{g^2}.$$

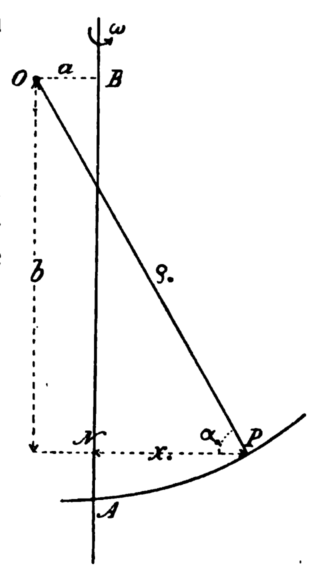


Fig. 128.

Schliesslich ergiebt sich für den Abstand $BN = b$

$$b = \varrho_0 \sin \alpha_0 = \frac{g^2 + \omega^4 x_0^2}{g\omega^2}.$$

§ 46.

Die Abhängigkeit der Schwere von der Polhöhe.

Wegen der Drehung der Erde um ihre Axe ist das Gleichgewicht von Körpern an ihrer Oberfläche ein relatives. Die Erde dreht sich gleichförmig und macht einen Umlauf in 23 St. 56 Min. 4 Sec. = 86164 Sec. Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung (vergl. p. 86).

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0.00007292 \frac{\text{abs. Winkeleinh.}}{\text{Sec.}}.$$

Der Erdradius ändert sich etwas mit der Polhöhe, und nimmt von dem Werte 6356100 m an den Polen bis zu dem Werte 6377400 m am Äquator zu. Mit einer gewissen Annäherung kann die Erde als eine Kugel vom Radius

$$r = 6371000 \text{ m}$$

betrachtet werden.

Relative Ruhe.

Auf einen materiellen Punkt mit der Masse m wirkt am Äquator die Anziehung mp der Erde oder das wahre Gewicht des Körpers. Bei der relativen Ruhe des Körpers auf einer horizontalen Unterlage findet Gleichgewicht zwischen dem wahren Gewichte, der Centrifugalkraft $m\omega^2 r$ und dem Drucke der Unterlage statt. Der in entgegengesetzter Richtung genommene Druck ist das scheinbare Gewicht des Körpers (das Gewicht, das wir messen); es werde mit mg_0 bezeichnet (Fig. 129). Man hat also

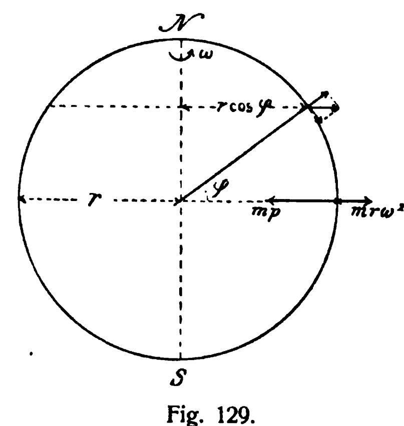


Fig. 129.

$$mg_0 = mp - mr\omega^2,$$

$$(124) \quad g_0 = p - r\omega^2,$$

wo g_0 die Beschleunigung der Schwere am Äquator ist. Die Differenz zwischen dem Werte p, welcher der als unbeweglich betrachteten Erde entsprechen würde, und dem wirklichen Werte g_0 beträgt

$$r\omega^2 = 6371000 \times 0.00007292^2 = 0.03388 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}.$$

An einem Orte mit der Polhöhe φ hat die Centrifugalkraft den Wert

$$mr\omega^2 \cos\varphi.$$

Diese Kraft werde in zwei Componenten zerlegt, nach der Richtung des Erdradius und nach der Richtung der Tangente des Meridians. Die erstere hat den Wert $mr\omega^2 \cos^2\varphi$, die zweite ist $mr\omega^2 \cos\varphi \sin\varphi$. Das scheinbare Gewicht ist

$$mg = mp - mr\omega^2 \cos^2\varphi;$$

die Beschleunigung der Schwere am Orte mit der Polhöhe φ ist also

$$g = p - r\omega^2 \cos^2\varphi. \tag{125}$$

Eliminirt man p zwischen den Gleichungen (124) und (125), so erhält man die Formel

$$g = g_0 + r\omega^2 \sin^2\varphi$$

und durch Einsetzung der Zahlwerte

$$g = 9.7806 + 0.03388 \sin^2\varphi \, \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}. \tag{126}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die Abhängigkeit der Schwere am Meeresspiegel von der Polhöhe.

Die Formel (126) liefert aber Werte, die mit der Erfahrung nicht übereinstimmen. Die Ursache liegt in der Abweichung der Erde von der genauen Kugelgestalt. In der That hat die Erde sehr nahe die Form eines Umdrehungsellipsoides oder sog. Sphäroides mit den auf p. 226 angeführten Polar- und Äquatorialradien.

Der Formel (126) kann auch die Form

$$g = 9.7975 - 0.01694 \cos 2\varphi \, \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$$

gegeben werden. Durch directe Pendelbeobachtungen

hat man die statt dieser Formel anzuwendende, gute Werte liefernde ähnlich gebaute Formel

$$(127) \qquad g = 9.806 - 0.0254 \cos 2\varphi = \\ = 9.806\,(1 - 0.00259 \cos 2\varphi)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}$$

erhalten. Das erste Glied auf der rechten Seite

$$9.806\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}$$

ist die Beschleunigung der Schwere bei 45° Breite. Am Äquator findet man

$$g_0 = 9.781\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2},$$

an den Polen

$$g = 9.831\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Sec}^2}.$$

Relative Bewegung. In dem oben betrachteten Falle der relativen Ruhe ist die zusammengesetzte Centrifugalkraft gleich Null. Bei einer Bewegung an der Erdoberfläche wirkt dagegen ausser dem Trägheitswiderstande, d. h. der Centrifugalkraft der Erde, eine durch die Erddrehung verursachte zusammengesetzte Centrifugalkraft. Es mögen einige Beispiele für die Wirkung dieser Kraft angeführt werden, jedoch ohne Ableitung.

Ein Körper, welcher ohne Anfangsgeschwindigkeit frei fällt, weicht etwas, wenn auch sehr wenig von der Verticalen durch die Anfangslage ab, und zwar nach Osten.

Ein Körper, welcher längs einer völlig glatten horizontalen Ebene geworfen wird, bewegt sich nicht genau geradlinig in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, sondern weicht auf der nördlichen Halbkugel sehr schwach nach rechts ab, so dass die Bahn annähernd ein Kreisbogen mit sehr grossem Radius ist.

Die Schwingungsebene eines Pendels dreht sich gleich-

förmig um die Verticale durch den Aufhängungspunkt. Auf der nördlichen Halbkugel geschieht die Drehung in der Richtung von Osten durch Süden nach Westen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, φ die Polhöhe ist.

§ 47.

Mechanische Arbeit und Arbeitsvermögen.

Definition der Arbeit.

Ein materieller Punkt beschreibe das Stück s längs einer Geraden (Fig. 130) unter dem Einflusse einer auf den Punkt wirkenden constanten Kraft P, deren Richtungslinie die Gerade selbst ist. Je nachdem die Richtung der Kraft P mit der Bewegungsrichtung übereinstimmt oder nicht, nennt man das Product

Fig. 130.

$$A = P \,.\, s,$$

oder das Product

$$A = - P \,.\, s$$

die mechanische Arbeit oder einfacher die Arbeit während der zur Zurücklegung der Strecke s verbrauchten Zeit.

Die mechanische Arbeit ist demnach das Product aus einer Kraft und einer Länge; folglich ist die Einheit der Arbeit das Product der Krafteinheit und der Längeneinheit:

Einh. der Arbeit = Krafteinh. × Längeneinh.

z. B. kg m oder Tonnen m.

Der oben betrachtete Fall, für welchen die mechanische Arbeit definirt wurde, ist ein sehr specieller Fall. Einen etwas allgemeineren Fall erhält man, wenn das Bahn-

stück s geradlinig ist, die Kraft P unveränderlich bleibt und mit der Bewegungsrichtung den unveränderlichen Winkel α einschliesst (Fig. 131): *Unter der Arbeit der Kraft P während der Bewegung von A nach B wird dann das Produkt aus dem Wege und der Projection der Kraft auf die Richtung der Bewegung verstanden,* d. h.

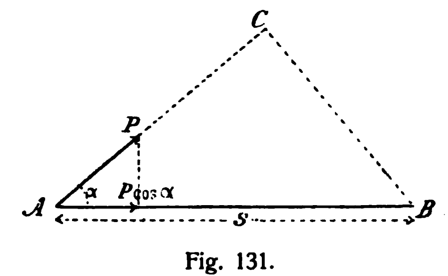


Fig. 131.

$$A = P \cos \alpha \, . \, s. \tag{128}$$

Dieser Gleichung kann auch die Form

$$A = P \, . \, s \cos \alpha$$

gegeben werden; *die Arbeit lässt sich also auch auffassen als das Product aus der constanten Kraft und der Projection des Weges auf die Richtung der Kraft.*

Für $\alpha = 0$ folgt $A = Ps$ und für $\alpha = 180^\circ$ $A = -Ps$, man erhält wieder die beiden obigen Specialfälle. Für $\alpha = 90^\circ$ ergiebt sich $A = 0$, d. h. *eine Kraft, welche senkrecht auf der Bewegungsrichtung ihres Angriffspunktes steht, verrichtet keine mechanische Arbeit.*

Die Arbeit ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel α spitz oder stumpf ist.

Die Definition, nach der die Arbeit gleich dem Producte aus der Kraft und der Projection des Weges auf die Richtung der Kraft ist, gilt noch bei einer krummlinigen Bahn, falls die Kraft der Grösse und Richtung nach constant bleibt. So hat man in der Figur 132

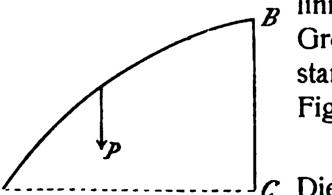


Fig. 132.

$$A = P \, . \, \overline{BC}.$$

Die Projection heisst auch der in der Richtung der Kraft zurück-

gelegte Weg und wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Richtung, in der die Projection bei der Bewegung beschrieben wird, mit der Richtung der Kraft übereinstimmt oder nicht.

Im allgemeinen ist die Kraft P, deren Arbeit berechnet werden soll, veränderlich; die Definition der mechanischen Arbeit muss also entsprechend erweitert werden. In einem unendlich kurzen Zeitabschnitte $\triangle t$ werde eine Wegstrecke $\triangle s$ zurückgelegt (Fig. 133). Dieses Bahnstück kann als geradlinig und die Kraft P während der kleinen Zeit $\triangle t$ der Grösse und Richtung nach als constant betrachtet werden. Nach der Gleichung (128) ist die verrichtete Arbeit dann

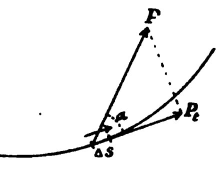


Fig. 133.

$$\triangle A = P \,.\, \triangle s \,.\, \cos a,$$

wo a den Winkel zwischen den Richtungen der Kraft und der Bewegung bezeichnet und $\triangle s$ in der Richtung der Bewegung gerechnet wird. Man nennt $\triangle t$ die elementare Arbeit der Kraft P während der Zeit $\triangle t$. Ein endlicher Zeitraum kann in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Zeitelemente $\triangle t$ zerlegt werden. Die Summe aller in diesen Zeitabschnitten verrichteten elementaren Arbeiten heisst die totale Arbeit der Kraft P oder kürzer die Arbeit der Kraft während des betrachteten Zeitraumes. Der allgemeine Ausdruck für die Arbeit einer Kraft bei der Bewegung ihres Angriffspunktes ist somit

Elementare Arbeit.

$$A = \Sigma \,(P \cos a \,.\, \triangle s)$$

oder den Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung nach

$$(129) \qquad A = \int_{s_0}^{s_1} P \cos a \,.\, ds,$$

wo das Integral von dem Anfangswerte s_0 des Wegabstandes bis zu dem Endwerte s_1 der Bewegung sich erstreckt.

Da $P \cos \alpha$ die Tangentialcomponente P_t der Kraft P ist, kann man der Gleichung (129) auch die Form geben:

$$(130) \qquad A = \Sigma (P_t \,.\, \triangle s) = \int_{s_0}^{s_1} P_t \, ds.$$

Die Arbeit einer Kraft bei einer beliebigen Bewegung ihres Angriffspunktes ist also gleich der Arbeit der Tangentialcomponente der Kraft. Die auf der Bahn senkrechte Componente verrichtet keine Arbeit. Bleibt die Kraft fortwährend eine normale Kraft, ohne Tangentialcomponente, so ist ihre totale Arbeit gleich Null. Als Beispiel hiefür diene die Centripetalkraft in einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Diagramm der Arbeit. In der Praxis kommt oft der Fall vor, dass der Angriffspunkt der Kraft sich geradlinig bewegt, und die Kraft längs der geradlinigen Bahn wirkt, aber ihrer Grösse nach veränderlich ist. Die Arbeit kann dann vermittelst eines Diagrammes dargestellt werden (Fig. 134), indem man den Wegabstand s als Abscisse und die Kraft als Ordinate in einem rechtwinkligen Coordinatensystem abträgt. Man erhält dabei eine Curve; für die Fläche, welche zwischen der Curve, der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten bei

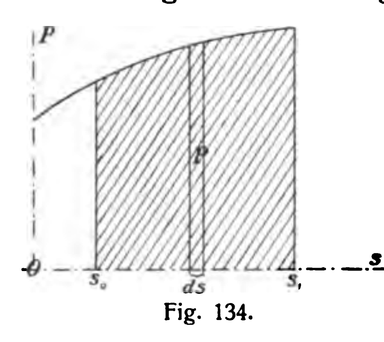


Fig. 134.

s_0 und s_1 liegt, ergiebt sich der Inhalt

$$A = \int_{s_0}^{s_1} P \,.\, ds.$$

Dieser Ausdruck stellt also in dem jetzt betrachteten Falle die Arbeit dar. Der Flächeninhalt des Diagramms oder die Arbeit kann vermittelst eines Planimeters gemessen werden.

Unter der Voraussetzung einer geradlinigen Bahn und einer längs der Bahn wirkenden Kraft ist der Fall möglich, dass Bewegung und Kraft ihre Richtung wechseln, wobei man auch negative Ordinaten der Diagrammcurve erhält. Die Fig. 135 zeigt das sog. Indicatordiagramm für den Dampfdruck auf den Kolben eines Dampfcylinders. Die Bewegung ist periodisch, so dass die Diagrammcurve eine geschlossene wird. Wie man leicht einsieht, stellt der Flächeninhalt der geschlossenen Figur die bei der Bewegung des Kolbens bei einmaligem Hin- und Hergang verrichtete Arbeit dar.

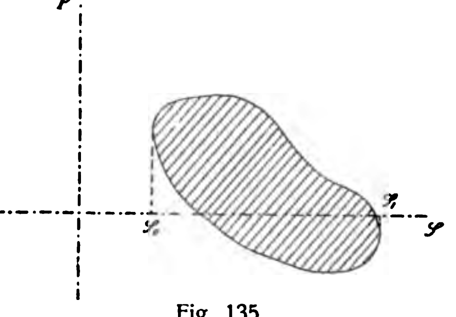


Fig. 135.

Arbeit der Resultirenden.

Arbeit der Resultirenden: *Die Arbeit der Resultirenden mehrerer Kräfte, die auf einen materiellen Punkt wirken, ist gleich der Summe der Arbeiten aller Componenten.*

Zu einer Zeit t seien die Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$, ihre Winkel mit der Richtung der Bewegung bez. α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, die Resultirende der Kräfte R und ihr Winkel mit derselben Richtung α (Fig. 136). Die Kraft R ist die letzte Seite des aus allen

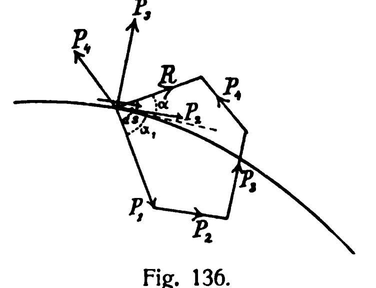


Fig. 136.

Kräften P construirten Kräftepolygons; ihre Projection auf eine beliebige Richtung ist gleich der Summe der Projectionen aller Componenten auf dieselbe Richtung. Es ist also

$$R \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cos \alpha_n.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem in dem Zeitelemente dt zurückgelegten Wegelemente ds, so ergiebt sich

$$R \cos \alpha \, ds = P_1 \cos \alpha_1 \, ds + P_2 \cos \alpha_2 \, ds + \ldots + P_n \cos \alpha_n \, ds.$$

Dieser Gleichung zufolge ist die elementare Arbeit der Resultirenden gleich der Summe der elementaren Arbeiten sämtlicher Componenten. Durch Integration zwischen zwei Grenzen s_0 und s_1 folgt ferner

$$(131) \quad \int_{s_0}^{s_1} R \cos \alpha \, ds = \int_{s_0}^{s_1} P_1 \cos \alpha_1 \, ds + \int_{s_0}^{s_1} P_2 \cos \alpha_2 \, ds + \ldots + \int_{s_0}^{s_1} P_n \cos \alpha_n \, ds,$$

d. h. die totale Arbeit der Resultirenden ist gleich der Summe der totalen Arbeiten aller Componenten, w. z. b. w.

Bezeichnet man mit X, Y und Z die Projectionen der Kraft P auf die x-, y- und z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und mit dx, dy und dz die Projectionen des Wegelementes ds auf dieselben Axen, dann stellen Xdx, Ydy und Zdz die Elementararbeiten der drei Componenten dar; die elementare Arbeit der Resultirenden ist nach dem obigen Satze

$$P \cos \alpha \, ds = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Für die totale Arbeit während eines Zeitraumes $t_1 - t_0$ folgt also

$$(132) \qquad A = \int_{t_0}^{t_1} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Arbeitseffect.

In manchen Fällen der Anwendung, z. B. dann, wenn es sich um die Arbeit von Maschinen handelt, ist es notwendig, auch die Zeit zu berücksichtigen, während welcher die Arbeit verrichtet wurde. Wenn in gleich grossen Zeiten immer gleich grosse Arbeiten verrichtet werden, so ist der Quotient aus der Arbeit A und der Zeit t constant; er heisst Arbeitsvermögen oder Arbeitseffect. Bezeichnet man diese Grösse mit E, so erhält man

$$E = \frac{A}{t}. \tag{133}$$

Nimmt man t gleich einer Zeiteinheit, so ist $E = A$, d. h. *gleich derjenigen Arbeit, welche in der Zeiteinheit verrichtet wird.*

Wenn die Arbeit sich nicht gleichförmig auf die Zeit verteilt, so versteht man unter dem *Arbeitsvermögen zu einer Zeit t den Grenzwert des Quotienten aus der in dem nachfolgenden Zeitintervalle $\triangle t$ verrichteten Arbeit $\triangle A$ und der Zeitlänge $\triangle t$, wenn diese sich der Grenze Null nähert.* Es ist also

$$E = \lim_{(\triangle t = 0)} \frac{\triangle A}{\triangle t}$$

oder

$$E = \frac{dA}{dt}. \tag{134}$$

Ist die Arbeit A als Function der Zeit bekannt, so wird durch diese Gleichung der Effect zur Zeit t bestimmt.

Die Einheit des Arbeitsvermögens ist der Quotient aus der Einheit der Arbeit und der Zeiteinheit, und ist somit ausgedrückt in den Grundeinheiten

$$\frac{\text{Krafteinh.} \times \text{Längeneinh.}}{\text{Zeiteinh.}}$$

z. B.

$$\frac{\text{kg m}}{\text{Sec}}.$$

Für gewisse Zwecke, besonders für die Bestimmung des Arbeitsvermögens von Maschinen, ist die Einheit $\frac{\text{kg m}}{\text{Sec}}$ wegen ihrer Kleinheit etwas unbequem, und man wendet deshalb eine 75 Mal grössere Einheit an, die sog. P f e r d e s t ä r k e, welche allgemein mit P. S. bezeichnet wird.

$$1 \text{ P. S.} = 75 \frac{\text{kg m}}{\text{Sec}}.$$

A n w e n d u n g e n.

1) Eine Locomotive von 30 t. Gewicht legt in 4 Minuten eine 2.5 km lange Strecke mit dem Steigungsverhältnis 0.012 zurück. Man berechne die Arbeit der Schwere und das Arbeitsvermögen.

Der verticale Höhenunterschied z beider Endpunkte ist

$$z = 2500 \times 0.012 = 30 \text{ m},$$

die Arbeit der Schwere ist, wenn man von dem negativen Zeichen absieht,

$$|A| = 30 \times 30 = 900 \text{ t. m.},$$

und das Arbeitsvermögen

$$E = \frac{|A|}{t} = \frac{900}{4 \times 60} = 3\tfrac{3}{4} \frac{\text{t. m}}{\text{Sec}},$$

$$E = \frac{15.1000}{4.75} = 50 \text{ P. S.}$$

Das wirkliche Arbeitsvermögen der Locomotive muss natürlich noch grösser sein, weil auch andere Widerstände, besonders die Reibung zu überwinden sind.

2) Mit einem Dampfkrahn wird ein 2 t schwerer Steinblock in einer Minute mit gleichförmiger Bewegung um 8 m gehoben. Wie gross ist dabei das Arbeitsvermögen des Krahns?

Antwort: $3\tfrac{5}{9}$ P. S.

§ 46.

Lebendige Kraft. Energie. Niveaufläche.

Lebendige Kraft. Actuelle Energie.

Ein freier materieller Punkt mit der Masse m bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft P, deren Grösse und

Richtung mit der Zeit sich ändert. Zu einer Zeit t hat der Punkt eine Geschwindigkeit in der Bahn

$$u = \frac{ds}{dt}$$

und eine Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \frac{du}{dt} = u\frac{du}{ds}.$$

Andererseits ist diese Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \frac{P_t}{m} = \frac{P\cos\alpha}{m},$$

wo α den Winkel zwischen den Richtungen der Kraft und der Bewegung bezeichnet. Somit wird

$$u\frac{du}{ds} = \frac{P\cos\alpha}{m}$$

$$m\,u\,du = P\cos\alpha\,ds.$$

Durch Integration erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,m\,u^2 + \text{Const.} = \int P\cos\alpha\,ds.$$

Wird das Integral zwischen zwei bestimmten Grenzen s_0 und s genommen, welche den Zeiten t_0 und t entsprechen, und wird ferner die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes zur Zeit t_0 mit u_0 bezeichnet, so ergiebt sich die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,mu^2 - \tfrac{1}{2}\,mu_0^2 = \int_{s_0}^{s} P\cos\alpha\,ds.$$

Nach (129) bezeichnet die rechte Seite dieser Gleichung die während der Zeit von t_0 bis t ausgeführte Arbeit A. Also ist

(135) $$\tfrac{1}{2}\,mu^2 - \tfrac{1}{2}\,mu_0^2 = A.$$

Das Product mu^2 der Masse eines materiellen Punktes und des Quadrates seiner Geschwindigkeit wird lebendige Kraft genannt;[1] *das halbe Product $\tfrac{1}{2}\,mu^2$ heisst kinetische oder actuelle Energie.*

[1] Die Benennung lebendige Kraft ist nicht zweckmässig gewählt, weil lebendige Kraft möglicherweise mit Kraft in gewöhnlichem Sinne verwechselt werden könnte. Aus diesem Grunde soll im folgenden hauptsächlich der Energiebegriff benützt werden.

Princip der lebendigen Kraft.

In der Gleichung (115) ist der sog. Satz von der Äquivalenz der Arbeit und der kinetischen Energie enthalten. *In der freien Bewegung eines materiellen Punktes ist die Zunahme der kinetischen Energie während eines Zeitintervalles gleich der mechanischen Arbeit, welche die auf den Punkt wirkenden Kräfte in derselben Zeit verrichten.*

Einheit der Energie.

Die lebendige Kraft und die kinetische Energie werden mit denselben Einheiten wie die mechanische Arbeit gemessen. In der That ist die Einheit eines Productes mu^2

$$\text{Masseneinh. (Geschwindigkeitseinh.)}^2 =$$
$$= \frac{\text{Krafteinh. (Zeiteinh.)}^2}{\text{Längeneinh.}} \times \left(\frac{\text{Längeneinh.}}{\text{Zeiteinh.}}\right)^2 =$$
$$= \text{Krafteinh.} \times \text{Längeneinh.} = \text{Einh. der Arbeit.}$$

Fallbewegung.

Das Princip der lebendigen Kraft mag z. B. auf die Bewegung eines freien schweren Punktes längs der Verticalen angewandt werden.

Die Masse des Punktes sei m, seine Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t_0 = o$ sei c und seine Geschwindigkeit zur Zeit t habe den Wert u (Fig. 137). Dann ist die kinetische Energie am Anfang des Zeitintervalles t gleich $\frac{1}{2} mc^2$ und am Ende desselben Zeitintervalles gleich $\frac{1}{2} mu^2$, also die Zunahme derselben

$$\frac{1}{2} m (u^2 - c^2).$$

Fig. 137.

Auf den Punkt wirkt die constante Schwerkraft mg in der Richtung der Bewegung. Nennt man die während der Zeit t in der Fallbewegung zurückgelegte Strecke s, so ist die Arbeit der Schwere

$$mg\,s;$$

und nach dem Principe der lebendigen Kraft findet man

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(u^2 - c^2) = mgs.$$

Die schon auf p. 22 abgeleitete Gleichung

$$2gs = u^2 - c^2$$

gewinnt also nach Multiplication mit $\frac{m}{2}$ einen bestimmten mechanischen Sinn.

Bewegt sich der Punkt nicht längs der Verticalen, sondern in einer Wurfparabel, so findet man durch Anwendung des gleichen Satzes:

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(u^2 - c^2) = mgy,$$

wo y den verticalen Höhenunterschied zwischen der Anfangs- und der Endlage bezeichnet.

Gebundene Bewegung.

Man betrachte jetzt eine gebundene Bewegung des materiellen Punktes mit der Masse m in einer gegebenen Curve (Fig. 138). Auf den Punkt wirke die äussere Kraft P; man kann die Bewegung als eine freie auffassen, wenn man diejenige Widerstandskraft Q hinzufügt, mit der die Curve auf den Punkt wirkt. Sind α und φ die Winkel, welche die Kräfte P und Q mit der Bewegungsrichtung einschliessen, so ergiebt das Princip der lebendigen Kraft

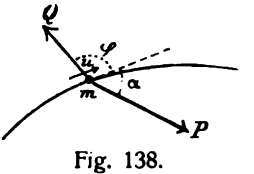


Fig. 138.

$$(136) \qquad A = \int_{s_0}^{s} P \cos\alpha\, ds + \int_{s_0}^{s} Q \cos\varphi\, ds = \tfrac{1}{2}\, m\,(u^2 - u_0^2),$$

d. h. ***die Differenz zwischen den kinetischen Energien am Ende und im Anfang eines Zeitintervalles ist gleich der Summe der Arbeiten der äusseren Kraft und der Widerstandskraft während des Zeitintervalles.***

Die Arbeit der Kraft Q ist gleich der Arbeit ihrer Tangentialcomponente. Die Richtung des Tangentialwiderstandes ist immer entgegengesetzt der Richtung der

Bewegung, und somit ist seine Arbeit negativ. Wenn die Curve vollkommen glatt ist und folglich kein Tangentialwiderstand vorkommt, so ist die Arbeit der Kraft Q gleich Null; das Princip der lebendigen Kraft nimmt dann die Form an: *In der gebundenen Bewegung auf einer vollkommen glatten Curve ist die Zunahme der kinetischen Energie in einer gewissen Zeit gleich der von der äusseren Kraft in derselben Zeit verrichteten Arbeit.*

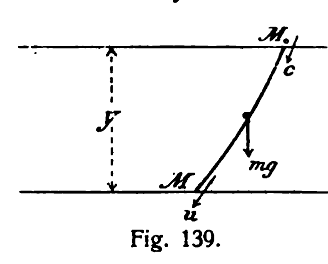


Fig. 139.

Wenn der Punkt unter dem Einflusse seiner Schwere längs einer glatten Curve fällt (Fig. 139), so findet man

$$\tfrac{1}{2} m (u^2 - c^2) = mgy,$$

wo y der Höhenunterschied der End- und der Anfangslage ist.

Hieraus folgt

$$u = \sqrt{c^2 + 2gy}$$

und speciell mit $c = 0$

$$u = \sqrt{2gy}.$$

Der schwere Punkt, welcher von einer bestimmten Anfangslage oder allgemeiner von einer bestimmten Horizontalebene aus mit der Anfangsgeschwindigkeit c sich bewegt, erlangt also in einer anderen Horizontalebene immer dieselbe Geschwindigkeit u, er mag sich frei oder längs einer glatten Curve von der einen Ebene nach der andern bewegt haben. Die Geschwindigkeit u ist um so grösser, je tiefer die Endlage ist; die höchste Horizontalebene, die mit der Anfangsgeschwindigkeit c von der ursprünglichen Ebene aus erreicht werden kann, liegt in der Höhe $\frac{c^2}{2g}$ über der Anfangslage.

Niveaufläche. Eine Fläche, in deren sämtlichen Punkten die Geschwindigkeit denselben Wert erlangt, heisst eine Ni-

veaufläche. Bei freier Bewegung oder Bewegung in einer völlig glatten Curve unter dem Einfluss der Schwere sind die Niveauflächen horizontale Ebenen. Zur Bestimmung der Niveauflächen setzt man also $u =$ Const. Durch jeden Punkt des Raumes geht nur eine Niveaufläche, weil die Geschwindigkeit dort nur einen Wert hat.

Die Bewegung auf einer Niveaufläche selbst ist eine gleichförmige Bewegung. Ein Punkt von der Masse m bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft P um ein kleines Stück ds. Es ist dann nach dem Principe der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} m \left\{(u + du)^2 - u^2\right\} = P \cos \alpha \, ds,$$

und wenn das Stück Weges ds auf einer Niveaufläche liegt:

$$du = 0.$$

Daraus folgt

$$P \cos \alpha \, ds = 0.$$

Da weder P noch ds gleich Null ist, muss

$$\cos \alpha = 0;$$

d. h.

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

sein. Die Kraft P steht also senkrecht auf dem Wegelemente ds. Weil aber ds beliebig auf der Niveaufläche gewählt werden kann, so muss die Kraft P die Richtung der Normalen der Niveaufläche in dem betrachteten Punkte haben. Hieraus folgt: ***Eine Niveaufläche ist eine Fläche, welche in jedem Punkte die Richtungslinie der Kraft zur Normalen hat.***

Centralbewegung.

Eine Kraft, welche stets gegen einen festen Punkt O gerichtet ist, heisst eine Centralkraft, und eine Bewegung, welche unter dem Einflusse einer solchen Kraft vor sich geht, eine Centralbewegung. Der Punkt

16

O ist der sog. Centralpunkt. Wenn die Kraft eine Centralkraft ist, so sind die Niveauflächen concentrische Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Centralpunkt ist. Sie schneiden ja überall die Kraftrichtung senkrecht. Ein Beispiel einer Centralbewegung ist auf p. 196 behandelt worden.

§ 49.

Übungsaufgaben zur Mechanik des materiellen Punktes.

1) Eine Kraft R sei die Resultirende zweier Kräfte P und Q, welche mit ihr die Winkel α und β einschliessen. Es seien P und β gegeben. Man bestimme Q und α sowohl graphisch als analytisch und nehme speciell die Werte an

$$R = 50 \text{ kg}; \; P = 25 \text{ kg}; \; \beta = 30^\circ.$$

2) Wie gross ist die Masse eines materiellen Punktes, welcher unter dem Einflusse zweier Kräfte, welche den Winkel 60° mit einander einschliessen und die Grössen 25 kg und 20 kg haben, die Beschleunigung der Schwere $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{Sec}^2}$ annimmt? Welche Kraft muss man hinzufügen, damit der Punkt nur die Beschleunigung $\frac{1}{2} g$ erhalte?

3) Auf einen materiellen Punkt, dessen Masse 2.5 Masseneinheiten beträgt, wirken fünf Kräfte in derselben Ebene. Die Winkel der Kräfte mit einer festen Richtung seien in einer bestimmten Reihenfolge 20°, 40°, 80°, 160° und 320°; die Kräfte seien bez. 5 kg, 10 kg, 15 kg, 20 kg und 25 kg. Man bestimme analytisch und graphisch die Grösse und Richtung der Beschleunigung des Punktes.

4) Ein materieller Punkt A wird von zwei anderen Punkten B und C mit Kräften angezogen, welche durch die Abstände AB und AC dargestellt sind. Auf der Verbindungsgeraden von B und C liegt ein vierter Punkt D, welcher A abstösst. Wo muss D liegen und wie gross muss die abstossende Kraft sein, damit Gleichgewicht stattfinde?

5) Wo befindet sich ein materieller Punkt im Gleichgewichte auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B, wenn er von diesen Punkten mit Kräften angezogen wird, welche 1) direct proportional der Entfernung und 2) umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind? In dem Abstande 1 ist der Zahlwert der von A ausgehenden Kraft μ und der von B ausgehenden Kraft μ'.

6) Eine Last G wird von drei Fäden getragen, welche symmetrisch in Bezug auf eine Verticale befestigt sind und rechte Winkel mit einander bilden. Man bestimme die Spannung der Fäden.

7) Die Fäden im Beispiele 6 seien in derselben Horizontalebene befestigt. Einer von ihnen werde durchschnitten, so dass die Last G in Bewegung gerät. Man suche die Spannung in den beiden übrigen Fäden in dem Augenblicke, in welchem der Körper durch seine tiefste Lage hindurchgeht.

8) An einem Krahn zum Einrammen von Pfählen arbeiten 20 Mann, welche je einen Zug von 15 kg ausüben. Man suche die verticale Resultirende sämtlicher Kräfte, wenn die eine Hälfte der Seile den Winkel 20° und die andere Hälfte den Winkel 30° mit der Verticalen einschliesst.

9) Zwei materielle Punkte von den Gewichten P und Q sind durch eine Schnur verbunden, welche über eine glatte Rolle läuft. P ruht auf einer glatten schiefen Ebene, während Q frei hängt. Man bestimme die Gleichgewichtslage und den Druck auf die Ebene.

10) Es sei die Bewegung eines materiellen Punktes zu untersuchen, welcher von einem festen Punkte nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird und eine gegen diesen festen Punkt gerichtete Anfangsgeschwindigkeit besitzt.

11) Man untersuche die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher von einem festen Punkte O mit einer Kraft abgestossen wird, welche direct proportional der Entfernung von O ist, vorausgesetzt dass die Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit durch den Punkt O geht.

12) Ein Punkt bewegt sich unter dem Einflusse einer abstossenden Kraft, welche proportional der Entfernung von einem festen Punkte ist. Man suche die Bahn der Bewegung.

13) Man beweise folgende Eigenschaften jeder Centralbewegung:

Der von dem Centralpunkte aus gezogene Radiusvector beschreibt einen proportional der Zeit wachsenden Sector.

Die Geschwindigkeit in einem Punkte der Bahn ist umgekehrt proportional dem Abstande von dem Centralpunkte nach der Tangente der Bahn in dem betrachteten Punkte.

14) Ein Wagen rollt mit der Geschwindigkeit 6 $\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ über eine convexe Brücke, welche die Form eines Kreisbogens mit 50 m Radius hat. Welches ist das Verhältnis zwischen dem Drucke des Wagens auf die Brücke in ihrem höchsten Punkte und dem Gewichte des Wagens?

15) Die Aufgabe im Beispiele 14 soll unter der Voraussetzung gelöst werden, dass die Brücke nach unten gebogen ist, und der höchste Punkt durch den tiefsten ersetzt wird.

16) Man untersuche die Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer glatten geneigten Ebene, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes keinen rechten Winkel mit den horizontalen Geraden der Ebene einschliesst.

17) Ein schwerer Punkt fällt auf der convexen Seite einer festen glatten Curve in einer verticalen Ebene. Man zeige, dass der Punkt die Curve verlässt, wenn seine doppelte Geschwindigkeitshöhe gleich der Projection des Krümmungsradius der Curve auf die Verticale ist.

Die Curve sei ein verticaler Kreis; der Punkt bewege sich mit sehr kleiner Anfangsgeschwindigkeit von dem höchsten Punkte des Kreises aus.

18) Man leite die Schwingungszeit des mathematischen Pendels durch Integration aus der Gleichung (p. 213)

$$\frac{u^2}{l} = l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

in der Weise ab, dass man bei kleiner Amplitude genügend genau

$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2;\ \cos\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

setzt.

19) Man berechne die Länge eines Secundenpendels an der Oberfläche des Mondes (p. 215 und 193).

20) Wie gross ist der Seitendruck, den eine Locomotive von 35 t Gewicht auf die Schienen in einer Curve von 250 m Radius ausübt, wenn ihre Geschwindigkeit 15 $\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ ist?

21) Ein Centrifugalpendel macht einen Umlauf in der Secunde. Man bestimme seine Länge, wenn die Neigung des Pendelfadens gegen die Verticale 50° beträgt. Welches wird die Umlaufszeit, falls der Neigungswinkel auf die Hälfte vermindert und die Pendellänge verdoppelt wird?

22) Ein Centrifugalregulator (Fig. 128) mache bei normalem Gange 40 Umläufe in der Minute und der mittlere Abstand x_0 der Kugeln von der Drehaxe sei 0.45 m. Man berechne ϱ_0 und a.

23) Auf einen Körper vom Gewichte G wirke während der Zeit t eine constante Kraft P. Welche Geschwindigkeit erlangt der Körper; wie gross ist die während der ganzen Zeit von der Kraft verrichtete mechanische Arbeit und welches ist der Ausdruck für das

Arbeitsvermögen? Man nehme besonders $G = 0.4$ t., $t = 20$ Sec., $P =$ 45 kg an.

24) Auf einen materiellen Punkt wirken eine der Grösse und Richtung nach constante Kraft und eine Centralkraft, welche proportional dem Abstande von dem Centralpunkte und gegen diesen Punkt gerichtet ist. Man bestimme die Niveauflächen und leite das Gesetz für die Geschwindigkeit ab.

Dritter Teil.

Statik der starren Körper.

Sechster Abschnitt.

Kräfte, die auf einen starren Körper wirken. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

§ 50.

Allgemeines.

Starre und elastische Körper.

Unter einem starren Körper versteht man ein System von materiellen Punkten, welche unveränderliche Abstände von einander beibehalten, welche Kräfte auch auf das System wirken mögen.

Wie die Erfahrung gezeigt hat, sind keine Körper der Natur vollkommen starr, sondern sie besitzen alle das Vermögen sich unter dem Einflusse von Kräften mehr oder weniger zu deformiren; sie sind wie man sagt mehr oder weniger e l a s t i s c h. Bei der Lösung einer grossen Anzahl von Problemen genügt es aber vollständig, die Körper als starr anzusehen, während dagegen andere Auf-

gaben nicht gelöst werden können, ohne dass man die Körper als elastisch betrachtet. Diese letzteren Aufgaben gehören zu einem besonderen, sowohl theoretisch wie praktisch sehr wichtigem Teile der Mechanik: der Elasticitätstheorie und der Festigkeitslehre.

Statik und Dynamik.

Im allgemeinen greifen die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte in verschiedenen Punkten an; die im vierten Abschnitt entwickelten Regeln für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte sind also in diesem Falle nicht mehr ausreichend. Auch beim starren Körper kann das System der Kräfte im Gleichgewichte sein oder nicht, wie unten näher dargelegt wird. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Kräften, welche auf den starren Körper wirken, werden in der Statik der starren Körper aufgesucht und auf eine Menge von Aufgaben angewandt. Die Dynamik der starren Körper beschäftigt sich mit denjenigen Bewegungen, welche den starren Körpern durch Kräftesysteme mitgeteilt werden, die nicht im Gleichgewichte sind.

Axiom über Kräfte.

Die Grundlage für die Behandlung der Aufgaben betreffend Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, welche einem starren Körper angehören, bildet das folgende Axiom.

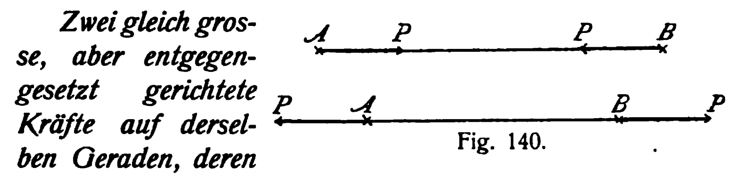


Fig. 140.

Zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf derselben Geraden, deren Angriffspunkte einem starren Körper angehören, sind im Gleichgewichte, d. h. heben sich auf (Fig. 140).

Aus diesem Axiom folgt unmittelbar: *Eine Kraft kann längs ihrer Richtungslinie nach jedem Punkte verschoben werden, welcher mit dem ursprünglichen Angriffspunkte starr verbunden ist.*

Es sei in der Figur 141 A der Angriffspunkt der Kraft P und B ein damit fest verbundener Punkt auf der Richtungslinie der Kraft P. In dem Punkte B werden zwei Kräfte P' und (P') eingeführt, welche gleich gross mit P sind und in entgegengesetzten Richtungen längs der Geraden AB wirken. Sie heben sich auf; nach dem obigen Axiome heben aber auch die Kräfte P und (P') sich auf, so dass die im Punkte B angebrachte Kraft $P' = P$ allein zurückbleibt. Damit ist gezeigt, dass die Kraft P längs ihrer Richtungslinie nach jedem mit ihrem Angriffspunkte fest verbundenen Punkte verschoben werden kann.

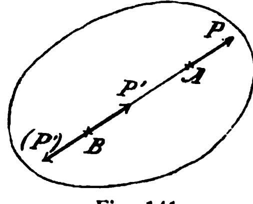


Fig. 141.

Kräfte mit gemeinsamer Richtungslinie.

Kräfte, welche längs derselben Geraden in verschiedenen Angriffspunkten wirken, welche alle demselben starren Körper angehören, können nach einem gemeinsamen Angriffspunkte auf dieser Geraden verschoben und dann zu einer einzigen Kraft zusammengesetzt werden. Rechnet man die in einem Sinne wirkenden Kräfte als positiv, die in dem entgegengesetzten Sinne wirkenden als negativ, so ist die Resultirende nach Grösse und Richtung gleich der algebraischen Summe sämtlicher Kräfte. Die Kräfte können auch graphisch zusammengesetzt werden, wenn man sie in einem bestimmten Massstabe und in richtigem Sinne nach einander auf einer Geraden abträgt. Der Abstand des Anfangspunktes der ersten Kraft von dem Endpunkte der letzten Kraft giebt dann die in demselben Massstabe gemessene resultirende Kraft an. Natürlich ist die Genauigkeit des graphischen Verfahrens eine beschränkte, meistens aber praktisch völlig genügend.

§ 51.

Zusammensetzung zweier in derselben Ebene liegenden Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. Statisches Moment. Der Momentensatz.

Die Richtungslinien zweier Kräfte in derselben Ebene, welche auf einen starren Körper wirken, schneiden sich oder sind einander parallel.

Graphische Zusammensetzung zweier sich schneidender Kräfte.

Wenn die Richtungslinien sich in einem Punkte O schneiden (Fig. 142a), so können die beiden Kräfte P und Q nach dem Punkte O verschoben und dann zu einer einzigen resultirenden Kraft R zusammengesetzt werden, die man noch beliebig längs ihrer Richtungslinie verschieben kann. Das gilt auch noch, wenn der Punkt O nicht dem starren Körper angehört, weil man ihn dann als mit dem starren Körper fest verbunden denken kann.

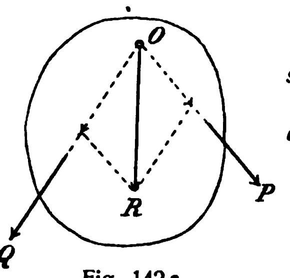


Fig. 142a.

Satz der drei Kräfte.

Ersetzt man R durch die entgegengesetzte Kraft (R), deren Angriffspunkt auf der Richtungslinie von R liegt, so halten die Kräfte P, Q und (R) einander das Gleichgewicht (Fig. 142b). Es ist zugleich (R) die einzige Kraft, welche den Kräften P und Q das Gleichgewicht hält. Hieraus folgt als Gleichgewichtsbedingung dreier nicht paralleler Kräfte in einer Ebene:

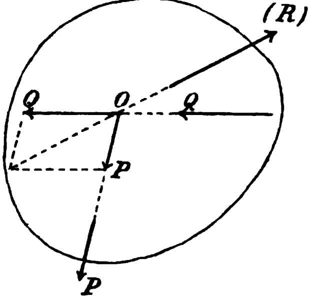


Fig. 142b.

Die Richtungslinien der drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden und die Kräfte sich wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel (oder wie die Seiten eines Dreieckes) verhalten.

Dieser Satz wird der Satz von den drei Kräf-

ten genannt. (Man vergleiche den Satz auf p. 180 für drei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte).

Analytische Zusammensetzung zweier Kräfte.

Die Resultirende R zweier in derselben Ebene liegender Kräfte P und Q (Fig. 143) kann auch analytisch bestimmt werden. Die Grösse und Richtung von R wird in derselben Weise wie bei Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte mit Hülfe zweier Projectionsgleichungen für zwei zu einander senkrechte Projectionsaxen erhalten (§ 37). Es ist

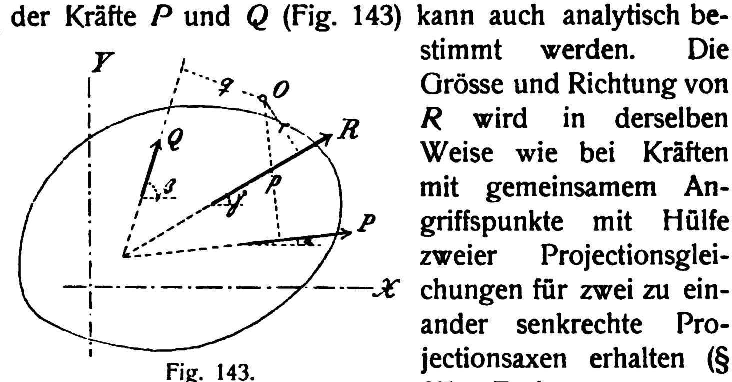


Fig. 143.

$$(137) \qquad \begin{aligned} R\cos\gamma &= P\cos\alpha + Q\cos\beta, \\ R\sin\gamma &= P\sin\alpha + Q\sin\beta. \end{aligned}$$

Hier sind α, β und γ die Winkel, welche die Kräfte P, Q und R mit der positiven Richtung der x-Axe einschliessen. Aber noch eine dritte Gleichung ist erforderlich, welche die Bedingung ausdrückt, dass R durch den Schnittpunkt von P und Q geht. Um diese Gleichung in einer für die Mechanik passenden Form aufzustellen, wird ein neuer Begriff eingeführt, das sog. statische Moment einer Kraft.

Statisches Moment.

Unter dem statischen Momente (kürzer nur Momente) einer Kraft in Bezug auf einen Punkt O wird das Product aus der Kraft in den Abstand des Punktes O von der Richtungslinie der Kraft verstanden (Fig. 144).

$$(138) \qquad M = Pp.$$

Der Punkt O heisst Momentenpol; das statische Moment wird nach Übereinkunft positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Drehungssinn der Kraft in

Bezug auf den Pol O mit dem Drehungssinn des Uhrzeigers übereinstimmt oder nicht. So ist das Moment in der Figur 144 a) positiv, in der Fig 144 b) negativ. Damit man im folgenden nicht jedes Mal das Zeichen des Momentes beachten muss, wird der Abstand p als eine mit einem bestimmten Vorzeichen versehene Grösse betrachtet: dieses Vorzeichen ist dasjenige des Momentes.

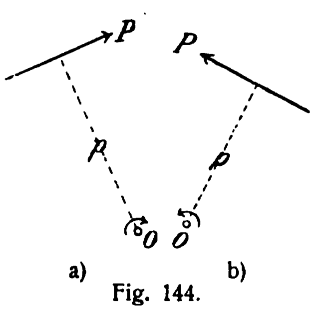


Fig. 144.

Geometrisch wird das statische Moment durch die doppelte Fläche eines Dreieckes dargestellt, in welchem die Kraft die Grundlinie und der Pol der gegenüberliegende Eckpunkt sind. Diese Dreiecksfläche ist je nach dem Drehungssinn positiv oder negativ zu rechnen. (Fig. 145).

Einheit des Momentes.

Weil das statische Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt das Product aus einer Kraft und einer Länge ist, so ist seine Einheit

Krafteinh. $\times$ Längeneinh. z. B. kgm.,

somit dieselbe wie die Einheit der mechanischen Arbeit und der kinetischen Energie.

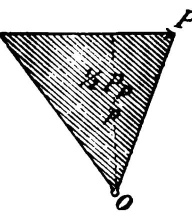


Fig. 145.

Momentensatz.

Für die statischen Momente gilt der sog. Momentensatz: *Das Moment der Resultirenden in Bezug auf einen Punkt ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten.*

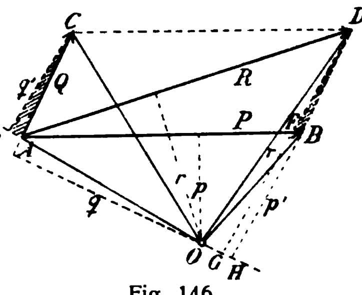


Fig. 146.

Dieser Satz soll hier zunächst für zwei Kräfte

bewiesen werden, deren Richtungslinien sich schneiden. In der Figur 146 sind P und Q zwei Kräfte und R ist ihre Resultirende; ferner sind p, q und r ihre Abstände von dem Momentenpole O, wobei alle Abstände mit ihren Zeichen gerechnet werden. (In der Figur sind alle drei positiv). Es soll bewiesen werden, dass

$$Rr = Pp + Qq$$

ist. Aus der Figur ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} Rr &= 2 \triangle OAD = OA \,.\, r', \\ Pp &= 2 \triangle OAB = OA \,.\, p', \\ Qq &= 2 \triangle OAC = OA \,.\, q'. \end{aligned}$$

Die Strecke OA ist eine gemeinsame Grundlinie der drei Dreiecke, deren doppelte Flächen die betrachteten statischen Momente darstellen; ferner sind r', p' und q' die Höhen für die Grundlinie OA. Die in der Figur schraffirten Dreiecke ACE und BDF sind congruent. Hieraus folgt

$$EC = q' = DF.$$

Weiter ergiebt das Rechteck $BFGH$

$$BH = p' = FG,$$

folglich hat man

$$r' = p' + q'$$

und findet

$$2 \triangle OAD = 2 (\triangle OAB + \triangle OAC)$$

oder

$$Rr = Pp + Qq,$$

w. z. b. w. Wenn die Lage des Pols eine solche ist, dass nicht alle Momente positiv sind, so wird der Beweis nur unbedeutend modificirt.

Zu den beiden für die Resultirende zweier Kräfte P und Q mit verschiedenen Angriffspunkten geltenden Gleichungen (137) kommt jetzt als dritte Gleichung

$$Rr = Pp + Qq; \tag{139}$$

sie drückt die Bedingung aus, dass die Resultirende durch den Schnittpunkt der beiden Kräfte geht.

Wenn der Pol so gewählt wird, dass die Momentsumme $Pp + Qq$ gleich Null ist, so hätte man $r = 0$, d. h. die Resultirende würde durch den Pol selbst gehen.

Der Momentensatz für zwei parallele Kräfte.

Wenn die beiden Kräfte P und Q sich nicht schneiden, sondern parallel sind, so wird ihre Resultirende nicht mehr in der oben dargelegten Weise erhalten. Es soll jetzt die Resultirende zweier paralleler Kräfte abgeleitet und zugleich der Momentensatz für diesen Fall bewiesen werden.

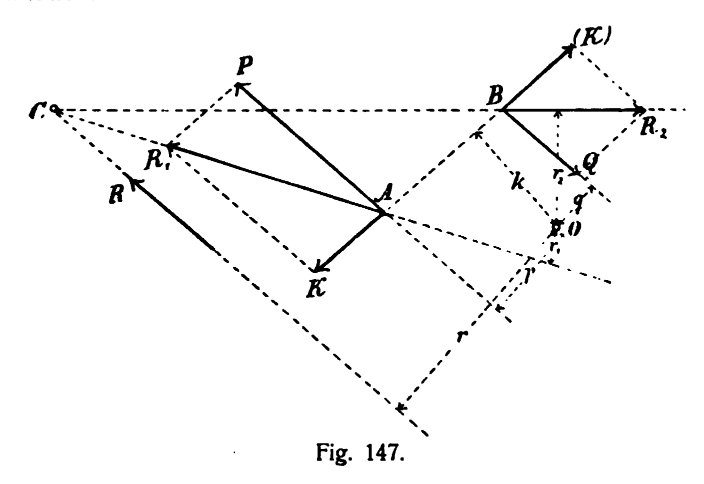


Fig. 147.

Es seien P und Q in der Figur 147 die beiden parallelen Kräfte, O der Pol der Momente. Man nimmt auf einer Geraden AB, welche die Kräfte schneidet, zwei entgegengesetzt gerichtete, gleich grosse Kräfte K und (K) an, welche übrigens beliebig sein können. Dadurch wird das ursprüngliche System der Kräfte P und Q nicht

verändert. Es werden jetzt P mit K zu einer Resultirenden R_1 und Q mit (K) zu einer Resultirenden R_2 zusammengesetzt. Dann sind R_1 und R_2 zusammen den Kräften P und Q äquivalent, und die Resultirende von R_1 und R_2 ist also identisch mit der Resultirenden von P und Q. Mit Ausnahme des Falles, in welchem P und Q entgegengesetzt gerichtet und gleich gross sind, schneiden sich R_1 und R_2 in einem Punkte C und liefern in bekannter Weise eine Resultirende R. Bezeichnet man die mit ihren Vorzeichen gerechneten Abstände des Pols O von P, Q, R, R_1, R_2 und K bez. mit p, q, r, r_1, r_2 und k, so findet man mit Hülfe des für zwei sich schneidende Kräfte bewiesenen Momentensatzes

$$R_1 r_1 = Pp + Kk,$$
$$R_2 r_2 = Qq - Kk,$$
$$Rr = R_1 r_1 + R_2 r_2,$$

und durch Addition dieser Gleichungen

$$Rr = Pp + Qq.$$

Damit ist der Momentensatz auch für zwei parallele Kräfte bewiesen.

Analytische Zusammensetzung von zwei parallelen Kräften.

Die beiden parallelen Kräfte P und Q haben entweder dieselbe Richtung oder sie sind entgegengesetzt gerichtet. Man erhält ihre Resultirende durch Zusammensetzung der nach dem Punkte C verschobenen Kräfte R_1 und R_2. Denkt man sich nun R_1 wieder in P und K, R_2 in Q und (K) zerlegt, so heben sich K und (K) auf und es bleiben P und Q mit dem Angriffspunkte C übrig. Hieraus geht also folgender Satz hervor:

Die Resultirende von zwei parallelen, in demselben Sinne gerichteten Kräften ist gleich ihrer Summe und hat dieselbe Richtung, wie die Componenten; die Resultirende von zwei parallelen, ungleich grossen Kräften im entgegengesetzten Sinne ist gleich ihrer Differenz und hat die Richtung der grösseren Componente.

Einfacher als durch die Construction in der Figur 147 erhält man die Lage der Resultirenden direct vermittelst des Momentensatzes.

Man nehme zuerst an, dass die beiden Kräfte P und Q denselben Sinn haben. (Fig. 148). Die Resultirende R muss dann zwischen beiden Kräften liegen, denn anderenfalls könnte die Summe der Momente in Bezug auf einen auf der Resultirenden liegenden Pol nicht gleich Null sein. Bezeichnen a und b die als positiv gerechneten Abstände der Kraft R von den Kräften P und Q, so ist infolge der eben genannten Bedingung

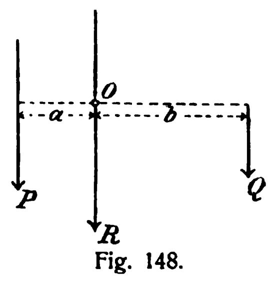


Fig. 148.

$$Pa = Qb$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{Q}{P}, \tag{140}$$

d. h. *die Resultirende teilt innerhalb den Abstand zwischen den beiden parallelen gleichgerichteten Kräften im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.*

Wenn die beiden parallelen Kräfte entgegengesetzte Richtungen haben (Fig. 149), so findet man ganz in derselben Weise, dass *die Resultirende ausserhalb der Kräfte und zwar auf der Seite der grösseren Kraft liegt und den Abstand beider Kräfte ausserhalb im umgekehrten Verhältnis der Kräfte teilt.*

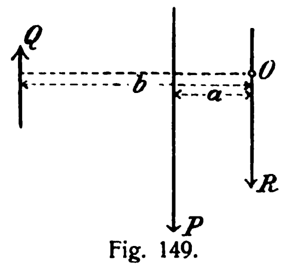


Fig. 149.

$$\frac{a}{b} = \frac{Q}{P}.$$

Die Projection der Resultirenden zweier paralleler Kräfte auf eine beliebige Axe in der Ebene der Kräfte

ist gleich der algebraischen Summe der Projectionen beider Componenten.

Graphische Zusammensetzung von zwei parallelen Kräften.

Die Resultirende kann auch graphisch erhalten werden. Ihre Grösse ergiebt sich unmittelbar, wenn man graphisch die Summe, bez. die Differenz der beiden gegebenen Kräfte nimmt; die Lage findet man durch eine einfache geometrische Teilung des Abstandes der beiden Kräfte innerhalb oder ausserhalb im umgekehrten Verhältnis der Kräfte (siehe Fig. 150 und 151).

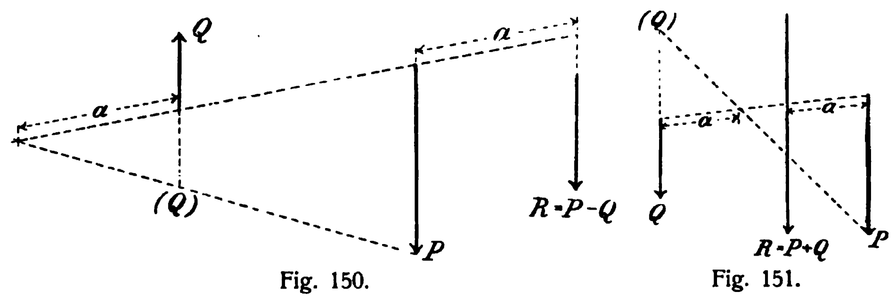


Fig. 150. Fig. 151.

Man kann die Resultirende der beiden parallelen Kräfte auch mit Hülfe der allgemeinen Methode zur graphischen Zusammenzetzung von Kräften in einer Ebene erhalten. (§ 56 unten).

Kräftepaar.

Wenn die Kräfte P und Q gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind, so wird ihre Resultirende gleich Null und liegt in unendlich grossem Abstande, d. h. ein solches System besitzt keine Resultirende. Es heisst ein Kräftepaar und muss besonders für sich behandelt werden (§ 59 unten).

§ 52.

Analytische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Um eine beliebige Zahl in derselben Ebene liegender Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$ zusammenzusetzen, kann man zuerst zwei Kräfte P_1 und P_2 zu einer Resultirenden R_{12}, diese mit einer dritten Kraft P_3 zu der Resultirenden R_{123} u. s. w.

zusammensetzen, bis man zuletzt die Resultirende $R = R_{12 \ldots n}$ aller n Kräfte erhält (Fig. 152). Bei dieser graphischen Construction der Resultirenden sind $n-1$

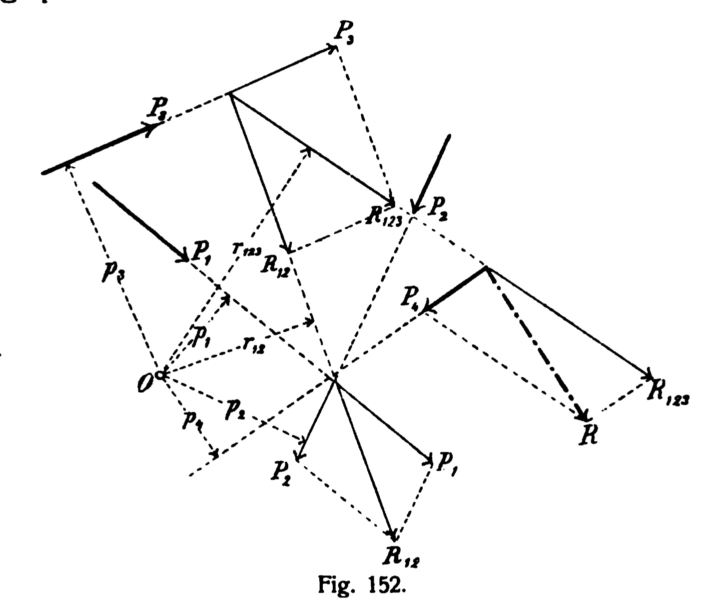


Fig. 152.

successive Kräfteparallelogramme zu zeichnen. Ein abgekürztes graphisches Verfahren wird in § 53 gegeben. Aus der vorhin angedeuteten Construction ergiebt sich, dass die Resultirende ihre Grösse und Richtung beibehält, wenn die Kräfte in der Ebene in beliebiger Weise translatorisch verschoben werden. Es ändert sich nur die Richtungslinie, und zwar wird sie parallel sich selbst verschoben. Zweckmässigerweise bestimmt man zuerst die Grösse und Richtung der Resultirenden und nachher die Lage derselben.

Erweiterung des Momentensatzes.

Bevor die Lösung dieser Aufgabe besprochen wird, soll der in § 51 für zwei Kräfte aufgestellte Momentensatz für eine beliebige Anzahl von Kräften in derselben Ebene erweitert werden. Wenn O der Pol der Momente ist, so erhält man

$$R_{12}\,r_{12} = P_1\,p_1 + P_2\,p_2,$$
$$R_{123}\,r_{123} = R_{12}\,r_{12} + P_3\,p_3 =$$
$$= P_1\,p_1 + P_2\,p_2 + P_3\,p_3$$

und zuletzt, nachdem alle Kräfte berücksichtigt sind,

$$Rr = P_1\,p_1 + P_2\,p_2 + \ldots + P_n\,p_n = \Sigma(Pp), \tag{141}$$

wo für die Summe der Momente die abgekürzte Bezeichnung $\Sigma(Pp)$ gebraucht ist. Der Momentensatz ist damit allgemein bewiesen.

Grösse und Richtung der Resultirenden.

Handelt es sich um die analytische Zusammensetzung von Kräften in der Ebene, so erhält man zunächst die Grösse und Richtung der Resultirenden in genau derselben Weise, als ob die Kräfte nach einem gemeinsamen Angriffspunkte verschoben wären, d. h. mit Hülfe zweier Projectionsgleichungen für zwei zu einander senkrechte Axen. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Winkel, welche die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ mit der positiven Richtung der x-Axe einschliessen, so ergiebt sich für die Componenten der Resultirenden R auf die Axen

$$\begin{aligned} R_x &= R\cos\varphi = \Sigma(P\cos\alpha), \\ R_y &= R\sin\varphi = \Sigma(P\sin\alpha). \end{aligned} \tag{142}$$

Die Grösse der Resultirenden findet man aus der Gleichung

$$R = \sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\sin\alpha)^2}. \tag{143}$$

Wenn mit φ der Winkel zwischen der Resultirenden und der positiven x-Axe bezeichnet wird, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)}. \tag{144}$$

Lage der Resultirenden.

Um die Lage der Resultirenden zu bestimmen, wird der Momentensatz benützt. In Bezug auf einen Pol O geben die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ bez. die statischen Momente $P_1\,p_1, P_2\,p_2 \ldots P_n\,p_n$, mit der algebraischen Summe

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = \Sigma(Pp).$$

Nennt man r den Abstand der Resultirenden R vom Punkte O, so ist gemäss dem Momentensatze

$$Rr = \Sigma(Pp).$$

Da ferner R aus der Gleichung (143) bekannt ist, findet man den Abstand r:

$$r = \frac{\Sigma(Pp)}{R}. \tag{145}$$

Der Abstand r erhält dasselbe Zeichen wie $\Sigma(Pp)$ und giebt somit die Lage der Resultirenden eindeutig an. Die Resultirende ist die eine der mit der x-Axe den Winkel φ einschliessenden Tangenten eines Kreises vom Radius r um O als Mittelpunkt (Fig. 153), und zwar diejenige, welche in Bezug auf O ein Moment liefert, dessen Vorzeichen mit demjenigen von $\Sigma(Pp)$ übereinstimmt. Bei der Construction der Lage von R braucht man also nur das Stück r aus O nach der richtigen Seite auf einer Senkrechten zu der Richtungslinie von R abzutragen.

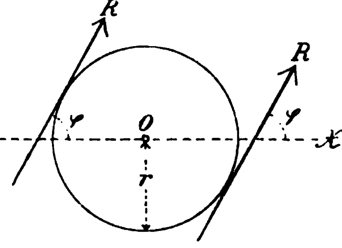


Fig. 153.

§ 53.

Graphische Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons.

In gleicher Weise wie bei der analytischen Zusammensetzung bestimmt man zuerst die Grösse und Richtung und dann die Lage der Resultirenden.

Kräftepolygon.

Um die Grösse und Richtung der Resultirenden zu finden, hat man sich alle Kräfte nach einem gemeinsamen

Angriffspunkte verschoben zu denken, was wie oben gezeigt wurde, nur die Lage der Resultirenden beeinflusst. Die Kräfte werden dann mit Hülfe des gewöhnlichen Kräftepolygons (§ 37) so zusammengesetzt, dass man sie unverändert nach einander abträgt (Fig. 154 *I*). Die Strecke, welche den Anfangspunkt der ersten Kraft mit dem Endpunkte der letzten Kraft verbindet, stellt die Resultirende der Grösse und Richtung nach dar.

Seilpolygon. Zur Bestimmung der Lage der Resultirenden wird das sog. Seilpolygon benützt (Fig. 154 *II*). Man ver-

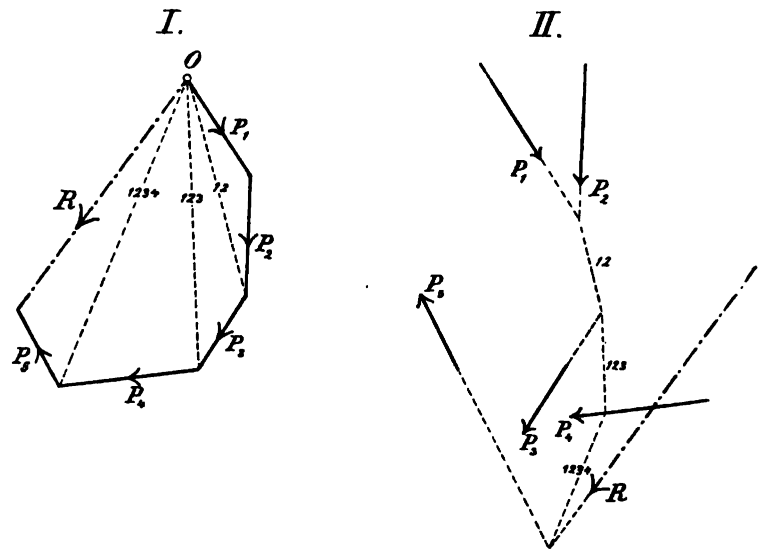


Fig. 154.

längert die Richtungslinien der Kräfte P_1 und P_2 bis zu ihrem Schnittpunkte. Durch diesen Punkt geht die Resultirende R_{12} der beiden Kräfte. Sie ist der Grösse und Richtung nach bekannt, weil sie durch die Diagonale 12 im Kräftepolygon dargestellt wird. Durch den genannten Schnittpunkt wird deshalb eine Parallele 12 zu dieser Diagonale gezogen. Dann werden 12 und P_3 verlängert, bis sie sich schneiden. Durch den Schnittpunkt geht die

Resultirende R_{123} von P_1, P_2 und P_3, sie kann dargestellt werden, weil ihre Richtung und Grösse durch die Diagonale 123 des Kräftepolygons gegeben sind. In dieser Weise construirt man nach einander die Seiten des Seilpolygons, jede Seite desselben geht durch den Schnittpunkt der vorhergehenden Seite mit einer Kraft des Systems und ist parallel einer bestimmten Diagonale im Kräftepolygon. Die Seiten des Seilpolygons sind P_1, 12, 123 u. s. w., auf der letzten Seite $123..n$ liegt die Resultirende sämtlicher n Kräfte. Man erhält also Grösse und Richtung der Resultirenden mit Hülfe des Kräftepolygons, die Lage derselben mit Hülfe des Seilpolygons.

Resultirende einer Anzahl von Kräften.

Die Kräfte- und Seilpolygone können noch zu anderen Zwecken benützt werden, z. B. auch zu der Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl auf einander folgender Kräfte. Die Resultirende einer gewissen Anzahl von Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. wird in Bezug auf Grösse und Richtung durch eine Diagonale des Kräftepolygons, in Bezug auf ihre Lage durch die entsprechende Seite des Seilpolygons dargestellt. Wie man leicht erkennt, gilt der Satz: *Eine Seite des Seilpolygons giebt die Lage der Resultirenden aller vorhergehenden Kräfte an; die letzte Seite enthält die Resultirende des ganzen Systems.*

Wenn P_1 nicht die erste der betrachteten auf einander folgenden Kräfte ist, welche aus dem ganzen Systeme herausgegriffen und besonders für sich zusammengesetzt werden sollen, so erhält man die Grösse und Richtung der Resultirenden vermittelst einer Diagonale des Kräftepolygons, die nun so gewählt wird, dass sie mit den betreffenden Kräften ein geschlossenes Polygon bildet (Fig. 155 *I*). Die Lage der Resultirenden ergiebt sich aus dem Satze: *Durch den Schnittpunkt zweier Seiten des Seilpolygons geht die Resultirende aller der zwischen ihnen liegenden Kräfte.*

Betrachtet man z. *B.* die Kräfte 3, 4 und 5 in der Figur 155 *II* und bezeichnet ihre Resultirende mit R',

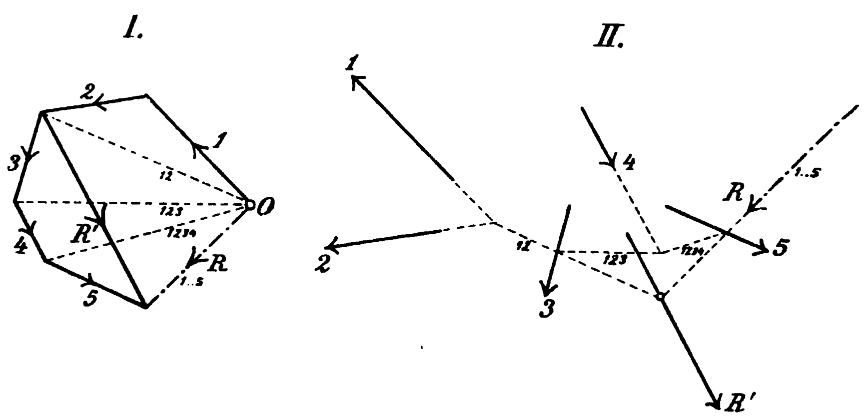


Fig. 155.

die Resultirende des ganzen Systemes mit R, so kann R als Resultirende von R_{12} (der Resultirenden von 1 und 2) und von R' aufgefasst werden. Die Kraft R geht also durch den Schnittpunkt der Seite 12 des Seilpolygons, auf welcher R_{12} liegt, und der gesuchten Resultirenden R', oder umgekehrt R' durch den Schnittpunkt der Seiten 12 und $R = 12345$ im Seilpolygon, d. h. derjenigen beiden Seiten, zwischen welchen die Kräfte 3, 4 und 5 liegen. Dadurch ist aber die Lage von R' völlig bestimmt, und zwar in Übereinstimmung mit dem oben angeführten Satze.

Allgemeinere graphische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Das angegebene Verfahren zur graphischen Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene ist nicht mehr anwendbar, wenn eine der Diagonalen des Kräftepolygons mit der nachfolgenden Seite zusammenfällt. Die entsprechende Kraft und die entsprechende Seite des Seilpolygons sind dann parallel, und eine Ecke des Seilpolygons liegt unendlich fern. In einem solchen Falle könnte man sich vielleicht dadurch helfen, dass man die Reihenfolge der Kräfte ändern würde; die Resultirende würde dadurch nicht beeinflusst. Es ist aber zweckmässiger ein allgemeineres graphisches Verfahren anzuwenden, das im folgenden beschrieben werden soll.

Die gegebenen Kräfte seien 1, 2, 3 und 4 (Fig. 156). Sie werden zuerst zu einem Kräftepolygon zusammengesetzt, welches in bekannter Weise die Grösse und Richtung der Resultirenden liefert. Dann wird eine beliebige (für die Zeichnung passende) Hülfskraft 0 gewählt, welche als erste Seite des Kräfte- und des Seilpolygons angenommen wird.

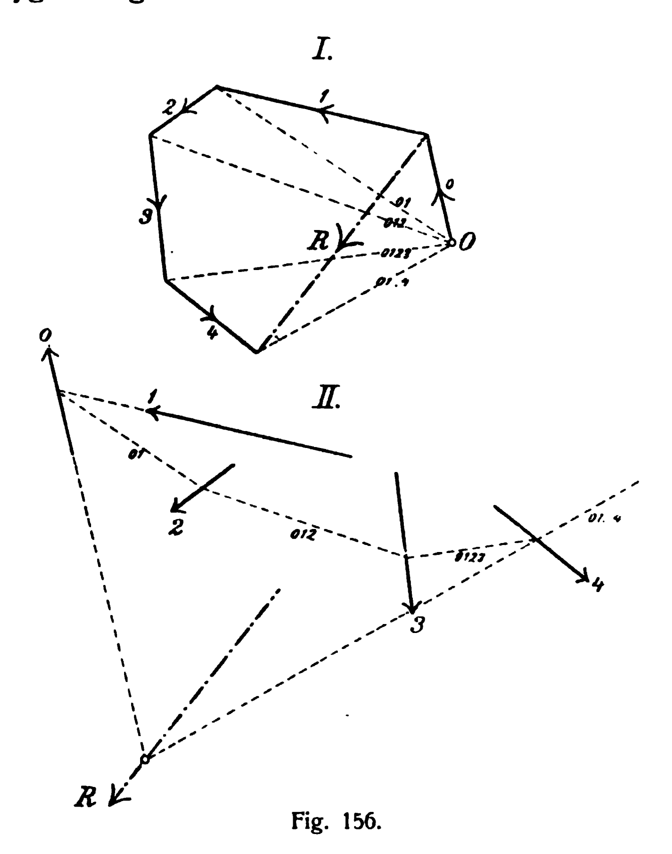


Fig. 156.

Man zeichnet dann wie früher die Resultirende der Kräfte 0, 1, 2, 3 und 4. Sie wird durch die Linien 01234 im Kräfte- und im Seilpolygon dargestellt. Nach einem Satze auf p. 261 geht die Resultirende R von 1, 2, 3 und

4 durch den Schnittpunkt der die Kräfte einschliessenden Seilpolygonseiten 0 und 01234, welche die äussersten Seiten des Seilpolygons heissen. Die Resultirende ist damit völlig bestimmt.

Der Anfangspunkt O der Hülfskraft im Kräftepolygon heisst Pol des Kräftepolygons. Die von ihm ausgehenden Geraden 0, 01 .. 01234 werden Polstrahlen genannt.

Satz: *Die Resultirende der gegebenen Kräfte geht durch den Schnittpunkt der äussersten Seiten des allgemeinen Seilpolygons.*

§ 54.

Eigenschaften der Kräfte- und Seilpolygone.

Beziehungen zwischen Kräfte- und Seilpolygon.

Eine Kraft (Seite oder Diagonale) im Kräftepolygon bildet mit zwei Polstrahlen ein Dreieck; im Seilpolygon geht dieselbe Kraft durch den Schnittpunkt der entsprechenden Seiten. Die Resultirende bildet für sich ein Dreieck mit den äussersten Polstrahlen des Kräftepolygons und geht durch den Schnittpunkt der äussersten Seiten des Seilpolygons.

Eine Seite des Seilpolygons bildet mit zwei Richtungslinien von Kräften ein Dreieck; die entsprechenden Linien des Kräftepolygons gehen durch denselben Punkt.

Beim Kräftepolygon sind zwei Fälle möglich: das Kräftepolygon ist entweder offen oder geschlossen.

Offenes Kräftepolygon.

Das Kräftepolygon heisst offen, falls der Endpunkt der letzten Kraft nicht mit dem Anfangspunkte der ersten Kraft zusammenfällt. In diesem Falle hat das System der Kräfte in der Ebene immer eine Resultirende.

Das Kräftepolygon heisst dagegen geschlossen, falls der Endpunkt der letzten Kraft mit dem Anfangspunkte der ersten Kraft zusammenfällt. Dabei fallen auch die beiden äussersten Polstrahlen mit einander zusammen, und die Resultirende ist gleich Null. Die beiden äus-

sersten Seiten des Seilpolygons sind entweder einander parallel oder fallen zusammen. In dem ersteren Falle heisst das Seilpolygon offen, in dem letzteren Falle geschlossen.

Geschlossenes Kräftepolygon; offenes Seilpolygon.

Wenn *das Kräftepolygon geschlossen, das Seilpolygon aber offen* ist, so erhält man eine Resultirende Null in unendlich grosser Entfernung. Eine solche Kraft ist aber mit einem Kräftepaare gleichbedeutend. In der Figur 157 ist die Kraft 01234 die nach dem in § 53 zuerst entwickelten specielleren Verfahren erhaltene Resultirende der Hülfskraft 0 und der gegebenen Kräfte 1, 2, 3 und 4. Fügt man jetzt auf der Richtungslinie der

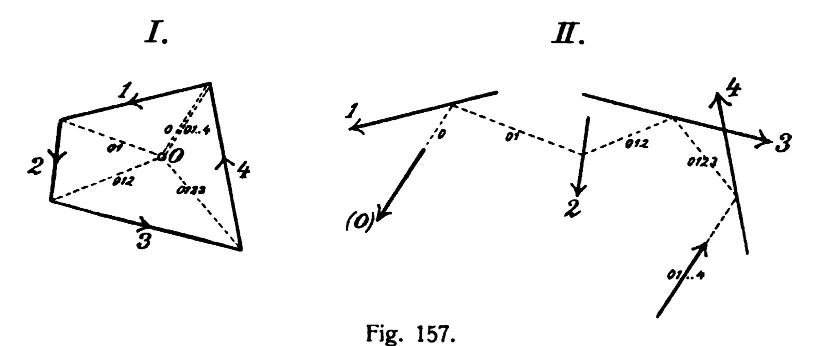


Fig. 157.

Kraft 0 die gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft (0) hinzu, so wird die Kraft 0 aufgehoben; und man findet, dass das System der gegebenen Kräfte 1, 2, 3 und 4 den beiden Kräften (0) und 01234, d. h. einem Kräftepaare äquivalent ist.

Kräfte- und Seilpolygon geschlossen.

Wenn schliesslich *sowohl das Kräftepolygon als das Seilpolygon geschlossen* ist, so wird eine Resultirende Null auf einer bestimmten Richtungslinie erhalten, d. h. die gegebenen Kräfte heben sich auf oder bilden ein System im Gleichgewicht. Graphisch nehmen also die Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von Kräften in der Ebene eine sehr einfache Form an. Die analytischen Gleichgewichtsbedingungen werden in § 61 weiter unten abgeleitet.

Mehrere zu demselben Kräftesysteme gehörende Kräfte- und Seilpolygone.

Der Pol des Kräftepolygons kann beliebig gewählt werden, dasselbe gilt von der Lage der ersten Seite des Seilpolygons. Zwei oder mehrere Seil- und Kräftepolygone, welche zu demselben Kräftesysteme gehören, haben beachtenswerte Eigenschaften, unter welchen eine hier hervorgehoben werden soll.

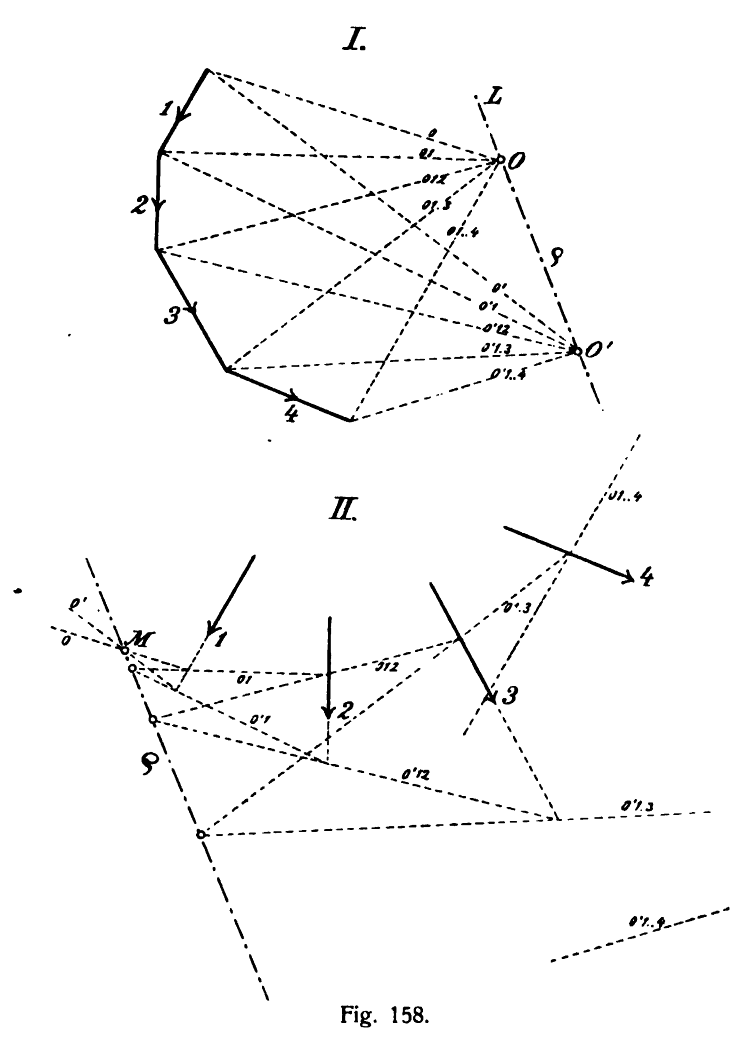


Fig. 158.

Für zwei Kräftepolygone mit den Polen O und O' und die beiden entsprechenden Seilpolygone gilt der Satz:

Die Schnittpunkte entsprechender Seiten beider Seilpolygone liegen auf einer Geraden, welche parallel der Verbindungslinie der beiden Pole O und O' der Kräftepolygone ist.

Zum Beweise des Satzes soll OO' (Fig. 158) als eine Kraft betrachtet und mit ϱ bezeichnet werden. Sie ist die Resultirende der Hülfskraft 0 und der entgegengesetzt genommenen Kraft (0′) und liegt auf der durch den Schnittpunkt M der beiden ersten Seilpolygonseiten 0 und 0′ gezogenen Parallelen zu OO'. Es kann aber ϱ auch als Resultirende von 01 und (0′1) aufgefasst werden, denn 01 und (0′1) stellen zusammen die vier Kräfte

$$0, 1, (0') \text{ und } (1)$$

dar, unter welchen 1 und (1) sich aufheben. Die Kräfte 01 und (0′1) liegen auf entsprechenden Seiten beider Seilpolygone; weil sie ϱ zur Resultirenden haben, so müssen sie sich auf der Richtungslinie von ϱ schneiden. In derselben Weise kann man fortfahren. Die beiden Kräfte 012 und (0′12) ersetzen sechs Kräfte

$$0, 1, 2, (0'), (1) \text{ und } (2),$$

von welchen jedoch vier verschwinden, so dass nur 0 und (0′) mit der Resultirenden ϱ übrig bleiben. Die Seilpolygonseiten 012 und 0′12 schneiden sich also auch auf der Geraden ϱ u. s. w.

Derselbe Satz kann etwas allgemeiner so formulirt werden:

Wenn der Pol sich längs einer Geraden L bewegt und die erste Seite des sich verändernden Seilpolygons durch einen festen Punkt M geführt wird, so drehen sich auch die übrigen Seilpolygonseiten um feste Punkte, welche auf einer durch M gezogenen Parallelen zu L liegen.

§ 55.

Besondere Anwendungen des Momentensatzes u. a.

Analytischer Ausdruck einer Momentensumme.

1) Mit Hülfe des Momentensatzes erhält man einen einfachen analytischen Ausdruck des statischen Momentes einer Kraft in Bezug auf einen Punkt. Es seien x und y die Coordinaten des Angriffspunktes A in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 159), x_0 und y_0 die Coordinaten des Pols O der Momente und X und Y die Componenten der Kraft P parallel den beiden Coordinatenaxen. Das statische Moment der Kraft P in Bezug auf O ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente ihrer beiden Componenten X und Y; man erhält somit die folgende Formel:

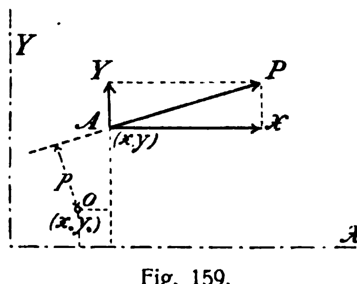


Fig. 159.

$$(146)\quad M = Pp = (y - y_0)X - (x - x_0)Y = yX - xY - (y_0X - x_0Y).$$

Wenn der Pol mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt, so ist

$$(147)\quad M = Pp = yX - xY,$$

ein oft wiederkehrender Ausdruck.

Für eine Anzahl von Kräften

$$\begin{array}{lccc} & P_1 & P_2 \;\ldots\ldots & P_n \\ \text{mit den Comp.} & X_1, Y_1 & X_2, Y_2 \ldots\ldots & X_n, Y_n \\ \text{und den Coord.} & x_1, y_1 & x_2, y_2 \ldots\ldots & x_n, y_n \end{array}$$

der Angriffspunkte ist die Summe der Momente in Bezug auf den Pol x_0, y_0

$$(148)\quad \Sigma(Pp) = \Sigma(y - y_0)X - \Sigma(x - x_0)Y$$

und in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt

(149) $$\Sigma(yX - xY).$$

Graphischer Ausdruck einer Momentensumme.

2) Die Summe der Momente einer Anzahl von Kräften in der Ebene in Bezug auf einen Punkt kann auch graphisch sehr leicht bestimmt werden.

In der Figur 160 ist C der Pol der Momente; die Resultirende R ist in gewöhnlicher Weise mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons construirt worden. Man kann jetzt den Abstand r des Pols C von der Resultirenden R in der Figur messen; es ist dann nach dem Momenten-

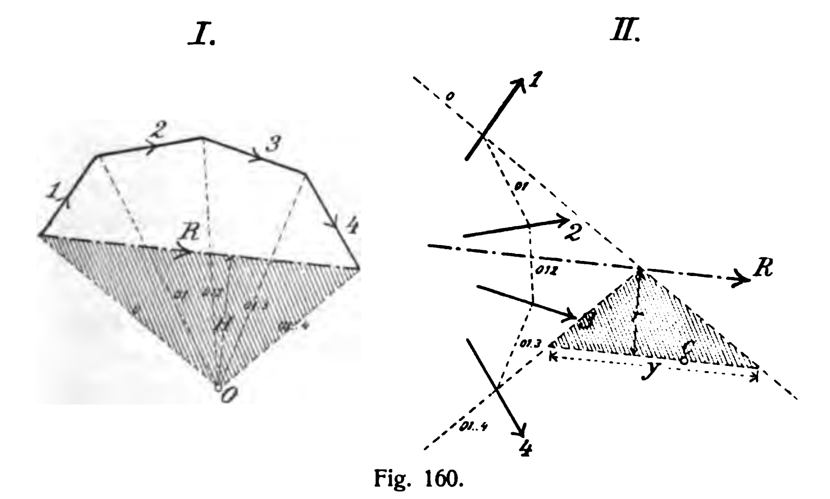


Fig. 160.

satze das Product Rr mit Berücksichtigung des Zeichens von r gleich der gesuchten Momentensumme. Statt Rr wird aber besser ein anderes Product gewählt. Man verlängert die beiden äussersten Seiten des Seilpolygons und zieht eine Parallele der Resultirenden R durch den Pol C. Auf dieser Parallelen wird von den äussersten Seilpolygonseiten ein Stück abgeschnitten, dessen Länge mit y bezeichnet werde. Im Kräftepolygon fällt man vom Pole O eine Senkrechte H auf die Resultirende R. Dieser Abstand H des Punktes O von R heisst die Pol-

w e i t e. Die beiden schraffirten Dreiecke der Figur sind ähnlich und ergeben

$$\frac{R}{y} = \frac{H}{r}$$

oder

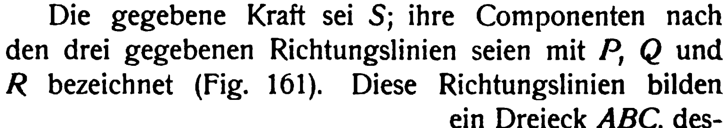
$$Rr = Hy. \tag{150}$$

Hieraus folgt der Satz: *Die Summe der statischen Momente einer Anzahl von Kräften in einer Ebene in Bezug auf einen Pol C der Ebene ist gleich dem Producte aus der Polweite des Kräftepolygons in diejenige Strecke, welche die äussersten Seilpolygonseiten auf einer durch den Pol C gezogenen Parallelen zur Resultirenden der Kräfte abschneiden.*

Die Polweite H wird wie alle Strecken des Kräftepolygons als eine Kraft angesehen und im Kräftemassstabe gemessen; die Strecke y ist eine Länge, welche als mit einem bestimmten Vorzeichen versehen betrachtet werden muss.

3) Analytische Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungslinien einer Ebene.

Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungslinien. Methode von R i t t e r.



Die gegebene Kraft sei S; ihre Componenten nach den drei gegebenen Richtungslinien seien mit P, Q und R bezeichnet (Fig. 161). Diese Richtungslinien bilden ein Dreieck ABC, dessen Ecken die Abstände a, b und c von S haben, und in welchem die Höhen p, q und r sind. Wählt man jetzt die Ecke A als Pol, so muss nach dem Momentensatze das Moment von S in Bezug auf A gleich

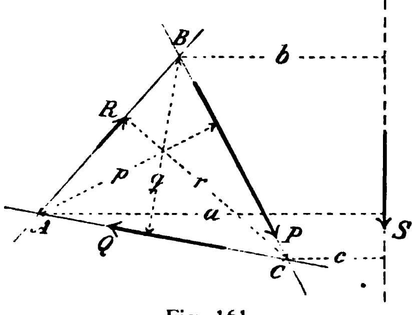


Fig. 161.

der Summe der Momente der drei gesuchten Componenten P, Q und R sein. Aber die Momente von Q und R sind gleich Null, weil die Kräfte durch den Pol gehen. In der aufzustellenden Gleichung ist deshalb P die einzige Unbekannte. Die Gleichung ist

$$Sa = Pp$$

und liefert den Wert von P. Nimmt man ebenso nach einander B und C als Pole der Momente, so folgt das System der Werte

$$P = \frac{a}{p} S, \quad Q = \frac{b}{q} S, \quad R = \frac{c}{r} S. \tag{151}$$

Das Verfahren den Pol in den Schnittpunkt zweier Kraftrichtungen zu verlegen, wird nach A. Ritter benannt, der demselben eine ausgedehnte Anwendung bei der Berechnung der Spannkräfte in den Stäben eines Fachwerkes gegeben hat.

Ersetzt man S durch die entgegengesetzte Kraft (S), so bilden die vier in derselben Ebene liegenden Kräfte P, Q, R und (S) ein System im Gleichgewicht. Das benützte Verfahren zeigt ohne jede Berechnung, welcher Sinn jeder der Componenten von S zukommt. Das Moment der Componente in Bezug auf den gewählten Momentenpol muss dasselbe Zeichen haben wie das Moment der Resultirenden, woraus die Drehungsrichtung um den Pol sich unmittelbar ergiebt.[1]

Zerlegung einer Kraft in drei Componenten nach Culmann.

4) Das Problem der Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungslinien wird in einer eleganten Form graphisch von Culmann gelöst (Fig. 162).

Die Kraft S wird zuerst nach einer der Kraftrichtungen, z. B. derjenigen von P, und nach der Geraden zer-

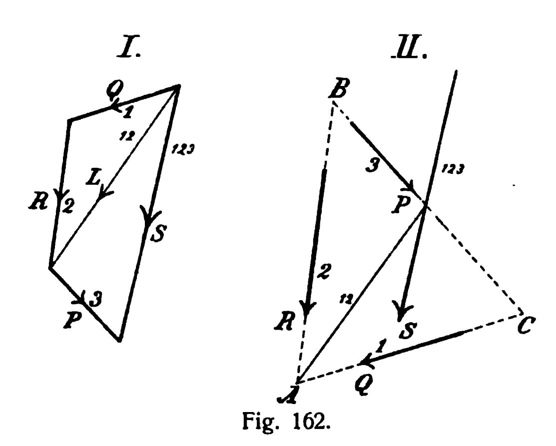


Fig. 162.

legt, welche den Schnittpunkt von P und S mit dem Schnittpunkte von Q und R verbindet. Die letztere Componente werde L genannt. Die Zerlegung wird vermittelst eines Kräftedreieckes ausgeführt. Über der Seite L dieses Kräftedreieckes wird ein anderes Dreieck gezeichnet, durch welches die Kraft L, die durch den Schnittpunkt der Kräfte Q und R geht und ihre Resultirende ist, in Q und R zerlegt wird. Die beiden Figuren I und II stellen ein vollständiges Kräfte- und Seilpolygon dar, wie die Zifferbezeichnungen der Figuren näher zeigen.

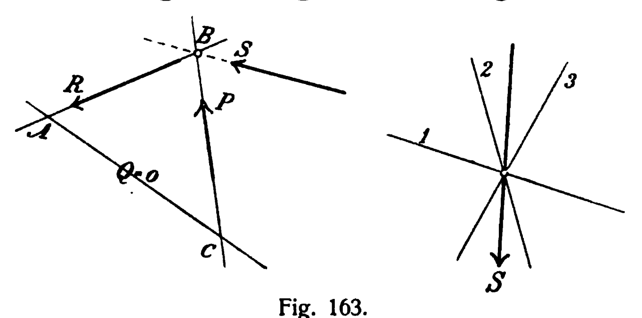


Fig. 163.

Man erhält besondere Fälle, wenn die Kraft S durch den Schnittpunkt zweier Richtungslinien geht: die dritte Componente ist dann gleich Null; oder wenn die drei Richtungslinien durch denselben Punkt gehen: die Componenten werden in diesem Falle unendlich gross, und die Zerlegung ist nicht möglich. Würde auch die Re-

sultirende S durch denselben Punkt gehen, so könnte eine von den Componenten beliebig gewählt werden; die Zerlegung wäre somit unbestimmt.

§ 56.

Zusammensetzung und Zerlegung von parallelen Kräften in einer Ebene.

Zwei parallele Kräfte.

In § 51 sind zwei parallele Kräfte, welche kein Kräftepaar bilden, analytisch zusammengesetzt worden. Die Resultirende ist gleich der Summe oder der Differenz der Kräfte, je nachdem die Kräfte gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind; sie ist ferner parallel den Kräften und teilt ihren Abstand inner- oder ausserhalb im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

Zu denselben Resultaten kommt man bei der graphischen Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons (Figuren 164 u. 165). Um z. B. die Lage der Resultirenden zweier im gleichen Sinne gerichteter paralleler Kräfte (Fig. 164) zu bestimmen, beachte man, dass die Dreiecke mit den Seiten 0,

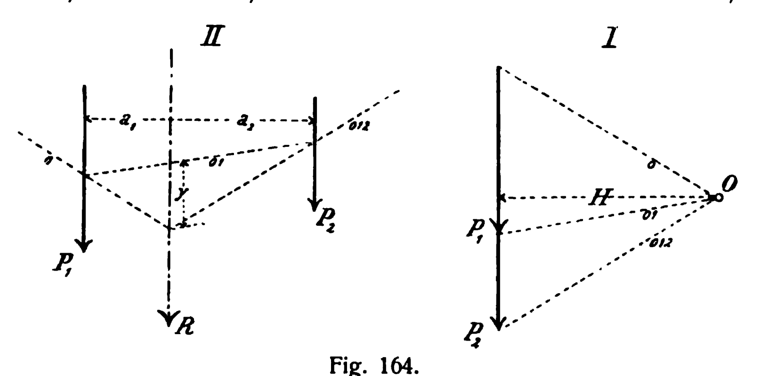


Fig. 164.

01 und P_1 sowie 01, 012 und P_2 im Kräftepolygon bez. den Dreiecken mit den Seiten 0, 01 und y sowie 01, 012 und y im Seilpolygon ähnlich sind. Daraus ergiebt sich

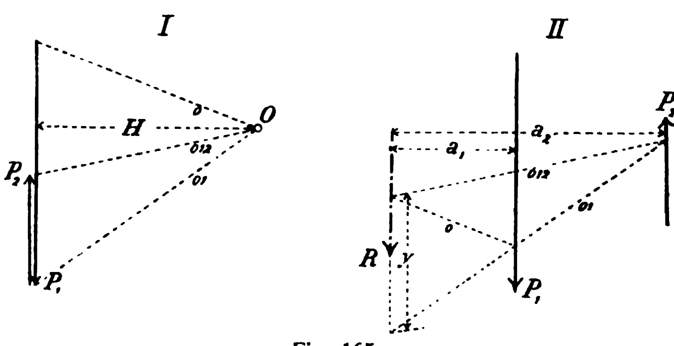


Fig. 165.

$$\frac{P_1}{H} = \frac{y}{a_1}; \; \frac{P_2}{H} = \frac{y}{a_2}$$

und die bekannte Relation

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Beliebig viele Kräfte. Graphische Zusammensetzung.

Beliebig viele parallele Kräfte werden in gewöhnlicher Weise mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons zusammengesetzt (Fig. 166). Im Kräftepolygon werden sämtliche

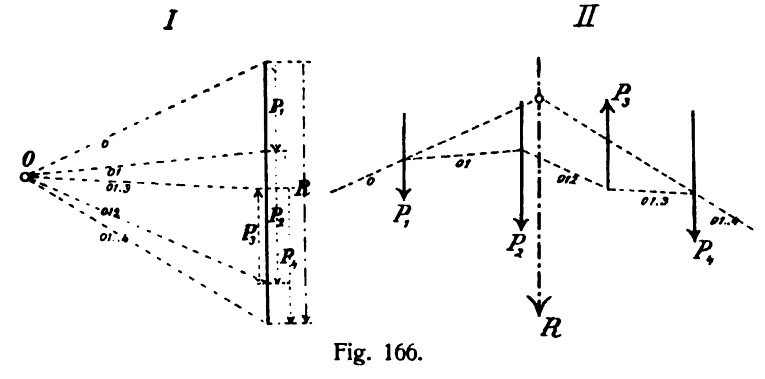


Fig. 166.

Kräfte auf derselben Geraden abgetragen, welche die Kraftlinie heisst. Der Pol des Kräftepolygons muss natürlich immer ausserhalb der Kraftlinie gewählt werden. Der Grösse nach ist die Resultirende gleich der alge-

braischen Summe der parallelen Kräfte. Die Lage der Resultirenden wird aus dem Seilpolygon erhalten; sie geht durch den Schnittpunkt der äussersten Seiten.

Affinität.

Construirt man zu einem System paralleler Kräfte zwei Seilpolygone (Fig. 167), so schneiden sich gemäss dem Satze auf p. 267 die entsprechenden Seiten beider Seilpolygone in Punkten einer Geraden, welche parallel der Verbindungslinie der beiden Pole ist. Die Verbindungslinie zweier sich entsprechender Eckpunkte der beiden Seilpolygone ist parallel einer festen Richtung, der Richtung der parallelen Kräfte. Die beiden Figuren mit

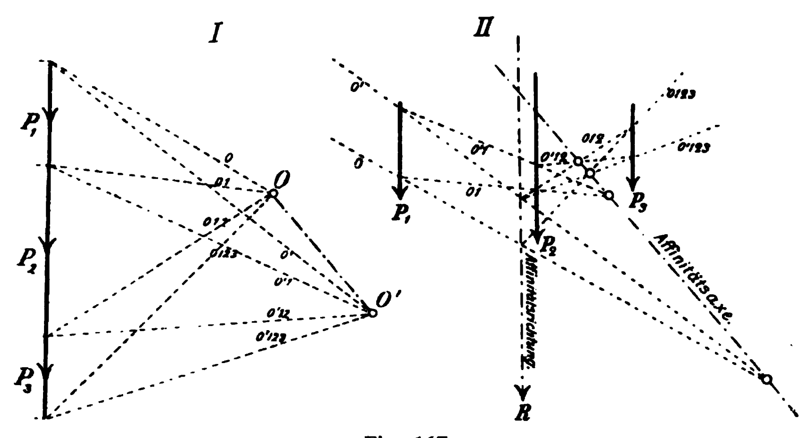


Fig. 167.

diesen geometrischen Eigenschaften heissen a f f i n; die Gerade, auf welcher die Schnittpunkte der Seiten liegen, ist die sog. A f f i n i t ä t s a x e, und die Richtung der parallelen Kräfte heisst A f f i n i t ä t s r i c h t u n g. Man kann bei manchen Aufgaben über parallele Kräfte von diesen Affinitätseigenschaften Gebrauch machen. (Siehe § 58).

Analytische Zusammensetzung.

Die Resultirende paralleler Kräfte erhält man analytisch der Grösse und Richtung nach mit Hülfe der Projectionssummen auf zwei Axen, der Lage nach durch den Momentensatz.

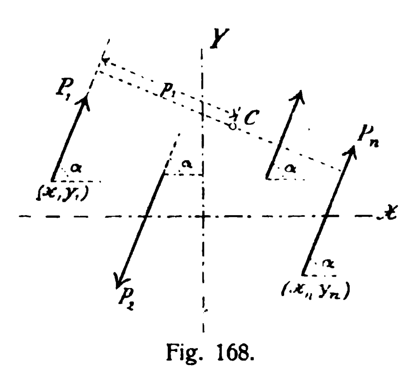


Fig. 168.

Es seien $P_1, P_2 .. P_n$ die gegebenen Kräfte (Fig. 168), α oder $\pi + \alpha$ sei der Winkel, den sie mit der positiven x-Axe einschliessen. Am besten rechnet man nur mit einem Winkel α und zählt die Kraft P_i positiv oder negativ, je nachdem sie die Richtung α oder die Richtung $\pi + \alpha$ besitzt. Für die Projectionssummen erhält man dann

$$\Sigma(P \cos \alpha) = \cos \alpha \,.\, \Sigma P,$$
$$\Sigma(P \sin \alpha) = \sin \alpha \,.\, \Sigma P;$$

für die Grösse der Resultirenden ergiebt sich

(152) $$R = \sqrt{\cos^2 \alpha \,.\, (\Sigma P)^2 + \sin^2 \alpha \, (\Sigma P)^2} = \Sigma P.$$

Die Resultirende ist also gleich der algebraischen Summe der parallelen Kräfte. Ferner ergiebt sich, wenn φ den Winkel der Resultirenden mit der x-Axe bezeichnet,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \,.\, \Sigma P}{\cos \alpha \,.\, \Sigma P} = \operatorname{tg} \alpha,$$

(153) $$\varphi = \alpha.$$

Die Resultirende ist also parallel den gegebenen Kräften. Nennt man p den Abstand einer Kraft P von einem beliebig gewählten Momentenpole, r den Abstand der Resultirenden von demselben Pole, so ist nach dem Momentensatze

$$Rr = \Sigma(Pp).$$

Man findet also

(154) $$r = \frac{\Sigma(Pp)}{R} = \frac{\Sigma(Pp)}{\Sigma P}.$$

Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Die Lage der Resultirenden kann auch durch Berechnung der Coordinaten eines bemerkenswerten Punktes derselben, des sog. Mittelpunktes der parallelen Kräfte bestimmt werden.

Nach der Formel (147) ist der analytische Ausdruck für das statische Moment der Kraft P, mit den Componenten X und Y parallel zwei auf einander senkrechten Coordinatenaxen, und dem Angriffspunkte mit den Coordinaten x und y, in Bezug auf den Anfangspunkt des Coordinatensystems

$$Pp = yX - xY.$$

Setzt man

$$X = P\cos\alpha,\quad Y = P\sin\alpha$$

und bildet die Summe der Momente aller parallelen Kräfte, so folgt

$$\Sigma(Pp) = \cos\alpha\,.\,\Sigma(Py) - \sin\alpha\,.\,\Sigma(Px).$$

Bezeichnet man ferner mit ξ und η die Coordinaten eines Punktes der Resultirenden, so ist deren Moment

$$Rr = \eta\cos\alpha\,\Sigma P - \xi\sin\alpha\,\Sigma P.$$

Der Momentensatz ergiebt alsdann

$$\eta\cos\alpha\,\Sigma P - \xi\sin\alpha\,\Sigma P = \cos\alpha\,\Sigma(Py) - \sin\alpha\,\Sigma(Px)$$

oder

$$(155)\qquad \cos\alpha\left(\eta - \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}\right) - \sin\alpha\left(\xi - \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}\right) = 0.$$

Wenn ξ und η als laufende Coordinaten eines Punktes aufgefasst werden, so stellt diese Gleichung eine Gerade, und zwar die Richtungslinie der Resultirenden dar. Der Gleichung (155) genügen die Werte

$$(156)\qquad \xi = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P},\ \eta = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P},$$

welche die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte sind.

Da der Gleichung (155) die Werte (156) für jeden Wert von a genügen, so folgt, dass *die Resultirende sämtlicher Kräfte sich um den Mittelpunkt dreht, wenn die Kräfte sich um ihre Angriffspunkte derart drehen, dass sie einander parallel bleiben.*

Wenn die Kräfte Schwerkräfte sind, so heisst ihr Mittelpunkt Schwerpunkt. Die Lehre vom Schwerpunkte findet sich im siebenten Abschnitt.

Zerlegung einer Kraft in zwei ihr parallele Componenten. 1) analytisch.

Das Problem der Zerlegung einer Kraft oder eines Systems von parallelen Kräften in zwei Componenten nach Richtungslinien, welche parallel den gegebenen Kräften sind, ist die Umkehrung des zuletzt behandelten Problemes der Zusammensetzung.

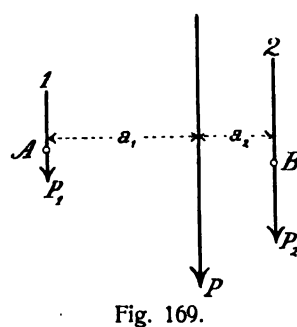


Fig. 169.

Es seien P eine gegebene Kraft (Fig. 169), 1 und 2 zwei zu ihr parallele Richtungslinien, zwischen welchen P liegt, in dem Abstande a_1 von 1 und a_2 von 2. Man sucht die beiden Componenten P_1 nach 1 und P_2 nach 2. Dazu hat man die Gleichungen

$$P_1 + P_2 = P,$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Durch Auflösung findet man

$$(157) \qquad P_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} P, \qquad P_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} P.$$

Zu dieser Berechnung kann auch der Momentensatz angewandt werden. Wählt man einen Punkt A auf der Linie 1 als Pol, so folgt

$$P a_1 = P_2 (a_1 + a_2);$$

ähnlich erhält man P_1. Die Componenten P_1 und P_2 haben beide dieselbe Richtung wie P.

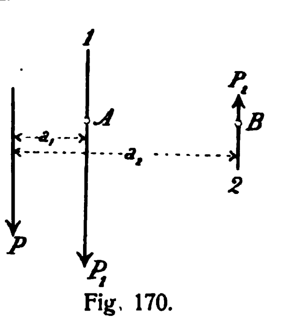


Fig. 170.

Wenn dagegen die Richtungslinien 1 und 2 auf derselben Seite von P liegen, so erhalten die Componenten entgegengesetzte Richtungen (Fig. 170). Es ergeben sich dann die Gleichungen

$$P_1 - P_2 = P,$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Daraus findet man

$$P_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} P,$$

(158)

$$P_2 = \frac{a_1}{a_2 - a_1} P.$$

Der Momentensatz führt zu denselben Ergebnissen.

Bei der graphischen Zerlegung einer Kraft in zwei ihr parallele Componenten werden die Kräfte- und Seilpolygone benützt (Figuren 171 u. 172). Man wählt den Pol O beliebig, trägt P auf einer Kraftlinie ab und zieht die äussersten Polstrahlen 0 und 012 sowie zwei ihnen parallele Seilpolygonseiten, welche sich auf der Richtungslinie von P schneiden. Die mittlere Seilpolygonseite 01 wird dann als die Verbindungslinie zwischen dem Schnittpunkte der Seilpolygonseite 0 mit der Richtungslinie der Componente P_1 und dem Schnittpunkte

2) graphisch.

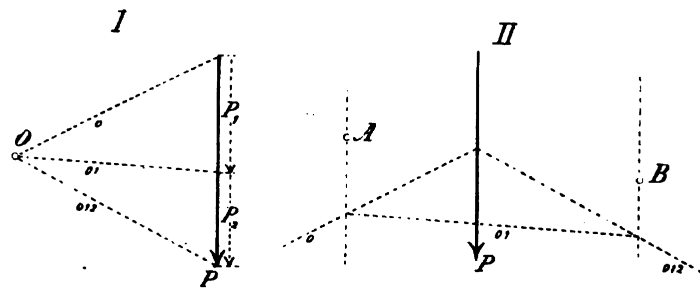


Fig. 171.

der Seilpolygonseite 012 mit der Richtungslinie der Componente P_2 construirt. Der parallel dieser Seilpolygonseite gezogene Polstrahl 01 des Kräftepolygons teilt die Kraft P in die beiden Componenten P_1 und P_2.

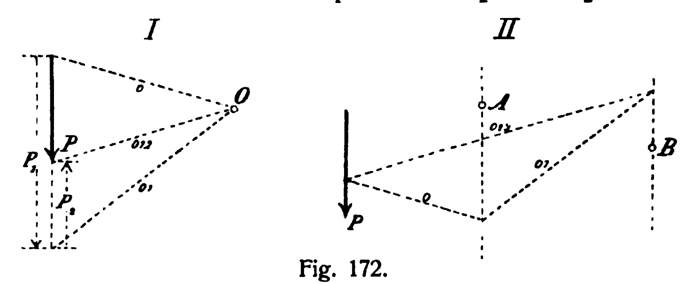


Fig. 172.

In den beiden vorhin behandelten Fällen kann die Construction so angeordnet werden, dass die Kräfte- und Seilpolygone teilweise zusammenfallen. Der Pol wird auf der einen Componente gewählt und die Kraft P auf die andere Componente projicirt (Figuren 173 u. 174).

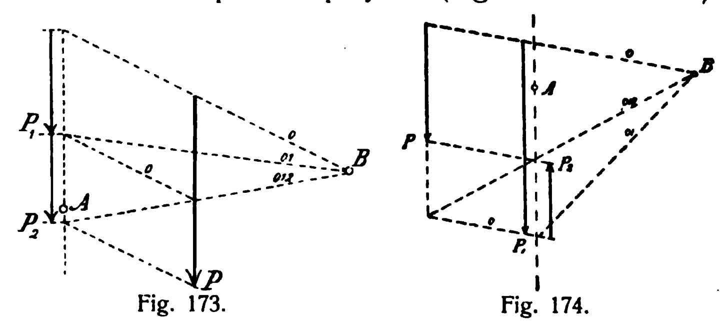


Fig. 173. Fig. 174.

Belasteter Balken. Auflagerreactionen.

Nimmt man statt der beiden Componenten P_1 und P_2 einer Kraft P die entgegengesetzten Kräfte (P_1) und (P_2), so bilden P, (P_1) und (P_2) ein Gleichgewichtssystem. Dieser Fall kommt bei einem belasteten, gewichtslos zu denkenden Balken vor, welcher zwei in derselben Horizontalebene liegende Stützen hat und in einem Punkte belastet ist (Fig. 175 u. 176). Es werde noch vorausgesetzt, die Auflager seien so construirt, dass die in ihnen entstehenden sog. A u f l a g e r r e a c t i o n e n (kürzer nur R e a c t i o n e n) vertical sind. Es besteht dann Gleichgewicht zwischen der Belastung P und den beiden Auflagerreactionen A und B, welche entgegengesetzt zu

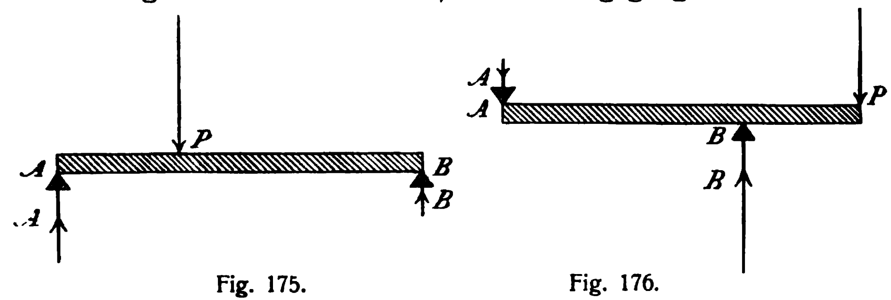


Fig. 175. Fig. 176.

den beiden Componenten von P nach ihren Richtungslinien sind, und somit in derselben Weise wie die Componenten ermittelt werden.

Es sollen jetzt die verticalen Auflagerreactionen bei einem in mehreren Punkten belasteten Balken bestimmt werden (Fig. 177).

Es seien P_1, P_2 . . P_n die Belastungen, A und B die beiden Reactionen. Analytisch werden A und B mit Hülfe des Momentensatzes

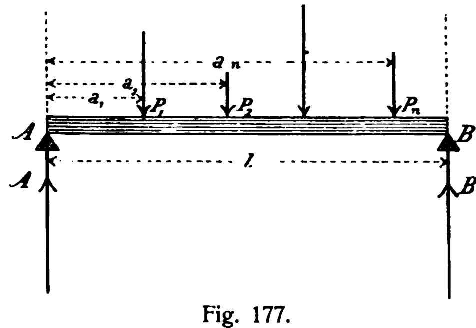


Fig. 177.

berechnet. In Bezug auf einen Pol auf der Verticalen durch die Stütze A muss die Reaction B ein Moment liefern, welches entgegengesetzt gleich der Summe der Momente aller Belastungen ist. Man findet also

$$Bl = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots + P_n a_n = \Sigma(Pa)$$

und

$$B = \frac{\Sigma(Pa)}{l}.$$

Ebenso ergiebt sich mit einem auf der Verticalen durch B gewählten Pole die Reaction A

$$A = \frac{\Sigma P(l - a)}{l}.$$

Die Ausdrücke zeigen, dass jede einzelne Kraft einen solchen Beitrag zu den Auflagerreactionen liefert, als ob sie allein vorhanden wäre.

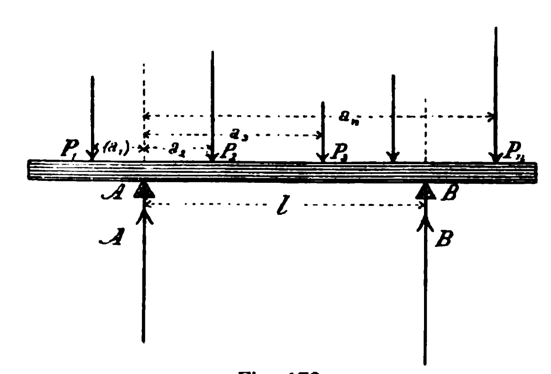


Fig. 178.

Dieselben Formeln gelten auch für einen überhängenden Balken (Fig. 178); nur muss man die Abstände a nach der einen (rechten) Seite von der Verticalen durch A positiv, nach der andern Seite negativ rechnen. Somit ist allgemein

$$B = \frac{\Sigma(Pa)}{l},$$
(159)
$$A = \frac{\Sigma P(l-a)}{l}.$$

Fig. 179.

Fig. 180.

Graphische Zerlegung eines Kräftesystems.

Graphisch wird ein System von parallelen Kräften in zwei ihnen parallele Componenten nach gegebenen Richtungslinien mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons zerlegt (Fig. 179). Zuerst construirt man die Resultirende der Kräfte. Bei der dann folgenden Zerlegung dieser Resultirenden verfährt man wie auf p. 279 angegeben und bedient sich des schon vorhandenen Seilpolygons, dessen äusserste Seiten man mit den äussersten Seiten des Zerlegungspolygons zusammenfallen lässt. Die mittlere Seite dieses Seilpolygons ist die Verbindungsgerade zwischen den Schnittpunkten je einer äussersten Seilpolygonseite mit der Richtungslinie der entsprechenden Componente und heisst Schlusslinie oder Schluss-seite des ursprünglichen Seilpolygons. Eine Parallele der Schlusslinie durch den Pol des Kräftepolygons teilt die Kraftlinie in die beiden gesuchten Componenten. Die Figuren 180 zeigen die in dieser Weise construirten Auflagerreactionen eines in mehreren Punkten belasteten Balkens.

§ 57.

Scherkraft und Biegungsmoment am belasteten Balken.

Scherkraft.

Man betrachte das im Gleichgewicht sich befindende Kräftesystem, welches von den in der gleichen Ebene liegenden Belastungen eines in zwei Punkten unterstützten Balkens und den beiden verticalen Auflagerreactionen in den Stützpunkten gebildet wird. Ferner nehme man eine zur Ebene der Kräfte senkrechte Verticalebene an, welche den Balken schneidet, und suche die Resultirende der auf der einen Seite des Schnittes, z. B. der linken Seite, liegenden Kräfte einschliesslich der Auflagerreaction. Diese Resultirende heisst Scherkraft des betrachteten Schnittes; sie ändert sich nicht, wenn der Schnitt zwischen zwei Belastungsstellen verschoben wird. Wird dagegen eine Belastungsstelle überschritten, so än-

dert sich die Scherkraft. Alle Kräfte links von einem Schnitte halten den rechts vom Schnitte liegenden Kräften das Gleichgewicht. Würde man die Scherkraft als die Resultirende der rechts vom Schnitte befindlichen Kräfte definiren, so erhielte man dieselbe Grösse und Richtungslinie, aber den entgegengesetzten Sinn.

Ermittelung der Scherkraft. 1) analytisch.

Die Grösse der Scherkraft in einem Schnitte ist gleich der algebraischen Summe der links vom Schnitte liegenden

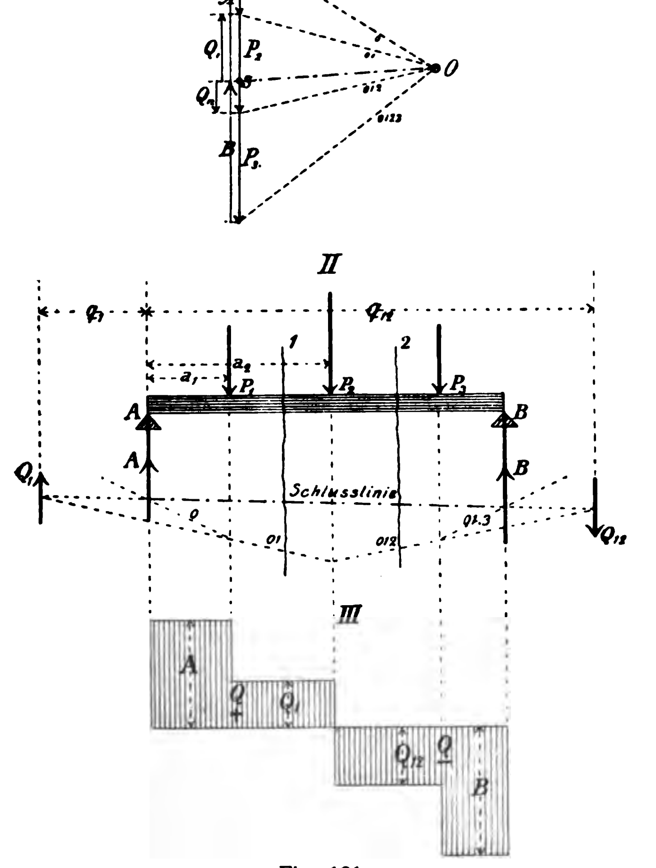


Fig. 181.

Belastungen und Reactionen. Die Lage wird analytisch durch den Momentensatz bestimmt. Zweckmässig wählt man oft einen Pol auf der Verticalen eines Stützpunktes. Rechnet man wie in der Figur 181 die Scherkräfte Q_1 und Q_{12} in den Schnitten 1 und 2 positiv nach oben, negativ nach unten, und ihre Abstände q_1 und q_{12} von der Verticalen durch den Stützpunkt A positiv nach rechts, negativ nach links, so findet man:

1)	2)
$Q_1 = A - P_1,$	$Q_{12} = A - P_1 - P_2,$
$-Q_1 q_1 = P_1 a_1,$	$-Q_{12} q_{12} = P_1 a_1 + P_2 a_2,$
$q_1 = -\frac{P_1 a_1}{A - P_1},$	$q_{12} = -\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{A - P_1 - P_2}.$

In diese Ausdrücke muss noch der Wert der Reaction A eingesetzt werden.

2) *graphisch.* Graphisch werden die Scherkräfte mit Hülfe der Kräfte- und Seilpolygone erhalten, welche bei der Construction der Reactionen benützt wurden. *Eine durch den Pol des Kräftepolygons geführte Parallele der Schlusslinie trifft die Kraftlinie in einem Punkte S, dessen Abstände von den Endpunkten der Kräfte die Scherkräfte sind.* Die Lage einer Scherkraft ist durch folgende Regel bestimmt. *Die Scherkraft in einem Schnitte geht durch den Schnittpunkt der Schlusslinie und derjenigen Seite des Seilpolygons, welche vom Schnitte getroffen wird.* Die Richtigkeit dieser Regel folgt daraus, dass die Schlusslinie und die genannte Seilpolygonseite die äussersten Seiten eines Seilpolygons sind, welche zur Construction der Scherkraft als Resultirende sämtlicher Kräfte und Reactionen links vom Schnitte dient.

Die Scherkräfte können auch als Ordinaten eines Diagramms veranschaulicht werden. In der Figur 181, III sind die positiven Scherkräfte von einer Horizontalen nach oben, die negativen nach unten abgetragen. Bei

einem in einzelnen Punkten belasteten Balken hat die so erhaltene Figur eine treppenförmige Gestalt.

Momentensumme paralleler Kräfte.

Die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Pol in ihrer Ebene kann direct berechnet werden; noch einfacher wird sie erhalten, wenn die Resultirende der Kräfte benützt wird. Graphisch wird die Summe der statischen Momente nach dem auf p. 269 für beliebige Kräfte angegebenen Verfahren ermittelt. Die Strecke y ist in dem jetzt vorliegenden Falle parallel der Richtung der Kräfte. Man erhält daher den Satz:

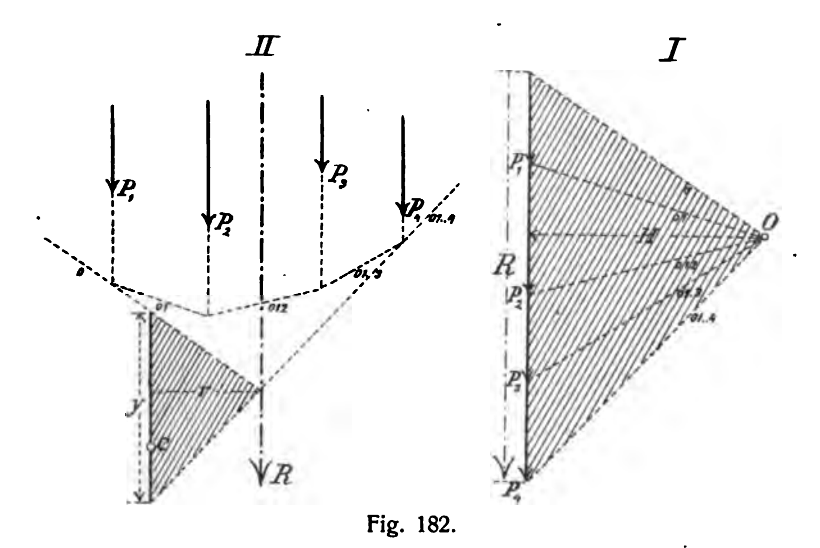


Fig. 182.

Die Summe der Momente einer Anzahl von parallelen Kräften, welche in einer Ebene liegen, in Bezug auf einen Pol in der Ebene, ist gleich dem Producte aus der Polweite H des Kräftepolygons und der Strecke y, welche die äussersten Seiten des Seilpolygons auf einer Parallelen durch den Pol zur Kraftrichtung abschneiden (Fig. 182).

In derselben Weise wie auf p. 270 findet man aus den schraffirten ähnlichen Dreiecken der Figur:

$$\frac{R}{y} = \frac{H}{r}$$

und

$$Rr = Hy.$$

Da die Polweite H unveränderlich ist, so sind sämtliche statische Momente proportional den Strecken y, und werden bei zweckmässiger Wahl des Massstabes durch die Längen y selbst dargestellt.

Biegungs-moment.

Unter dem Biegungsmomente für einen Schnitt eines belasteten Balkens wird die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte und Reactionen auf der einen (linken) Seite des Schnittes in Bezug auf einen in dem Schnitte liegenden Pol verstanden.

Würde man die Kräfte und Reactionen auf der rechten Seite des Schnittes wählen, so würde nur das Vorzeichen des Biegungsmomentes sich ändern. Gemäss dem Momentensatze ist das Biegungsmoment gleich dem statischen Momente der Scherkraft in Bezug auf einen in dem Schnitte liegenden Pol. Das Biegungsmoment ändert sich von Schnitt zu Schnitt. Analytisch berechnet man es entweder direct als die algebraische Summe der Momente der betreffenden Kräfte oder als das Moment der Scherkraft, wenn diese bekannt ist. Graphisch erhält man das Biegungsmoment aus den vorher benützten Kräfte- und Seilpolygonen (Fig. 183).

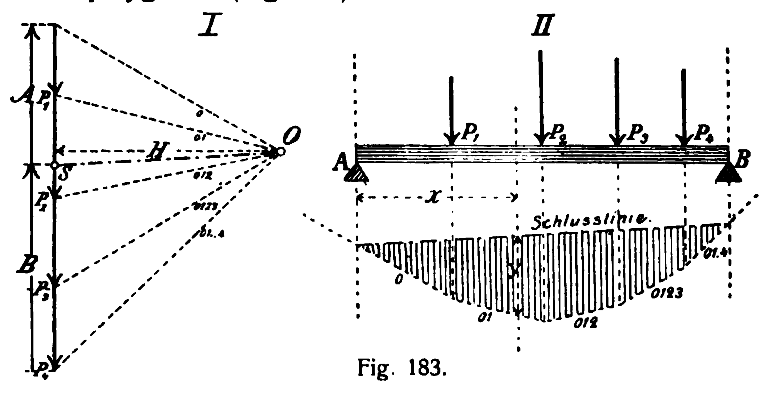


Fig. 183.

Die Belastungen eines Balkens halten den Auflagerreactionen das Gleichgewicht. Infolge dessen ist das zu den Belastungen und den Reactionen gehörende Seilpolygon ein geschlossenes Seilpolygon, dessen beide äusserste Seiten mit der Schlusslinie zusammenfallen. Die allgemeine Regel für die graphische Bestimmung der Momentensumme paralleler Kräfte liefert hier zur Bestimmung des Biegungsmomentes M_x in einem Schnitte in dem Abstande x von A die Regel:

Das Biegungsmoment in einem Schnitte ist gleich dem Product der Polweite und der im Schnitte liegenden Ordinate des geschlossenen Seilpolygons.

(160) $$M_x = Hy.$$

Culmann'sche Momentenfläche.

Das Biegungsmoment ist also direct proportional der genannten Ordinate. Die Construction rührt von dem Begründer der graphischen Statik, Culmann, her; das geschlossene Seilpolygon heisst oft Culmann'sche Momentenfläche. Diese Fläche veranschaulicht in klarer Weise die Veränderlichkeit des Biegungsmomentes von Schnitt zu Schnitt. Bei einem in zwei Punkten unterstützten Balken, dessen sämtliche Belastungen zwischen den Stützpunkten liegen, ist das Biegungsmoment gleich Null über den Stützpunkten und am grössten an einer der Belastungsstellen.

Wenn die Belastung eines Balkens nicht aus einzelnen Lasten besteht, sondern continuirlich ist, so kann man die Auflagerreactionen, die Scherkraft und das Biegungsmoment für einen Schnitt entweder genau analytisch berechnen, oder annähernd graphisch in der Weise construiren, dass man die continuirliche Belastung durch eine Anzahl von Einzellasten ersetzt, und zwar bis zu einer gewissen Grenze um so genauer, je mehr einzelne Lasten man annimmt.

Gleichförmige Belastung.

Den einfachsten Fall einer continuirlichen Belastung bietet ein in seiner ganzen Länge gleichförmig belasteter

Balken dar, welcher an beiden Enden unterstützt ist. (Fig. 184).

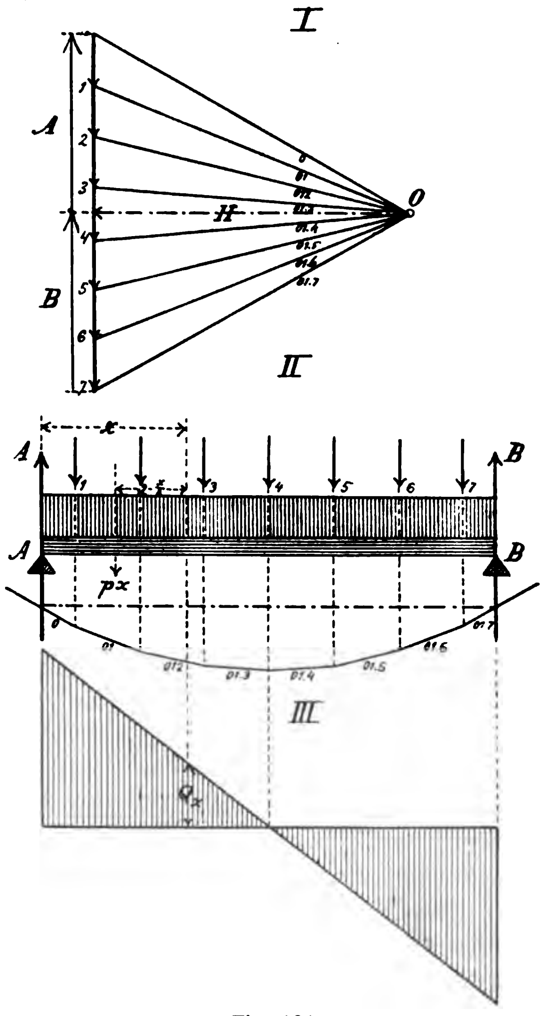


Fig. 184.

Es werde die Spannweite mit l, die Belastung pro Längeneinheit mit p bezeichnet. Die beiden Reactionen haben den Wert

(161) $$A = B = \frac{pl.}{2}$$

In einem Schnitte in dem Abstande x von der Stütze A ist die Scherkraft

(162) $$Q_x = A - px = p\left(\frac{l}{2} - x\right);$$

sie wird graphisch durch das Diagramm III dargestellt. Das Biegungsmoment in dem Schnitte x ist gleich der Summe der Momente der Auflagerreaction A und der Belastung px links vom Schnitte, welche in die Halbirungslinie des Stückes x verlegt werden darf. Es ergiebt sich daher

(163) $$M_x = Ax - px\frac{x}{2} = \frac{px\,(l-x)}{2}.$$

Seilcurve.

Wenn man sich die bei der Construction des Seilpolygons benützten einzelnen Belastungen als unendlich viele unendlich kleine Lasten vorstellt, so erhält man anstatt eines Seilpolygons eine continuirliche Curve, die sog. Seilcurve. Die Eigenschaften dieser Seilcurve sind analog denjenigen des gewöhnlichen Seilpolygons. Es geht beispielsweise die Scherkraft für einen Schnitt durch den Schnittpunkt der Schlusslinie mit der Tangente der Seilcurve in dem vom Schnitte getroffenen Punkte; das Biegungsmoment ist gleich dem Product aus der Polweite des Kräftepolygons und der Ordinate der geschlossenen Seilcurve u. s. w.

Auch die Gleichung der Seilcurve kann erhalten werden, und zwar mit Hülfe der Ausdrücke für das Biegungsmoment. Ist y die Ordinate der geschlossenen Seilcurve, so gilt für den gleichförmig belasteten Balken

$$M_x = Hy = \tfrac{1}{2}px\,(l-x)$$

und

(164) $$y = \tfrac{1}{2}\frac{p}{H}x\,(l-x).$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, welche zweckmässigerweise so construirt wird, dass die von der Schlusslinie gebildete Sehne horizontal wird. Es sind dann x und y rechtwinklige Coordinaten eines Punktes einer Parabel, deren Scheitel unterhalb der Balkenmitte liegt (Fig. 184).

Beziehung zwischen Scherkraft und Biegungsmoment.

Zwischen der Scherkraft und dem Biegungsmomente an einem in beliebiger Weise belasteten Balken besteht eine bemerkenswerte Beziehung. Es stelle AB in der Fig. 185, II einen continuirlich belasteten Balken dar. In

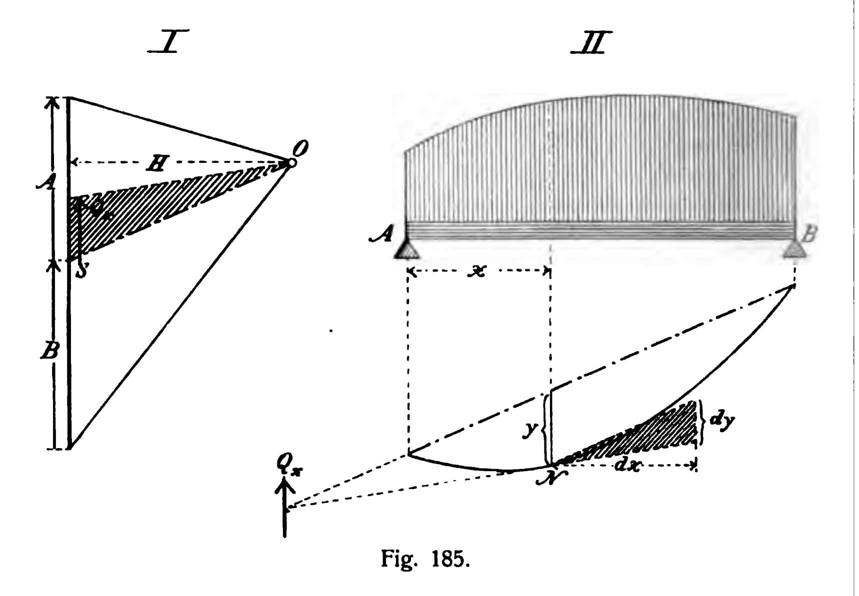


Fig. 185.

einem Schnitte in dem Abstande x von der Stütze A sei Q_x die Scherkraft und M_x das Biegungsmoment. In dem Punkte N, in welchem der Schnitt die Seilcurve trifft, werde ein Differentialdreieck der Seilcurve gezeichnet. Dieses Dreieck ist dann ähnlich einem Dreiecke im Kräftepolygone, welches die Scherkraft Q_x zur Grundlinie und den Pol O zur Spitze hat. Die beiden Dreiecke ergeben

$$\frac{Q_x}{H} = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$Q_x = H\frac{dy}{dx}.$$

Es ist

$$M_x = Hy,$$

also auch

$$\frac{dM_x}{dx} = H\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus folgt dann die erwähnte Beziehung

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}; \tag{165}$$

d. h. *die Scherkraft ist gleich der ersten Ableitung des Biegungsmomentes.*

Beispielsweise ergiebt sich für den gleichförmig belasteten Balken

$$Q_x = p\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}px(l - x),$$

somit

$$\frac{dM_x}{dx} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) = Q_x.$$

Aus dem Satze folgt ferner, dass das *Biegungsmoment ein Maximum oder ein Minimum in solchen Punkten ist, in welchen die Scherkraft verschwindet.* Für den gleichförmig belasteten Balken findet man nur in der Mitte $Q_x = 0$, und entsprechend

$$M_{\max} = M_{\frac{l}{2}} = \tfrac{1}{8}pl^2.$$

§ 58.

Anwendungen zu den §§ 50—57.

Analytischer Beweis des Momentensatzes.

1. Man beweist den Momentensatz auch analytisch in einfacher Weise für zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich schneiden (Fig. 186). Der Schnittpunkt beider Richtungslinien werde zum Coordinatenanfangspunkte, die Richtung der Kraft P zur x-Axe und die y-Axe senkrecht dazu gewählt. Die Coordinaten des Poles C seien x und y (in der Figur $x > 0, y < 0$), die Winkel der zweiten Kraft Q und der Resultirenden R mit der positiven x-Axe bez. γ und β. Die Abstände des Poles C von P, Q und R sind dann, mit dem Zeichen des betreffenden Momentes versehen, bez.

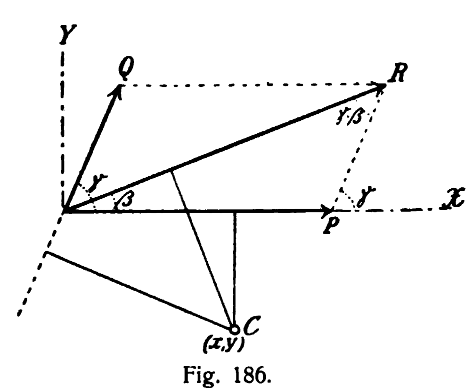


Fig. 186.

$$-y,\ x \sin\gamma - y\cos\gamma,\ x\sin\beta - y\cos\beta.$$

Für die Momente selbst findet man in derselben Reihenfolge

$$-Py,$$
$$Q(x\sin\gamma - y\cos\gamma),$$
$$R(x\sin\beta - y\cos\beta).$$

Es ist ferner

$$R\sin\beta = Q\sin\gamma;\ R\cos\beta = P + Q\cos\gamma;$$

folglich ergiebt sich

$$R(x\sin\beta - y\cos\beta) = Qx\sin\gamma - (P + Q\cos\gamma)y =$$
$$= -Py + Q(x\sin\gamma - y\cos\gamma),$$

w. z. b. w.

2. Längs einer Seite eines gleichseitigen Dreieckes wirkt eine Kraft P, längs einer anderen Seite eine Kraft $2P$. Beide liefern positive statische Momente in Bezug auf den Mittelpunkt des Dreieckes. Welche Kraft muss längs der dritten Dreiecksseite hinzugefügt werden, damit die Resultirende aller drei Kräfte durch den Mittelpunkt gehe? Man bestimme die Resultirende und die Verhältnisse, nach welchen sie die Dreiecksseiten teilt (Fig. 187).

Es sei P_A die unbekannte Kraft. Weil die Summe der Momente der Kräfte P, $2P$ und P_A in Bezug auf den Mittelpunkt des Dreieckes gleich Null sein muss, so ergiebt sich $P_A = 3P$ und von einem solchen Sinne, dass das Moment in Bezug auf den Mittelpunkt negativ ist. Die drei Kräfte liefern eine Resultirende mit den Componenten

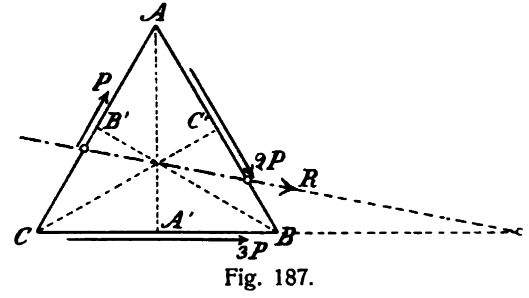


Fig. 187.

$$X = 4.5\,P \text{ nach der Richtung } CB$$

und

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,P \text{ nach der Richtung } AA'.$$

Wählt man den Schnittpunkt der Resultirenden mit je einer Dreiecksseite zum Pol, so findet man mit Hülfe des Momentensatzes, dass die Resultirende die Seite AB innerhalb in dem Verhältnis $3:1$, die Seite AC innerhalb in dem Verhältnis $3:2$ und die Seite CB ausserhalb in dem Verhältnis $2:1$ teilt.

3. Es soll zu einem System paralleler Kräfte ein Seilpolygon in solcher Weise construirt werden, dass drei Seiten durch gegebene Punkte gehen. (Fig. 188).

Seilpolygon durch drei Punkte.

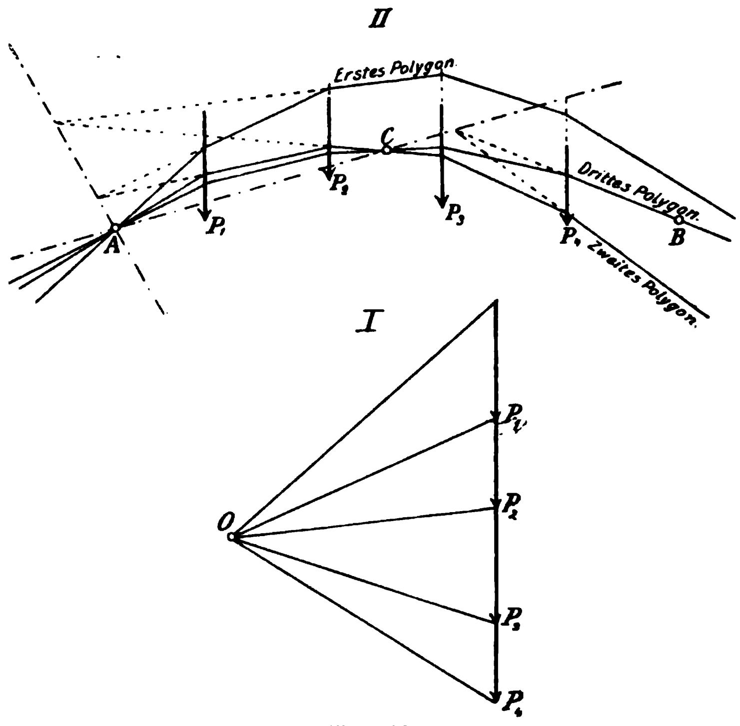


Fig. 188.

Es seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die gegebenen Kräfte. Die beiden äussersten Seiten des Seilpolygons sollen durch je einen der Punkte A und B gehen, während die zwischen P_2 und P_3 liegende Seite durch den Punkt C gehen soll. Bei der Construction wird der Satz von der Affinität zweier zu demselben Kräftesysteme gehörender Seilpolygone benützt (p. 275). Zuerst construirt man ein beliebiges Seilpolygon, dessen erste Seite durch A geht, dann mit Hülfe einer durch A geführten Affinitätsaxe ein zweites Seilpolygon durch A und C und zuletzt mit AC als Affinitätsaxe ein Seilpolygon, dessen drei Seiten durch je einen der Punkte A, C und B gehen.

Überhängender Balken.

4. Man bestimme die Auflagerreactionen, die Scherkräfte und die Biegungsmomente an einem überhängen-

den Balken, welcher eine Belastung zwischen den Stützen und eine Belastung ausserhalb der Stützen trägt. (Fig. 189).

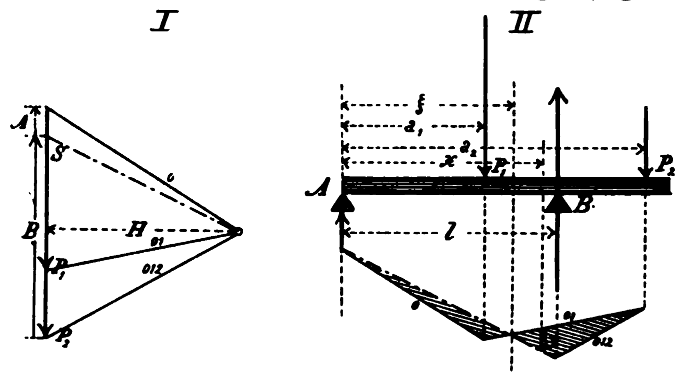


Fig. 189.

Mit Hülfe des Momentensatzes findet man die Auflagerreactionen:

$$A = P_1 \frac{l - a_1}{l} - P_2 \frac{a_2 - l}{l},$$

$$B = P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l}.$$

Die Reaction A hat in der Figur die Richtung nach oben; wäre sie nach unten gerichtet, so müsste die Stütze A auf der oberen Seite des Balkens liegen.

Zwischen A und P_1 ist A selbst die Scherkraft; zwischen P_1 und B ist die Scherkraft gleich der Resultirenden $A - P_1$ zu A und P_1; zwischen B und P_2 ist sie die im entgegengesetzten Sinne genommene Belastung P_2. Die Fig. 190 veranschaulicht die Grösse der Scherkraft in jedem Schnitte. Für den Abstand ξ des Punktes A von der Scherkraft $A - P_1$ erhält man die Gleichung

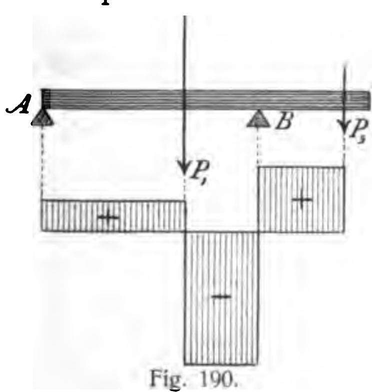


Fig. 190.

$$A\xi = P_1 (\xi - a_1),$$

welche mit Anwendung des Wertes von A

$$\xi = \frac{P_1 a_1 l}{P_1 a_1 + P_2 (a_2 - l)}.$$

liefert.

Die Culmann'sche Momentenfläche ist ein überschlagenes Vierseit. Das Biegungsmoment für einen Schnitt zwischen A und P_1, in dem Abstande x von A, ist positiv und gleich Ax, wird am grössten bei P_1 und zwar gleich Aa_1. Zwischen P_1 und B ist das Biegungsmoment $Ax - P_1 (x - a_1)$; es nimmt mit wachsendem x ab, wird gleich Null für $x = \xi$ und nachher negativ, und numerisch am grössten bei B, wo der Wert $-P_2 (a_2 - l)$ beträgt; rechts von B ist das Biegungsmoment negativ und gleich $-P_2 (a_2 - x)$; es wird endlich Null in dem Schnitte durch P_2. Die Grösse Hy stellt graphisch ganz allgemein das Biegungsmoment dar; doch ist die auf p. 289 gegebene Definition von y nicht ganz ohne Modificationen verwendbar.

Gleichförmig belasteter Balken.

5. Gleichförmig belasteter Balken.

Am einfachsten construirt man die Parabel, welche die Seilcurve des gleichförmig belasteten Balkens ist (p. 291), mit Hülfe ihrer Tangenten (Fig. 191). Der verticale Abstand zwischen dem Scheitel C der Parabel und der Schlusslinie beträgt

$$f = \tfrac{1}{8} \frac{pl^2}{H}.$$

Die in den äussersten Punkten A'

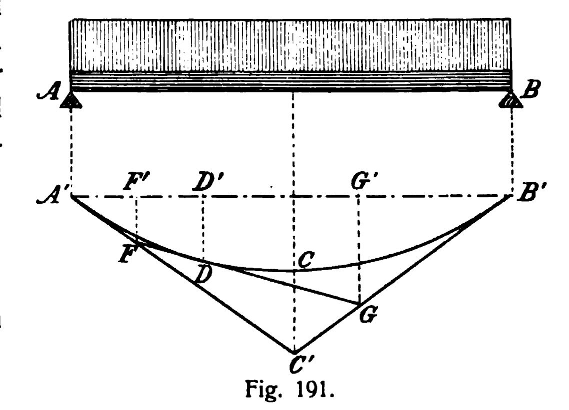


Fig. 191.

und B' gezogenen Tangenten schneiden sich in einem Punkte C', welcher gemäss einem bekannten geometrischen Satze im Abstande f unterhalb des Scheitels C liegt. Man erhält eine beliebige Tangente in der Weise, dass man die Hälfte $F'G'$ von $A'B'$ abschneidet und die lotrecht unterhalb F' und G' liegenden Punkte der äussersten Tangenten durch eine Gerade verbindet. Der Berührungspunkt ist derjenige Punkt D auf FG, für dessen Projection D' die Gleichheiten

$$A'F' = F'D' \text{ und } D'G' = G'B'$$

bestehen. Der Beweis beruht auf dem bekannten Satze, dass die Projectionen der beiden Schenkel eines Tangentenwinkels auf eine Senkrechte zur Axe gleich lang sind.

§ 59.

Theorie der Kräftepaare mit parallelen Axen.

Kräftepaar.

Unter einem Kräftepaare wird, wie schon auf p. 256 erwähnt, *ein System von zwei gleich grossen, im entgegengesetzten Sinne gerichteten Kräften auf parallelen, nicht zusammenfallenden Richtungslinien verstanden.* Die Kräftepaare wurden von Poinsot in die Mechanik eingeführt und müssen in derselben Weise wie einzelne Kräfte als für sich bestehende Kraftelemente betrachtet werden.

Bei einem Kräftepaar kommen in Betracht:

1) seine Ebene, d. h. die Ebene der beiden parallelen Kräfte,

2) die gemeinsame Grösse der beiden Kräfte,

3) der Arm oder Hebelarm des Kräftepaares, d. h. der senkrechte Abstand beider Kräfte von einander (auch Breite genannt),

4) der Drehungssinn, welcher nach Übereinkunft positiv oder negativ gerechnet wird (in der Figur 192 links positiv, rechts negativ).

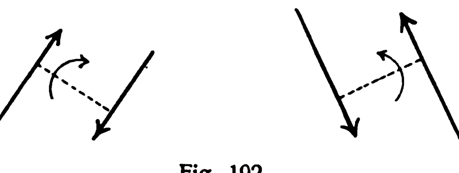


Fig. 192.

Der Arm des Kräftepaares wird oft zweckmässigerweise so gewählt, dass die beiden Kräfte in seinen Endpunkten angreifen. Wie auf p. 256 gefunden wurde, besitzt ein Kräftepaar keine Resultirende. Zu demselben Resultate kommt man bei dem Versuche, die beiden Kräfte graphisch mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons zusammenzusetzen (Fig. 193). Die beiden äussersten Pol-

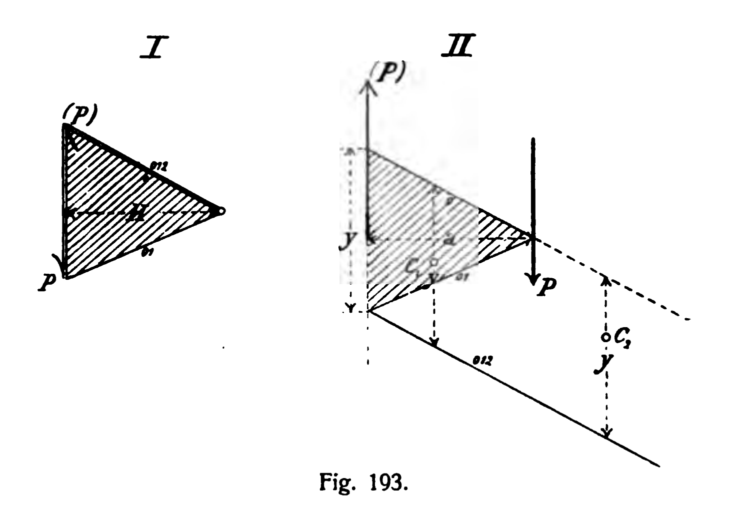


Fig. 193.

strahlen fallen zusammen, und die beiden äussersten Seilpolygonseiten sind einander parallel.

Die Summe der statischen Momente der beiden Kräfte eines Kräftepaares in Bezug auf einen Pol in ihrer Ebene ist unabhängig von der Lage des Poles. Aus der Figur 194 folgt nämlich für die Momentensumme M in Bezug auf einen Pol C

$$M = Pc - Pb = P(c - b) = Pa,$$

und für die Momentensumme M' in Bezug auf den zwischen den Kräften liegenden Pol C',

$$M' = Pc' + Pb' = P(c' + b') = Pa,$$

also $M' = M$. Aus den beiden schraffirten ähnlichen Dreiecken der Figur 193 ergiebt sich

$$M = Hy = Pa. \tag{166}$$

Da y constant ist, muss auch M constant sein. Die unveränderliche Summe der Momente beider Kräfte heisst Moment des Kräftepaares. *Das Moment eines Kräftepaares ist folglich gleich dem Producte aus der Kraft und dem Arm.* Es wird je nach dem Drehungssinne positiv oder negativ gerechnet. Seinem Zahlwerte nach ist das Moment gleich dem Flächeninhalte eines Parallelogramms, in welchem die beiden Kräfte zwei Gegenseiten bilden.

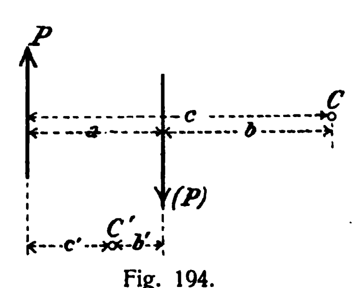


Fig. 194.

Operationen mit Kräftepaaren.

Verschiebung in der Ebene.

1) *Ein Kräftepaar kann in beliebiger Weise in seiner Ebene verschoben werden, vorausgesetzt dass die Angriffspunkte aller einzelnen Kräfte unverrückbar mit einander verbunden sind.*

Beim Beweise betrachtet man zwei Lagen desselben Kräftepaares (Fig. 195), die eine P, Q, wobei also $P = Q$, die andere P', Q', wobei $P' = Q' = P$. Man fügt zu den Kräften P und Q die Kräfte P', Q' und die mit ihnen gleich grossen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte (P'), (Q') hinzu. Das System der sechs Kräfte P, Q, P', Q', (P') und (Q') ist äquivalent dem ursprünglichen Kräftepaare. Die vier Richtungslinien bilden einen Rhombus

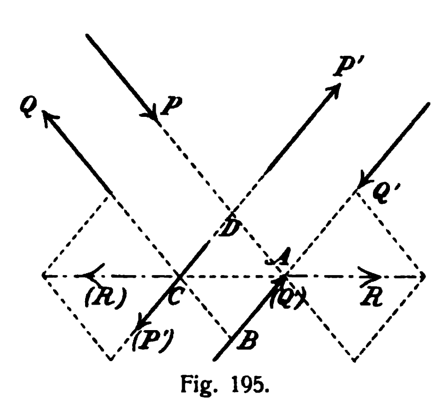


Fig. 195.

ABCD, wenn sie nicht alle parallel sind. Man kann die beiden gleich grossen Kräfte *P* und (*Q'*) zu einer Resultirenden *R* zusammensetzen, welche auf der Diagonale *CA* des Rhombus liegt. Die beiden Kräfte *Q* und (*P'*) liefern in derselben Weise die mit *R* gleich grosse und entgegengesetzte Kraft (*R*), welche also *R* aufhebt. Das System der sechs Kräfte ist folglich äquivalent dem allein übrig bleibenden Kräftepaare *P'*, *Q'*, somit ist auch das ursprüngliche Kräftepaar *P*, *Q* dem Paare *P'*, *Q'* äquivalent.

Wenn alle vier Richtungslinien einander parallel sind, so wird der Satz entweder mit Hülfe des soeben gefundenen bewiesen und zwar so, dass man beide Kräftepaare mit einem dritten Kräftepaare vergleicht; oder direct in analoger Weise wie oben, mit Anwendung des Satzes von der Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte (Fig. 196).

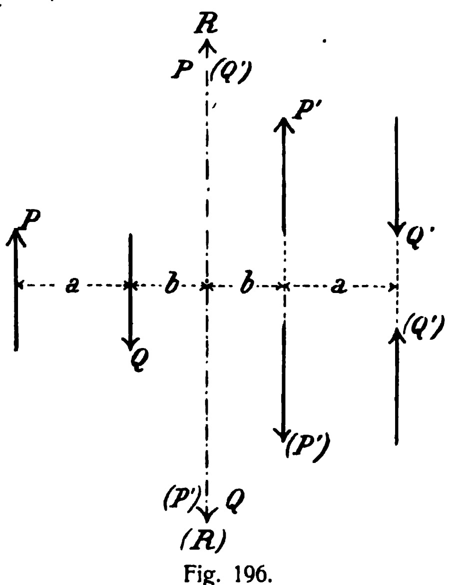


Fig. 196.

Verschiebung nach einer Parallelebene.

2) *Ein Kräftepaar kann nach einer seiner Ebene paral-*

lelen Ebene verschoben werden.

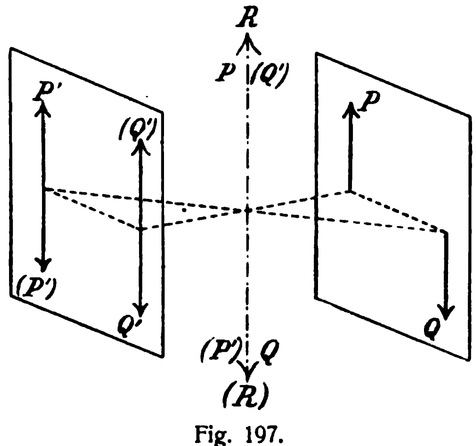


Fig. 197.

Der Beweis wird in derselben Weise wie im Falle 1) geführt. Es werden die Kräftepaare P', Q' und (P'), (Q') in der Parallelebene zu der gegebenen hinzugefügt und mit dem gegebenen Kräftepaare P, Q so zusammengesetzt, dass nur das Kräftepaar P', Q' übrig bleibt.

3) *Ein Kräftepaar kann durch ein anderes Kräftepaar in derselben Ebene ersetzt werden, welches dasselbe Moment und denselben Drehungssinn wie das erstere hat.*

Kräftepaare mit demselben Moment.

Es seien M und N $(M = N)$ die Kräfte des gegebenen Paares, a sein Arm (Fig. 198). Ferner seien P und Q $(P = Q)$ die Kräfte, b der Arm eines zweiten Kräftepaares. Dieses werde nach dem Satze 1) so verschoben, dass die Arme beider Paare in dieselbe Gerade fallen, und die Kräfte P und N auf derselben Geraden liegen; es sei $Ma = Pb$ und der Drehungssinn beider Kräftepaare derselbe. Zu den Kräften P und Q werden zwei ihnen gleiche und entgegengesetzte Kräfte (P) und (Q) hinzugefügt. Die Kräfte N und (P) liegen auf einer Geraden und haben dieselbe Richtung; ihre Resultirende ist also $R = N + P$. Die Kräfte M und (Q) liefern

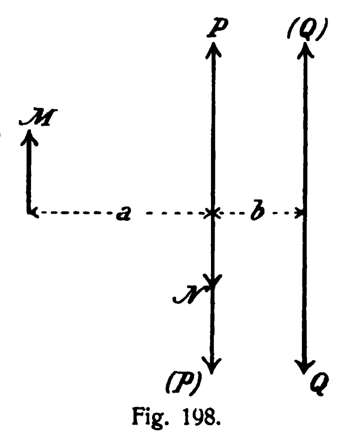


Fig. 198.

eine mit R gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Resultirende (R), deren Richtungslinie infolge der Relation $Ma = Pb$, oder

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{M} = \frac{Q}{M}$$

mit derjenigen von $\{R\}$ zusammenfällt. Weil R und (R) sich aufheben, so erkennt man, dass die beiden Kräftepaare Ma und Pb einander äquivalent sind.

Operationen mit Kräftepaaren.

Als Folgerung aus den Sätzen 1), 2) und 3) erhält man jetzt allgemeiner:

4) *Ein gegebenes Kräftepaar ist jedem anderen Kräftepaare äquivalent, welches in derselben oder in einer zu seiner Ebene parallelen Ebene liegt, dasselbe Moment und denselben Drehungssinn besitzt. Die Angriffspunkte aller einzelnen Kräfte müssen unverrückbar mit einander verbunden sein.*

Axe des Kräftepaares.

Auf Grund des Satzes 4) kann ein Kräftepaar durch seine Axe veranschaulicht werden. Darunter versteht man eine Strecke, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaares abgetragen wird und deren Länge gleich dem Momente des Kräftepaares ist; man erteilt der Axe auch einen bestimmten Sinn, so dass der Drehungssinn des Kräftepaares dadurch definirt wird. Man kann z. B. die Übereinkunft treffen, dass einer Person, deren Längsaxe von den Füssen nach dem Kopfe mit der Axe des Kräftepaares zusammenfällt, der Drehungssinn des Paares als übereinstimmend mit dem Drehungssinn des Uhrzeigers erscheint. (Fig. 199). Durch die Axe sind alle einander äquivalente Kräftepaare auf ein Mal bestimmt. Eine Axe kann in beliebiger Weise translatorisch im Raume verschoben werden.

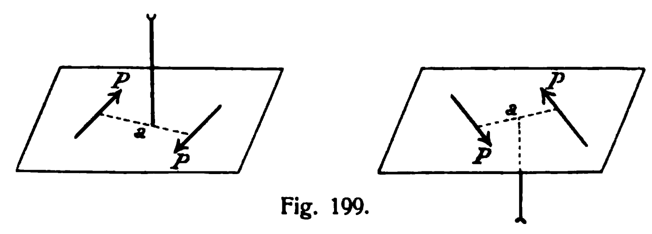


Fig. 199.

§ 60.

Zusammensetzung von Kräften und Kräftepaaren.

Zusammensetzung einer Kraft mit einem Kräftepaare.

Um eine Kraft Q graphisch mit einem Kräftepaare P, (P) (Fig. 200) zusammenzusetzen, construirt man ein Kräfte-

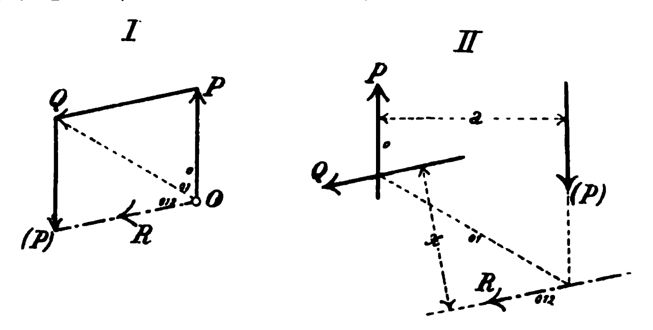


Fig. 200.

und ein Seilpolygon z. B. so, dass man die Kräfte in der Reihenfolge P, Q, (P) nimmt und den Anfangspunkt der Kraft P als Pol wählt. Das Kräftepolygon ist ein Parallelogramm und die Resultirende R der Kraft Q und des Kräftepaares gleich und parallel Q. Man erhält den Abstand x zwischen Q und R z. B. so, dass man den Momentensatz für den Schnittpunkt von P und Q als Pol benützt. Wenn a der Arm des Kräftepaares ist, so ergiebt sich

$$Pa = Rx = Qx$$

und

$$x = \frac{P}{Q} a.$$

Es müssen Q und (R) ein Kräftepaar bilden, dessen Moment gleich und entgegengesetzt dem Momente des Kräftepaares P, (P) ist.

Zusammensetzung von Kräftepaaren mit parallelen Axen.

Kräftepaare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen setzen sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare ist.

Es seien diese Momente

$$P_1\, a_1, P_2\, a_2, \ldots\ldots P_n\, a_n;$$

ein Arm a werde positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen des Momentes gerechnet. Alle Kräftepaare werden auf denselben Arm b reducirt; man erhält dann die neuen Kräfte

$$Q_1 = \frac{a_1}{b} P_1;\ Q_2 = \frac{a_2}{b} P_2, \ldots\ Q_n = \frac{a_n}{b} P_n,$$

wobei die Kräfte Q mit einem bestimmten Vorzeichen versehen sind. Alle Kräfte Q liefern zusammen ein einziges Kräftepaar mit dem Arme b und der Kraft

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = \Sigma Q.$$

Das Moment dieses Kräftepaares ist $b\Sigma Q = \Sigma(Pa)$, w. z. b. w.

Die Zusammensetzung kann also auch so geschehen, dass man alle n Axen der Kräftepaare von einem Punkte aus abträgt, sie algebraisch addirt und die entstehende gerichtete Strecke als Axe eines neuen Kräftepaares betrachtet, welches das resultirende Kräftepaar ist.

Die Kräftepaare halten sich das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente gleich Null ist, d. h.

$$\Sigma(Pa) = 0.$$

§ 61.

Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene.

Gleichgewicht von Kräften in derselben Ebene.

Gemäss § 54 sind die graphischen Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Kräften in einer Ebene, dass sowohl das Kräftepolygon als auch das Seilpolygon

geschlossen sein muss. Es sollen jetzt die analytischen Bedingungen des Gleichgewichtes abgeleitet werden.

Es seien $P_1, P_2 \ldots P_n$ die in einer Ebene liegenden Kräfte. Die Grösse und Richtung der Resultirenden R dieser Kräfte ergiebt sich aus den Gleichungen (p. 258)

$$R \cos \varphi = \Sigma(P \cos a),$$
$$R \sin \varphi = \Sigma(P \sin a),$$

welche

$$R = \sqrt{\{\Sigma(P \cos a)\}^2 + \{\Sigma(P \sin a)\}^2}$$

liefern. Damit Gleichgewicht bestehe, ist es notwendig, dass R gleich Null sei. Man erhält somit die beiden Bedingungen

$$\Sigma(P \cos a) = 0,$$
$$\Sigma(P \sin a) = 0.$$

Diese Bedingungen sind aber nicht ausreichend, denn sie werden auch erfüllt, wenn das Kräftesystem auf ein Kräftepaar reducirt werden kann. Damit dieser Fall ausgeschlossen werde, ist noch eine dritte Bedingung erforderlich, welche man in folgender Weise ableitet. Die n Kräfte werden derart in zwei Gruppen von p und q Kräften geteilt, dass die Kräfte innerhalb jeder Gruppe eine Resultirende besitzen. Zur Bestimmung dieser Partialresultirenden erhält man die Gleichungen

$$R_p \cos \varphi_p = \Sigma_p(P \cos a), \quad R_q \cos \varphi_q = \Sigma_q(P \cos a),$$
$$R_p \sin \varphi_p = \Sigma_p(P \sin a), \quad R_q \sin \varphi_q = \Sigma_q(P \sin a),$$

wo die Indices p und q andeuten sollen, dass die Summe besonders für jede Gruppe genommen werden muss. Weil

$$\Sigma_p(P \cos a) + \Sigma_q(P \cos a) = \Sigma_n(P \cos a) = 0$$

ist, so ergiebt sich

$$R_p \cos \varphi_p + R_q \cos \varphi_q = 0,$$

und ebenso

$$R_p \sin \varphi_p + R_q \sin \varphi_q = 0.$$

Hieraus leitet man

$$R_p = R_q = R$$

und

$$\varphi_p = \varphi_q \pm 180^\circ$$

ab. Die beiden Kräfte R_p und R_q sind also gleich gross, parallel und entgegengesetzt gerichtet. Damit Gleichgewicht bestehe, dürfen sie kein Kräftepaar bilden, sondern sie müssen auf derselben Richtungslinie liegen. Man drückt dies so aus, dass man die Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf einen beliebigen Pol in der Ebene gleich Null setzt. Nennt man die mit dem Zeichen des Momentes gerechneten Abstände des Pols von R_p und R_q bez. r_p und r_q, so findet man

$$Rr_p + Rr_q = 0.$$

Nach dem Momentensatze ist ferner

$$Rr_p = \sum_p (Pa),$$
$$Rr_q = \sum_q (Pa);$$

somit ergiebt sich

$$\sum_p (Pa) + \sum_q (Pa) = 0$$

oder

$$\sum_n (Pa) = 0,$$

wo a der Abstand des Pols von der Kraft P einschliesslich des Vorzeichens ist.

Gleichgewichtsbedingungen.

Die drei notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen liefern den Satz:

Zum Gleichgewichte von Kräften in einer Ebene ist erforderlich, dass die Summe ihrer Projectionen auf zwei

zu einander senkrechte Axen der Ebene gleich Null sei und dass die Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf einen beliebigen Pol in der Ebene verschwinde.

Die Gleichungen 1) und 2) des Systems

$$(167) \qquad \begin{aligned} &1)\ \ \Sigma(P\cos\alpha) = 0,\\ &2)\ \ \Sigma(P\sin\alpha) = 0,\\ &3)\ \ \Sigma(Pa) = 0 \end{aligned}$$

heissen die Projectionsgleichungen, die Gleichung 3) Momentengleichung.

Die beiden Projectionsaxen brauchen nicht auf einander senkrecht zu stehen, dürfen aber nicht zu einander parallel sein.

Eine Projectionsgleichung, zwei Momentengleichungen.

In besonderen Fällen können die drei Gleichgewichtsbedingungen (167) mit Vorteil durch drei andere ersetzt werden. So kann man z. B. eine Projectionsgleichung und zwei Momentengleichungen benützen, welche sich auf verschiedene Pole beziehen, d. h. ein System

$$(168) \qquad \begin{aligned} &\Sigma(P\cos\alpha) = 0,\\ &\Sigma(Pa) = 0,\\ &\Sigma(Pb) = 0. \end{aligned}$$

Doch darf die Verbindungslinie der beiden Pole nicht zu der Projectionsaxe senkrecht sein, weil das Kräftesystem sich in diesem Falle auf eine in der Verbindungslinie liegende Resultirende reduciren könnte, und somit die Bedingungen (168) erfüllt wären, ohne dass Gleichgewicht bestände.

Drei Momentengleichungen.

Schliesslich kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch drei Momentengleichungen

$$(169) \qquad \Sigma(Pa) = 0,\ \ \Sigma(Pb) = 0,\ \ \Sigma(Pc) = 0$$

darstellen, welche sich auf Pole beziehen, die nicht in einer geraden Linie liegen dürfen.

Anwendungen.

1) Die in demselben Umfahrungssinne genommenen Seiten eines regulären n-Ecks stellen Kräfte in einer Ebene dar. Wie kann man durch Hinzufügung von Kräften das Gleichgewicht herstellen *a*) wenn alle Seiten Kräfte darstellen und *b*) wenn alle Seiten mit Ausnahme einer einzigen Kräfte sind?

a) In diesem Falle bilden die Kräfte ein geschlossenes Kräftepolygon, das reguläre n-Seit. Weil ferner die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Pol, z. B. den Mittelpunkt des n-Ecks von Null verschieden ist, so ist das System einem Kräftepaare äquivalent. Das Moment dieses Kräftepaares wird durch den doppelten Flächeninhalt des n-Ecks dargestellt. Man erreicht Gleichgewicht durch Hinzufügung eines Kräftepaares mit einem ebenso grossen Moment von entgegengesetztem Vorzeichen.

b) Das Kräftepolygon ist offen und das Kräftesystem besitzt eine Resultirende, welche durch die letzte Seite des n-Ecks der Grösse und Richtung nach dargestellt wird, und zwar ist die Richtung derselben entgegengesetzt derjenigen, die sich aus der allgemeinen Umlaufsrichtung ergiebt. Die Lage der Resultirenden erhält man mit Hülfe des Momentensatzes, wobei man am besten den Mittelpunkt des n-Ecks zum Pol wählt. Man findet, dass der Abstand der Resultirenden von diesem Mittelpunkte $n-1$ Mal so gross als der kleinere Radius des n-Ecks ist; der Sinn ist durch das Zeichen der Momentensumme aller Kräfte bestimmt. Man stellt Gleichgewicht dadurch her, dass man die gleiche und entgegengesetzte Kraft zu der Resultirenden in ihrer Richtungslinie hinzufügt.

2) Ein System von Kräften in einer Ebene befinde sich im Gleichgewichte. Alle Kräfte werden im gleichen Sinne um ihre Angriffspunkte gedreht. Man zeige, dass das neue Kräftesystem einem Kräftepaare äquivalent ist, welches zugleich näher bestimmt werden soll.

Es seien $P_1, P_2 \ldots P_n$ die Kräfte, P eine beliebige unter ihnen, α ihr Winkel mit der positiven x-Axe und x, y die Coordinaten ihres Angriffspunktes in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 201). Nach den Gleichgewichtsbedingungen (167) ist:

$$\Sigma(P \cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma(P \sin\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y \cos\alpha - x \sin\alpha) = 0.$$

Nach einer Drehung um den Winkel φ im positiven Sinne erhält man die Projectionssummen

$$\Sigma P \cos(\alpha + \varphi) = \cos\varphi\, \Sigma(P \cos\alpha) - \sin\varphi\, \Sigma(P \sin\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P \sin(\alpha + \varphi) = \cos\varphi\, \Sigma(P \sin\alpha) + \sin\varphi\, \Sigma(P \cos\alpha) = 0.$$

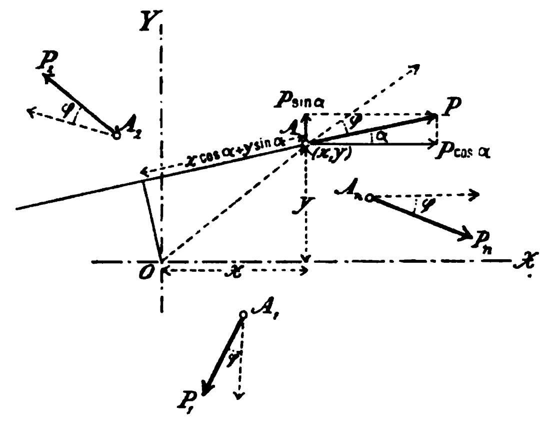


Fig. 201.

Es geht hieraus hervor, dass die Kräfte entweder fortwährend im Gleichgewichte sind oder ein Kräftepaar bilden. Um zu erkennen, welcher der beiden Fälle eintritt, berechnet man die Summe M der statischen Momente z. B. in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt. Man findet

$$M = \Sigma P \left\{ y \cos(\alpha + \varphi) - x \sin(\alpha + \varphi) \right\} = \cos\varphi \, \Sigma P (y \cos\alpha - x \sin\alpha)$$
$$- \sin\varphi \, \Sigma P (y \sin\alpha + x \cos\alpha) = - \sin\varphi \, \Sigma P (x \cos\alpha + y \sin\alpha).$$

Diese Summe ist im allgemeinen nicht gleich Null; das Kräftesystem ist somit nach der Drehung äquivalent einem Kräftepaar, dessen Moment proportional dem Sinus des Drehungswinkels ist. Man erhält die Grösse $\Sigma P(x \cos\alpha + y \sin\alpha)$ dadurch, dass man die Summe der Producte der Kräfte und der Projectionen der Radiivectoren ihrer Angriffspunkte auf die Richtungslinien der Kräfte bildet.

§ 62.

Kräfte im Raume.

Bei der folgenden Behandlung von Kräften im Raume, deren Angriffspunkte einem starren Körper angehören, werden ausschliesslich analytische Methoden benützt.

A. Kräftepaare im Raume.

Zusammensetzung von Kräftepaaren. *Zwei Kräftepaare in Ebenen, welche sich schneiden, können durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden.* Nach den Regeln in § 59 werden die beiden Kräftepaare zuerst auf einen gemeinsamen Arm a transformirt, den man auf der Schnittlinie der beiden Ebenen wählt (Fig. 202). Es

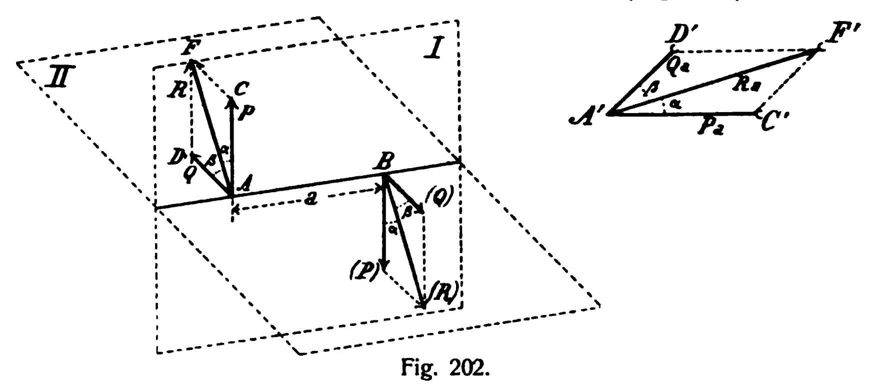


Fig. 202.

seien P und Q die auf diesen Arm reducirten Kräfte der beiden Paare. Die im Punkte A angreifenden Kräfte P und Q werden zu einer auf a senkrechten Resultirenden R zusammengesetzt, welche mit P und Q bez. die Winkel α und β bildet; ebenso liefern die Kräfte (P) und (Q) im Punkte B eine Resultirende (R). R und (R) bilden zusammen ein Kräftepaar mit dem Momente Ra, welches dem System der beiden gegebenen Kräftepaare äquivalent ist, w. z. b. w.

Am einfachsten werden die beiden Kräftepaare mit Hülfe ihrer Axen zusammengesetzt. Diese Axen Pa und Qa, welche senkrecht zu den Ebenen I und II sind, werden von einem Punkte A' aus abgetragen. Sie bestimmen eine zu dem Arme a senkrechte Ebene. Die Diagonale $A'F'$ eines Parallelogramms mit den Seiten Pa und Qa ist die Axe des resultirenden Kräftepaares. Aus den ähnlichen Parallelogrammen $ACFD$ und $A'C'F'D'$ ergiebt

sich nämlich, dass die Diagonale $A'F'$ gleich Ra ist und mit $A'C'$ den Winkel α einschliesst, somit senkrecht auf der Ebene des Kräftepaares R, (R) steht. Auch den Drehungssinn giebt sie richtig an. Man erhält also den Satz:

Die Axe des resultirenden Kräftepaares wird dadurch erhalten, dass man die Axen der gegebenen Kräftepaare in gleicher Weise wie einzelne Kräfte mit demselben Angriffspunkte zusammensetzt.

Die Regel kann unmittelbar für eine beliebige Anzahl von Kräftepaaren erweitert werden. Es ergiebt sich auf diese Weise eine Parallelepiped-, Polygonregel u. s. w. für die Axen der Kräftepaare.

Bei der analytischen Zusammensetzung der Kräftepaare wird jede Axe in ihre Componenten nach drei zu einander senkrechten Coordinatenaxen im Raume zerlegt. Diese Operation ist gleichbedeutend mit der Ersetzung des gegebenen Kräftepaares durch drei Kräftepaare, welche in je einer der drei Coordinatenebenen liegen und die Componenten des gegebenen Kräftepaares heissen. Die auf dieselbe Coordinatenaxe fallenden Axen der Componenten der Kräftepaare werden addirt und die drei so erhaltenen Axen zu einer einzigen zusammengesetzt, welche das resultirende Kräftepaar darstellt.

Componenten eines Kräftepaares.

Es seien M das Moment eines Kräftepaares, λ, μ und ν die Richtungswinkel der Axe (Fig. 203). Für die Componenten M_x, M_y und M_z des Kräftepaares, d. h. für die Momente der drei Kräftepaare, in welche das gegebene zerlegt wird, ergeben sich dann die Ausdrücke

Fig. 203.

$$
(170)\qquad
\begin{aligned}
M_x &= M \cos \lambda, \\
M_y &= M \cos \mu, \\
M_z &= M \cos \nu.
\end{aligned}
$$

Man rechnet M immer positiv, M_x, M_y und M_z je nach der Drehungsrichtung positiv oder negativ. Die positive Drehungsrichtung in der xy-Ebene ist diejenige, welche die positive x-Axe in die positive y-Axe durch eine Drehung von 90° überführt, in der yz-Ebene diejenige, welche die y-Axe in die z-Axe und in der zx-Ebene diejenige, welche die z-Axe in die x-Axe überführt. Im folgenden sollen nur solche räumliche Coordinatensysteme benützt werden, bei welchen eine positive Drehung in der yz-Ebene für einen auf der positiven x-Axe befindlichen Beobachter von links nach rechts vor sich geht (Fig. 204).

Ein Kräftepaar werde gebildet von einer Kraft P, mit den Componenten X, Y, Z parallel dreien auf einander senkrechten Coordinatenaxen und einem Angriffspunkte mit den Coordinaten x, y, z, und der gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten, im Coordinatenanfangspunkte angreifenden Kraft (P) (Fig. 204). Man verlangt die expliciten Ausdrücke der Componenten dieses Kräftepaares.

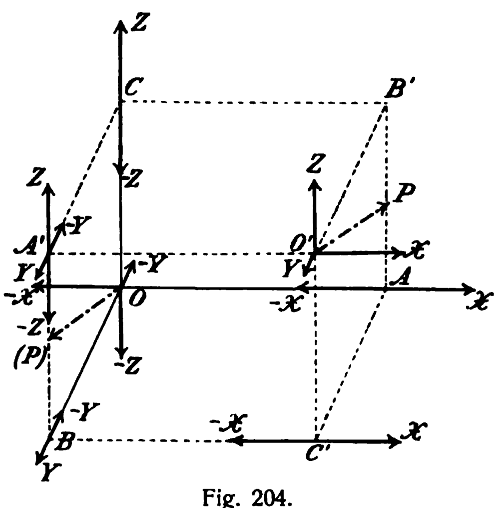


Fig. 204.

Ausser den Kräften X, Y und Z im Punkte O', durch welche die Kraft P ersetzt wurde und den Kräften $-X$, $-Y$ und $-Z$ im Coordinatenanfangspunkte, welche die Kraft (P) ersetzen, mögen zwölf Hülfskräfte angebracht werden, welche sich paarweise aufheben, und zwar die Kräfte X und $-X$ in den Punkten A und C', Y und $-Y$ in den Punk-

ten B und A' sowie Z und $-Z$ in den Punkten C und A'. Der Angriffspunkt einer Kraft soll der Kürze wegen durch einen der Kraft beigefügten Index angegeben werden. Von den 18 Kräften, von denen jede parallel einer Coordinatenaxe ist, heben sich $-X_O$ und X_A, $-Y_O$ und Y_B, $-Z_O$ und Z_C auf, und es bleiben zwölf Kräfte, welche zusammen sechs Kräftepaare bilden, deren Ebenen mit einer Coordinatenebene zusammenfallen oder einer solchen parallel sind. Beispielsweise liegen die Paare $Z_{A'}$, $-Z_C$ und $Y_{A'}$, $-Y_B$ in der yz-Ebene und liefern die Momentensumme

Ebenso folgt (171)
$$M_x = yZ - zY,$$
$$M_y = zX - xZ,$$
$$M_z = xY - yX.$$

Dieselben Ausdrücke leitet man auch in folgender Weise ab. Das Moment des von P und (P) gebildeten Kräftepaares ist gleich dem statischen Momente der Kraft P in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt und wird geometrisch durch den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes mit P als Grundlinie und O als Spitze dargestellt (Fig. 205). Es sei F dieser doppelte Flächeninhalt, F_x seine

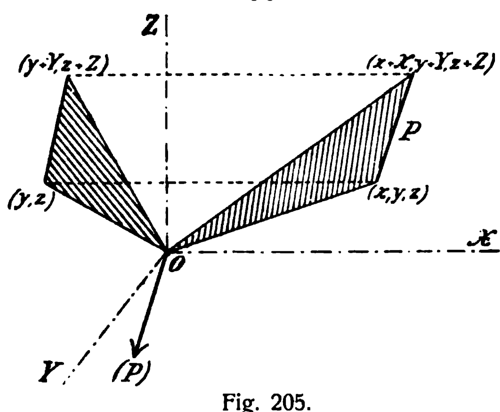


Fig. 205.

Projection auf die yz-Ebene, λ der Winkel zwischen der Ebene des Dreieckes und der yz-Ebene. Man erhält dann

$$F_x = F \cos\lambda;$$

weil $F = M$ und $M_x = M \cos\lambda$ ist, so ergiebt sich

$$M_x = F_x,$$

d. h. die Componente M_x des Kräftepaares ist numerisch gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreieckes in der yz-Ebene, dessen Spitzen die Punkte (0,0), (y, z) und $(y+Y, z+Z)$ sind. Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist die doppelte Fläche des Dreieckes

$$F_x = y(z+Z) - z(y+Y) = yZ - zY.$$

Man findet somit

$$M_x = yZ - zY,$$

und leitet in ähnlicher Weise die vorhin angegebenen Ausdrücke für M_y und M_z ab.

B. **Reduction eines räumlichen Kräftesystems.**

Reduction von Kräften im Raume. Reductionspunkt.

Bei der Zusammensetzung der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$, deren Angriffspunkte $A_1, A_2 \ldots A_n$ einem starren Körper angehören (Fig. 206), wählt man einen Punkt O, den sog. Reductionspunkt, und bringt in ihm für jede gegebene Kraft P zwei ihr parallele, gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P' und (P') an. Man erhält auf diese Weise n Kräfte $P_1', P_2' \ldots P_n'$ mit dem gemeinsamen Angriffspunkte O und n Kräftepaare im Raume, welche von P_1 und (P_1'), P_2 und (P_2'), ... P_n und (P_n') gebildet werden. Die Kräfte P' werden zu einer Resultirenden R mit O als Angriffspunkt und die n Kräftepaare zu einem einzigen

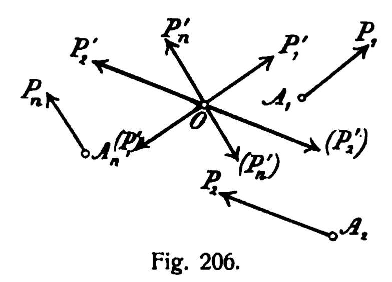


Fig. 206.

Kräftepaare zusammengesetzt. Damit ist bewiesen, dass jedes räumliche Kräftesystem an einem starren Körper zu einer Resultirenden und einem resultirenden Kräftepaare zusammengesetzt werden kann. Die Operation heisst die Reduction des Kräftesystemes für den Punkt O.

Der Reductionspunkt O kann beliebig gewählt werden. Das gegebene Kräftesystem kann folglich auf unendlich viele Arten auf eine Resultirende und ein resultirendes Kräftepaar reducirt werden. Wählt man anstatt O einen anderen Reductionspunkt O', so behält die Resultirende ihre Grösse und Richtung unverändert bei und ändert nur ihre Lage, während sich das durch seine Axe dargestellte resultirende Kräftepaar im allgemeinen sowohl in Bezug auf die Grösse als in Bezug auf die Richtung ändert.

Die Resultirende.

Benützt man ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem mit dem Reductionspunkte O als Anfangspunkt, bezeichnet die Componenten einer Kraft P mit X, Y und Z, ihre Richtungswinkel mit α, β und γ und die Coordinaten ihres Angriffspunktes mit x, y und z, so erhält man als Componenten der Resultirenden R

$$(172)\qquad \begin{aligned} R_x &= \Sigma X = \Sigma(P\cos\alpha), \\ R_y &= \Sigma Y = \Sigma(P\cos\beta), \\ R_z &= \Sigma Z = \Sigma(P\cos\gamma), \end{aligned}$$

Das resultirende Kräftepaar.

und als Componenten des resultirenden Kräftepaares

$$(173)\qquad \begin{aligned} M_x &= \Sigma(yZ-zY) = \Sigma P\,(y\cos\gamma - z\cos\beta), \\ M_y &= \Sigma(zX-xZ) = \Sigma P\,(z\cos\alpha - x\cos\gamma), \\ M_z &= \Sigma(xY-yX) = \Sigma P\,(x\cos\beta - y\cos\alpha). \end{aligned}$$

Das resultirende Moment hat die Grösse

$$(174)\qquad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

und die Richtungscosinusse seiner Axe sind

$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M},$$

$$(175) \qquad \cos\mu = \frac{M_y}{M},$$

$$\cos\nu = \frac{M_z}{M}.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass nur M, nicht aber R sich mit der Lage des Reductionspunktes O ändert.

Reduction eines Kräftesystemes auf zwei sich kreuzende Kräfte.

Ein System von Kräften im Raume kann auch auf zwei Kräfte zurückgeführt werden, deren Richtungslinien sich im allgemeinen kreuzen. Es seien R die in der oben dargelegten Weise erhaltene Resultirende (Fig. 207), S und (S) die beiden Kräfte des resultirenden Kräftepaares, wobei die Kraft (S) so gewählt werde, dass ihr Angriffspunkt mit dem Angriffspunkte von R zusammenfalle. Man kann dann R und (S) zu einer Kraft Q zusammensetzen, deren Richtungslinie im allgemeinen die Richtungslinie von S kreuzt. Es sind Q und S dem gegebenen Kräftesystem äquivalent.

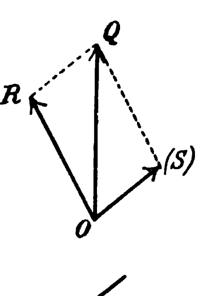


Fig. 207.

Die Reduction auf zwei sich kreuzende Kräfte kann auf unendlich viele Arten ausgeführt werden, und zwar, wie jetzt gezeigt werden soll, so, dass die eine Kraft durch einen gegebenen Punkt O geht und die andere Kraft in einer vorgeschriebenen Ebene E liegt (Fig. 208).

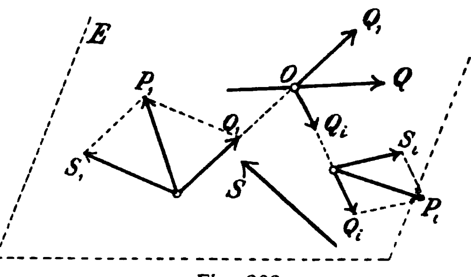


Fig. 208.

Es möge eine beliebige Kraft P_i längs ihrer Richtungslinie so verschoben werden, dass der Angriffspunkt in die Ebene E hineinfällt, und nachher in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine Q_i durch den Punkt O geht und die andere S_i in der Ebene E liegt. In derselben Weise werde mit den anderen Kräften verfahren. Alle Componenten Q_i liefern im allgemeinen eine Resultirende Q, welche durch den Punkt O geht, und alle in der Ebene E liegenden Kräfte S_i im allgemeinen eine Resultirende S in dieser Ebene. Die Möglichkeit der betrachteten Reduction ist somit nachgewiesen.

C. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte im Raume.

Gleichgewichtsbedingungen eines räumlichen Kräftesystems.

Damit ein System von Kräften im Raume im Gleichgewichte sei, muss sowohl die Resultirende R als auch das Moment M des resultirenden Kräftepaares gleich Null sein. Gemäss den Gleichungen (172) und (174) findet man also die sechs Bedingungen

$$(176)\quad \begin{aligned} &1) \quad R_x = \Sigma X = \Sigma(P\cos\alpha) = 0,\\ &2) \quad R_y = \Sigma Y = \Sigma(P\cos\beta) = 0,\\ &3) \quad R_z = \Sigma Z = \Sigma(P\cos\gamma) = 0.\\ &4) \quad M_x = \Sigma(yZ - zY) = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,\\ &5) \quad M_y = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,\\ &6) \quad M_z = \Sigma(xY - yX) = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Drei Projectionsgleichungen.

Die drei ersten Gleichungen drücken aus, dass *die Summe der Projectionen sämtlicher Kräfte auf jede von drei zu einander senkrechten Axen gleich Null sein muss.*

Moment einer Kraft in Bezug auf eine Gerade.

Um die drei letzteren Gleichungen zu deuten, wird ein neuer Begriff eingeführt, nämlich das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Gerade oder Axe.

Man versteht unter dem Momente einer Kraft in Bezug auf eine Gerade das Product aus der Projection der

Kraft auf eine zu der Geraden senkrechte Ebene und des kürzesten Abstandes zwischen der Geraden und der Richtungslinie der Kraft.

Es sei P eine Kraft mit den Componenten X, Y und Z und dem Angriffspunkte x, y, z (Fig 209). Die Pro-

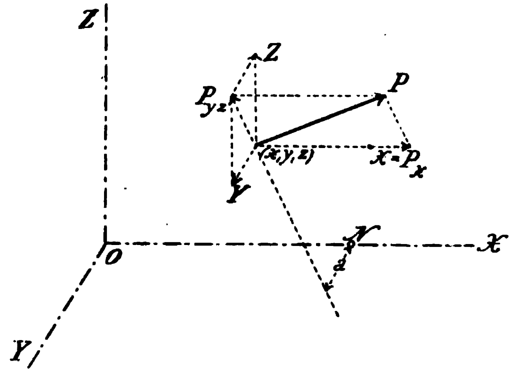


Fig. 209.

jection der Kraft auf eine zur x-Axe senkrechte Ebene werde mit P_{yz} bezeichnet. Bezeichnet man noch mit a den kürzesten Abstand zwischen der x-Axe und der Richtungslinie der Kraft, so ist das Moment der Kraft in Bezug auf die x-Axe gemäss der Definition gleich $P_{yz} . a$. Die Kraft P_{yz} hat die beiden Componenten Y und Z; $P_{yz} . a$ ist das statische Moment der Kraft P_{yz} in Bezug auf den Schnittpunkt N der x-Axe mit der zu ihr senkrechten Ebene. Mit Hülfe des Momentensatzes erhält man also für das Moment der Kraft in Bezug auf die x-Axe den Ausdruck

$$yZ—zY.$$

In derselben Weise wird das Moment in Bezug auf eine der anderen Coordinatenaxen berechnet.

Dem Momente einer Kraft in Bezug auf eine Axe wird je nach dem Drehungssinn ein bestimmtes Vorzeichen erteilt. Das Moment ändert sich nicht, wenn die

Kraft längs ihrer Richtungslinie verschoben wird. Es ist gleich Null, wenn die Kraft die Axe schneidet oder wenn sie ihr parallel ist.

Drei Momentengleichungen.

Die Gleichgewichtsbedingungen 4), 5) und 6) können nunmehr so ausgesprochen werden: *Für das Gleichgewicht eines räumlichen Kräftesystems ist ausser den drei Projectionsbedingungen erforderlich, dass die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf jede von drei zu einander senkrechten Axen gleich Null sei.*

Wenn nur die Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt sind, so reducirt sich das Kräftesystem auf ein Kräftepaar. Sind dagegen für irgend eine Lage des Reductionspunktes die Momentengleichungen, nicht aber die Projectionsgleichungen erfüllt, so kann das System auf eine einzige Resultirende zurückgeführt werden, welche durch den Reductionspunkt geht.

D. Anwendungen.

1) Auf jede Seitenfläche eines geschlossenen Polyeders wirkt ein Kräftepaar, dessen Moment gleich dem Inhalte der Seitenfläche ist. Alle Axen der Momente sind nach aussen gerichtet. Man zeige, dass die Kräftepaare sich das Gleichgewicht halten.

Jedes Kräftepaar kann durch Kräfte ersetzt werden, welche längs der Kanten der Seitenfläche wirken und durch die halben Längen der Kanten dargestellt werden (Man vergleiche hierzu die Aufgabe auf p. 310). Auf diese Weise erhält man auf jeder Kante des Polyeders zwei gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche sich also aufheben. Das Kräftesystem ist folglich im Gleichgewichte w. z. b. w.

2) *Man beweise, dass die Projection der Axe des resultirenden Momentes eines räumlichen Kräftesystems auf die Richtung der Resultirenden unabhängig von der Lage des Reductionspunktes ist.*

Bezeichnet man mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Reductionspunktes in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume, so erhält man mit den früher benützten Bezeichnungen

$$R_x = \Sigma X,$$

$$R_y = \Sigma Y,$$

$$R_z = \Sigma Z,$$

und

$$M_x = \Sigma\{(y-y_0)\,Z-(z-z_0)\,Y\} = \Sigma(yZ-zY)-y_0\,\Sigma Z+z_0\,\Sigma Y,$$
$$M_y = \Sigma\{(z-z_0)\,X-(x-x_0)\,Z\} = \Sigma(zX-xZ)-z_0\,\Sigma X+x_0\,\Sigma Z,$$
$$M_z = \Sigma\{(x-x_0)\,Y-(y-y_0)\,X\} = \Sigma(xY-yX)-x_0\,\Sigma Y+y_0\,\Sigma X.$$

Für den Winkel ϑ zwischen der Resultirenden und der Axe des resultirenden Momentes ergiebt sich

$$\cos\vartheta = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{RM},$$

und die zu berechnende Projection ist

$$M\cos\vartheta = \frac{1}{R}\{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z\}. \tag{177}$$

Durch Einsetzen der Werte von R_x, R_y, R_z und M_x, M_y, M_z findet man

$$\begin{aligned} R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z &= \Sigma X \times \Sigma(yZ-zY) + \\ &+ \Sigma Y \times \Sigma(zX-xZ) + \Sigma Z \times \Sigma(xY-yX). \end{aligned} \tag{178}$$

Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Reductionspunktes kommen hier nicht vor; es ist somit $M\cos\vartheta$ unabhängig von der Lage dieses Punktes, w. z. b. w.

3) ***Welches ist der analytische Ausdruck für die Bedingung, dass ein Kräftesystem im Raume auf eine einzige Resultirende reducirt werden könne?***

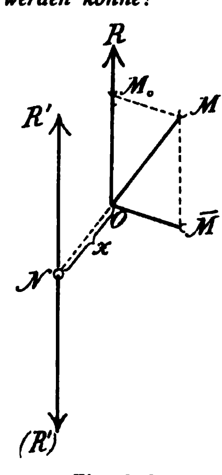


Fig. 210.

Es sei R die Resultirende, M die Axe des resultirenden Kräftepaares bei der Reduction auf einen Punkt O (Fig. 210). Ferner werde die Componente von M in der Richtung von R mit M_0, die zu R senkrechte Componente mit $\overline{M}$ bezeichnet. Man bringe nun in einem Punkte N, der in einer durch R senkrecht zu $\overline{M}$ gelegten Ebene liegt, die mit R gleich grosse und parallele Kraft R' sowie ihre gleiche und entgegengesetzte Kraft (R') an. Ferner wähle man den Abstand x des Punktes N von R so, dass das Moment des von R und (R') gebildeten Kräftepaares, d. h. Rx gleich gross, aber $\overline{M}$ entgegengesetzt sei. Für den Punkt N als Reductionspunkt wird also das räumliche Kräftesystem auf eine Resultirende R' und ein resultirendes Kräftepaar

M_0 in einer zu R' senkrechten Ebene reducirt. Diese Reduction ist immer möglich; die Richtungslinie von R' ($=R$) heisst die Centralaxe des Kräftesystems. Von allen resultirenden Momenten ist M_0 das kleinste. Damit nun eine einzige Resultirende übrig bleibe, muss M_0 gleich Null sein. Gemäss der Gleichung (178) wird diese Bedingung analytisch durch die Formel

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0 \tag{179}$$

ausgedrückt.

4) In drei nicht zusammenstossenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds wirken gleich grosse Kräfte (Fig 211). Wann ist das

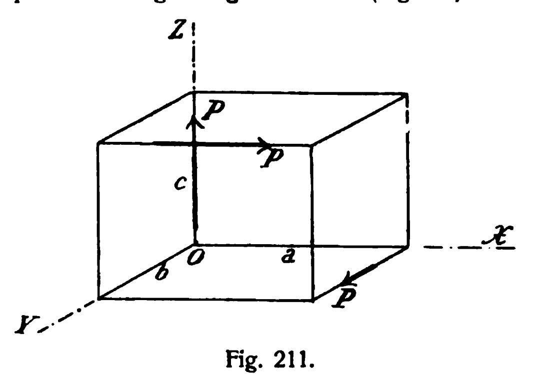


Fig. 211.

Kräftesystem einer einzigen Resultirenden äquivalent?

Man erhält mit den Bezeichnungen der Figur

$$R_x = R_y = R_z = P,$$

$$M_x = 0, M_y = Pc, M_z = P(a-b),$$

und die Bedingung wird

$$b = a + c.$$

5) *Man stelle den allgemeinen Ausdruck für das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe auf.*

Es seien die Componenten der Kraft in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume X, Y, Z, die Coordinaten ihres Angriffspunktes x, y, z, die Richtungswinkel der gegebenen Axe α, β, γ und die Coordinaten eines Punktes auf ihr a, b, c. Das Moment ist

$$M = P . \sin \vartheta . d,$$

wo

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \vartheta = \frac{X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma}{P}$$

und

$$d = \frac{(x-a)\{Y \cos \gamma - Z \cos \beta\} + (y-b)\{Z \cos \alpha - X \cos \gamma\} + (z-c)\{X \cos \beta - Y \cos \alpha\}}{P \sin \vartheta}$$

sind. Folglich erhält man

$$(180) \qquad M = (x-a)\{Y \cos \gamma - Z \cos \beta\} + (y-b)\{Z \cos \alpha - X \cos \gamma\} + \\ + (z-c)\{X \cos \beta - Y \cos \alpha\}.$$

6) ***Man beweise den Momentensatz für Kräfte im Raume, wenn die Momente der Kräfte, der Resultirenden und des resultirenden Kräftepaares in Bezug auf eine Gerade genommen werden.***

§ 63.

Parallele Kräfte im Raume.

Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die Kräfte eines räumlichen Systemes einander parallel sind. Sie seien

$$P_1, P_2 \ldots . P_n$$

mit den Angriffspunkten

$$(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2) \ldots . (x_n y_n z_n)$$

und den Richtungswinkeln α, β, γ in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Es werde auch der Fall berücksichtigt, dass die Kräfte entgegengesetzten Sinn haben können und zwar so, dass man die Kräfte P mit der Richtung α, β, γ als positiv, die Kräfte mit der entgegengesetzten Richtung als negativ rechnet. Wenn alle Kräfte denselben Sinn haben, so giebt es immer eine einzige Resultirende, wie man leicht erkennt, wenn man zuerst zwei Kräfte, dann ihre Resultirende mit einer drit-

ten Kraft u. s. w. zusammensetzt. Die Componenten der Resultirenden sind

$$(181)\qquad \begin{aligned} R_x &= \Sigma(P\cos\alpha) = \cos\alpha\,.\,\Sigma P, \\ R_y &= \Sigma(P\cos\beta) = \cos\beta\,.\,\Sigma P, \\ R_z &= \Sigma(P\cos\gamma) = \cos\gamma\,.\,\Sigma P, \end{aligned}$$

ihre Grösse ist

$$(182)\qquad R = \Sigma P,$$

ihre Richtung ist diejenige der Kräfte selbst. Wenn einige Kräfte in dem einen, andere in dem entgegengesetzten Sinne gerichtet sind, so kann der specielle Fall vorkommen, dass $\Sigma P = 0$ ist. Die Kräfte sind dann entweder einem Kräftepaare äquivalent oder halten sich das Gleichgewicht.

Lage der Resultirenden.

Es soll noch die Lage der Resultirenden bestimmt werden. Zu diesem Zwecke werde eine Kraft (ΣP), deren Richtung entgegengesetzt ist derjenigen der Resultirenden und in ihrer noch unbekannten Richtungslinie hinzugefügt. Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes dieser Richtungslinie. Die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n, (\Sigma P)$ halten sich das Gleichgewicht. Wendet man auf sie die drei Momentengleichungen auf p. 319 an, so erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) - \eta\,.\,\Sigma P\,.\cos\gamma + \zeta\,.\,\Sigma P\,.\cos\beta &= 0, \\ \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) - \zeta\,.\,\Sigma P\,.\cos\alpha + \xi\,.\,\Sigma P\,.\cos\gamma &= 0, \\ \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) - \xi\,.\,\Sigma P\,.\cos\beta + \eta\,.\,\Sigma P\,.\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man ξ, η und ζ als die laufenden Coordinaten eines Punktes im Raume, so stellt jede dieser drei Gleichungen eine Ebene dar. Zwischen den drei Gleichungen besteht eine Identität; die Summe der bez. mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ multiplicirten linken Seiten ist gleich Null. Die drei Gleichungen bestimmen also zusammen nicht einen Punkt, sondern eine Gerade, längs welcher die drei Ebenen sich schneiden. Diese Gerade ist die Richtungslinie der Resultirenden. Den Gleichungen kann auch die Form

$$\cos\gamma\,\{\Sigma(Py)-\eta\,.\,\Sigma P\}-\cos\beta\,\{\Sigma(Pz)-\zeta\,.\,\Sigma P\}=0,$$
$$\cos\alpha\,\{\Sigma(Pz)-\zeta\,.\,\Sigma P\}-\cos\gamma\,\{\Sigma(Px)-\xi\,.\,\Sigma P\}=0,$$
$$\cos\beta\,\{\Sigma(Px)-\xi\,.\,\Sigma P\}-\cos\alpha\,\{\Sigma(Py)-\eta\,.\,\Sigma P\}=0$$

Mittelpunkt paralleler Kräfte.

gegeben werden. Man erkennt, dass der Punkt S mit den Coordinaten

$$(183)\qquad \xi=\frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P},\quad \eta=\frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P},\quad \zeta=\frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P}$$

auf der Resultirenden liegt. Ferner sieht man, dass die Resultirende der Kräfte fortwährend durch den Punkt S geht, wenn man alle Kräfte um ihre Angriffspunkte in solcher Weise dreht, dass sie einander parallel bleiben. Der Punkt S heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Schwerpunkt.

Wenn die parallelen, gleich gerichteten Kräfte Schwerkräfte sind, so heisst ihr Mittelpunkt Schwerpunkt. Weil die Lehre vom Schwerpunkte einen wichtigen Platz in der Mechanik einnimmt, soll ihr ein besonderer Abschnitt gewidmet werden.

Siebenter Abschnitt.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

§ 64.

Schwerpunkt materieller Punktsysteme.

Allgemeine Formeln.

Es seien $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2) \dots (x_n y_n z_n)$ auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume bezogene materielle Punkte, deren Gewichte bez. $p_1, p_2 \dots p_n$ sind. Wenn das System keine sehr grosse räumliche Ausdehnung hat, so lassen sich die Gewichte als parallele, im gleichen Sinne gerichtete Kräfte auffassen. Gemäss den Formeln (183) sind die Coordinaten des Schwerpunktes des Systems

$$(184) \qquad \xi = \frac{\Sigma(px)}{\Sigma p}, \quad \eta = \frac{\Sigma(py)}{\Sigma p}, \quad \zeta = \frac{\Sigma(pz)}{\Sigma p}.$$

Der gemeinsame Nenner Σp ist das Gesamtgewicht des Systems.

Bezeichnet man mit $m_1, m_2 \dots m_n$ die Massen der einzelnen Punkte des Systems, so ist

$$p_1 = m_1 g, \quad p_2 = m_2 g, \quad \dots\dots\dots \quad p_n = m_n g$$

und die Formeln (184) liefern

$$(185)\qquad \xi = \frac{\Sigma(mx)}{M}, \quad \eta = \frac{\Sigma(my)}{M}, \quad \zeta = \frac{\Sigma(mz)}{M},$$

wo $M = \Sigma m$ die gesamte Masse des Systems ist.

Die Ausdrücke (185) zeigen, dass *die Lage des Schwerpunktes unabhängig von den auf das System wirkenden parallelen Kräften ist und allein durch die Massenverteilung innerhalb des Systems bestimmt wird.* Auf Grund dieser wichtigen Eigenschaft des Schwerpunktes heisst er auch Massenmittelpunkt.

Massenmittelpunkt.

Massenmoment.

Man nennt das Product der Masse eines Punktes und seines Abstandes von einer Ebene Massenmoment in Bezug auf die Ebene. Die drei Formeln (185) geben den Satz: *Der Abstand des Schwerpunktes eines Systems von materiellen Punkten von einer beliebigen Ebene ist gleich dem Quotienten aus dem Massenmomente des Systems in Bezug auf diese Ebene und der ganzen Masse des Systems.*

Bringt man die Gleichungen (185) auf die Form

$$(186)\qquad M.\xi = \Sigma(mx), \quad M.\eta = \Sigma(my), \quad M.\zeta = \Sigma(mz),$$

so kann man dem Satze auch die Form geben: *Die Summe der Massenmomente eines Systems von materiellen Punkten in Bezug auf eine Ebene ist gleich dem Momente der ganzen, in den Massenmittelpunkt verlegten Masse des Systems in Bezug auf dieselbe Ebene.*

Dieser Satz gilt nicht nur für das ganze System, sondern auch für jeden Teil desselben. Kennt man also die Lage des Massenmittelpunktes eines Teiles des Systems, so erhält man seinen Beitrag zur Summe

der Massenmomente, wenn man das Product der Masse dieses Teiles und des Abstandes seines Massenmittelpunktes von der betreffenden Ebene bildet.

Wenn die n Massen eines Systems von n Punkten im Raume alle gleich gross sind, so hängt die Lage des Schwerpunktes nur von der geometrischen Configuration ab. Seine Coordinaten sind

$$\xi = \frac{\Sigma x}{n},$$

$$\eta = \frac{\Sigma y}{n},$$

$$\zeta = \frac{\Sigma z}{n},$$

d. h. die aritmetischen Mittel der Coordinaten der Systempunkte.

Anwendungen.

1) *Man soll den Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 in dem Abstande a von einander bestimmen.*

Es sei A der Punkt mit der Masse m_1, B der Punkt mit der Masse m_2 (Fig. 212). Wenn man die Momente der Massen z. B. in Bezug auf eine durch A senkrecht zu AB geführte Ebene berechnet, so findet man für den Abstand ξ des auf AB liegenden Schwerpunktes S von A

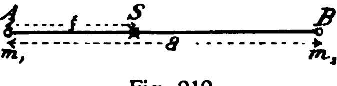


Fig. 212.

$$\xi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a.$$

Der Abstand SB beträgt

$$a - \xi = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a.$$

Der Schwerpunkt teilt also den Abstand beider Punkte im umgekehrten Verhältnis der Massen.

Sucht man z. B. den Schwerpunkt des von der Erde und dem Monde gebildeten Systems, so kann man sich zunächst die Massen dieser Körper in ihren Mittelpunkten concentrirt denken. Weil die Masse des Mondes nach den Beobachtungen ungefähr $\frac{1}{80}$ der Erdmasse ist, so erhält man, wenn m_1 die Erde, m_2 der Mond ist,

$$\xi = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}} a = \frac{\frac{1}{80}}{1+\frac{1}{80}} a = \frac{1}{81} a,$$

wo a den Abstand der beiden Mittelpunkte bezeichnet. Dieser Abstand beträgt etwa 60 Erdradien; es liegt also der gemeinsame Schwerpunkt von Erde und Mond innerhalb der Erdkugel.

2) *Man bestimme den Schwerpunkt von drei gleich grossen Massen in den Ecken eines Dreieckes.*

Der Schwerpunkt S liegt in der Ebene des Dreieckes (Fig. 213). Die beiden Massen m in A und B können durch die Masse $2m$ in dem Halbirungspunkte C' der Seite AB ersetzt werden. Folglich liegt S auf der Strecke CC' und teilt sie im Verhältnis von 2 zu 1. D. h. *der Schwerpunkt fällt mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der Mittellinien des Dreieckes zusammen.*

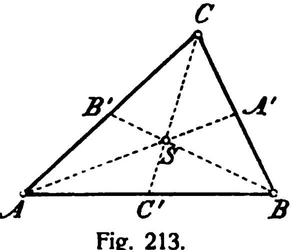


Fig. 213.

Sind die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf ein Coordinatensystem im Raume $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ und $(x_3 y_3 z_3)$, so sind die Coordinaten des Schwerpunktes die aritmetischen Mittel:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

3) *Man bestimme den Schwerpunkt von vier gleichen Massen, welche die Ecken eines Tetraeders bilden.*

Der Schwerpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt der vier Geraden, welche von je einer Ecke nach dem in der Aufgabe 2) bestimmten Punkte der gegenüber liegenden Seitenfläche gezogen werden, und hat die Coordinaten

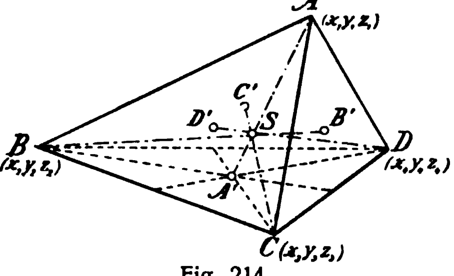


Fig. 214.

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

4) Wie müssen sich die in den Ecken eines Dreieckes oder eines Tetraeders angebrachten Massen zu einander verhalten, damit ihr Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, bez. der eingeschriebenen Kugel zusammenfalle?

Antwort: Wie die gegenüber liegenden Kanten des Dreieckes, bez. die Flächen des Tetraeders.

5) ***Man beweise, dass für den Schwerpunkt eines materiellen Punktsystems die Grösse $\Sigma(md^2)$ ein Minimum wird, wenn d den Abstand eines Massenpunktes von einem beweglichen Punkte bezeichnet.***

Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des betrachteten Punktes. Dann ergiebt sich

$$\Sigma(md^2) = f(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma m \left\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right\}$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \xi \Sigma m - \Sigma(mx),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \eta \Sigma m - \Sigma(my),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \zeta \Sigma m - \Sigma(mz).$$

Die Bedingung, dass f ein Minimum sei, verlangt, dass die drei partiellen Ableitungen gleich Null seien. Man erhält alsdann für ξ, η und ζ die Coordinaten des Schwerpunktes. Eine nähere Untersuchung zeigt noch, dass es sich thatsächlich um ein Minimum von f handelt.

§ 65.

Schwerpunkte geometrischer Körper, Flächen und Linien. Allgemeine Formeln.

Homogene und nicht homogene Körper. Dichte.

Ein Körper heisst homogen, wenn auf gleich grosse Volumina stets gleich grosse Massen fallen. Das constante Verhältnis zwischen der Masse und dem Volumen wird Dichte des Körpers genannt. Wird die Masse des homogenen Körpers mit M, das Volumen mit V und die Dichte mit ϱ bezeichnet, so ist also

$$\frac{M}{V} = \varrho$$

und

$$M = \varrho V. \tag{187}$$

Wenn der Körper nicht homogen ist, so heisst er heterogen. Der Quotient der Masse und des Volumens ist die sog. mittlere Dichte

$$\bar{\varrho} = \frac{M}{V}. \tag{188}$$

Ebenso erhält man die mittlere Dichte eines Teiles des Körpers. Nimmt man diesen Teil kleiner und kleiner, so nähert sich die mittlere Dichte einem Grenzwerte, welcher die Dichte in dem Punkte heisst, zu welchem sich das Teilchen mehr und mehr zusammenzieht. Die von Punkt zu Punkt veränderliche Dichte wird also durch die Ableitung

$$\varrho = \frac{dM}{dV} \tag{189}$$

definirt. Ferner berechnet man die Gesamtmasse des Körpers vermittelst des auf den ganzen Körper zu erstreckenden Integrals

$$M = \int \varrho dV. \tag{190}$$

Specifisches Gewicht.

Unter dem specifischen Gewichte eines homogenen Körpers versteht man den Quotienten aus seinem Gewicht und seinem Volumen. Bei einem heterogenen Körper spricht man von dem mittleren specifischen Gewicht und dem specifischen Gewicht in einem Punkte. Bezeichnet man Gewichte mit dem Buchstaben G, specifische Gewichte mit γ, so ist also

$$\gamma = \frac{G}{V} \text{ oder } \bar{\gamma} = \frac{G}{V}, \quad \gamma = \frac{dG}{dV} \text{ und } G = \int \gamma dV. \tag{191}$$

Nach den Formeln (191) und (187) findet man für einen homogenen Körper

$$\frac{G}{M} = \frac{\gamma V}{\varrho V} = \frac{\gamma}{\varrho} = g$$

und also

$$\gamma = \varrho \cdot g. \tag{192}$$

Das specifische Gewicht ist somit gleich dem Producte aus der Dichte des Körpers und der Beschleunigung der Schwere.

Einheiten der Dichte und des specifischen Gewichtes.

Die Dichte und das specifische Gewicht haben ihre besonderen Einheiten, und zwar ist:

$$\text{Einheit der Dichte} = \frac{\text{Masseneinh.}}{\text{Volumeneinh.}} = \frac{\text{Krafteinh. Zeiteinh.}^2}{\text{Längeneinh.}^4} \text{ oder } \frac{\text{Masseneinh.}}{\text{Längeneinh.}^3},$$

$$\text{z. B. } \frac{\text{kg} \times \text{Sec.}^2}{\text{m} \times \text{dm}^3} = 10^{-1} \frac{\text{kg} \times \text{Sec.}^2}{\text{dm}^4} \text{ oder } \frac{\text{Massenkg}}{\text{dm}^3}.$$

$$\text{Einheit des spec. Gewichtes} = \frac{\text{Gewichtseinh.}}{\text{Volumeneinh.}} = \frac{\text{Gewichtseinh.}}{\text{Längeneinh.}^3},$$

$$\text{z. B. } \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \text{ oder } \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}.$$

Nach Übereinkunft werden die Einheiten des specifischen Gewichtes immer so gewählt, dass das specifische Gewicht des Wassers gleich 1 wird. Dies ist mit den oben angeführten Einheiten in der That der Fall. Meistens wird die Dichte nicht in denselben Grundeinheiten wie das specifische Gewicht angegeben, sondern in solchen Grundeinheiten, dass auch die Dichte des Wassers gleich 1 wird, z. B. in $\frac{\text{Massenkg}}{\text{dm}^3}$. Die Zahlwerte des specifischen Gewichtes und der Dichte eines Körpers sind dabei dieselben. Man darf aber nicht vergessen, wenn Dichte und specifisches Gewicht in derselben Gleichung vorkommen, solche Einheiten zu benützen, die aus denselben Grundeinheiten abgeleitet sind.

Schwerpunkt eines Volumens.

Es sei dM ein Massenelement eines homogenen Körpers mit den Coordinaten x, y und z in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem im Raume. Der Schwerpunkt des Körpers hat die Coordinaten

$$\xi = \frac{\int x dM}{M},$$
(193) $$\eta = \frac{\int y dM}{M},$$
$$\zeta = \frac{\int z dM}{M}.$$

Führt man jetzt die Volumenelemente mit Hülfe der Formeln

$$dM = \varrho dV,$$
$$M = \varrho V,$$

ein, so findet man

$$\xi = \frac{\int x dV}{V},$$
(194) $$\eta = \frac{\int y dV}{V},$$
$$\zeta = \frac{\int z dV}{V}.$$

Diese Formeln zeigen, dass *der Schwerpunkt eines homogenen Körpers nur von der geometrischen Form des Körpers abhängt.* Man spricht deshalb auch vom Schwerpunkt eines geometrischen Körpers oder eines Volumens.

Wenn der Körper nicht homogen ist, so sind seine Schwerpunktscoordinaten

$$\xi = \frac{\int \varrho x dV}{\int \varrho dV},$$
(195) $$\eta = \frac{\int \varrho y dV}{\int \varrho dV},$$
$$\zeta = \frac{\int \varrho z dV}{\int \varrho dV}.$$

Schwerpunkt von Flächen und Linien. Man spricht auch vom Schwerpunkt einer geometrischen Fläche und dem Schwerpunkt einer geometrischen

Linie; man versteht darunter die Schwerpunkte einer gleichförmigen Massenbelegung auf der Fläche, bez. auf der Linie. Die Masse pro Flächen- oder Längeneinheit heisst Dichte der Massenbelegung und werde mit ϱ bezeichnet. Der Schwerpunkt ist unabhängig von dem Werte von ϱ; für seine Coordinaten gelten die Formeln (194) und (195), wenn man die Volumenelemente durch Flächen-, bez. Linienelemente ersetzt (Siehe §§ 66 und 67 unten).

In vielen Fällen berechnet man die Lage des Schwerpunktes auf elementarem Wege, ohne Quadraturen, ganz besonders dann, wenn gewisse Linien oder Flächen sich angeben lassen, auf welchen der Schwerpunkt liegen muss. Man beachte auch die Bemerkung auf p. 328 betreffend den Schwerpunkt eines Teiles des gegebenen Massensystems.

Wenn ein homogener Körper, eine homogene Fläche oder Linie einen geometrischen Mittelpunkt besitzt, so ist dieser zugleich der Schwerpunkt des Systems. Als Beispiele mögen der Halbirungspunkt einer Strecke, der Mittelpunkt der gleichförmig mit Masse belegten Kreisperipherie oder Kreisfläche, der Mittelpunkt der Kugel und des Ellipsoides u. s. w. erwähnt werden.

Schwerebene.

Wenn gleich grosse Massenelemente symmetrisch in Bezug auf eine Ebene liegen, so ist die Summe ihrer Momente in Bezug auf die Ebene gleich Null, weil die Glieder der Summe sich paarweise tilgen. Die Symmetrie darf auch eine schiefe sein. Die Symmetrieebene enthält den Schwerpunkt und ist eine sog. Schwerebene des Systems; darunter werde allgemein jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene verstanden. So ist z. B. jede Hauptebene eines Ellipsoides, eine Diagonalebene eines Parallelepipeds oder eine Ebene durch die Rotationsaxe eines Umdrehungskörpers eine Schwerebene.

Schwerlinie.

Wenn die Massenelemente ortogonal oder schief symmetrisch in Bezug auf eine Gerade liegen, so enthält die

Gerade den Schwerpunkt, und ist eine sog. **Schwerlinie**. Allgemein wird unter einer Schwerlinie jede durch den Schwerpunkt gehende Gerade verstanden. Beispielsweise ist der Durchmesser eines Kreises oder einer Kugel, die Diagonale eines Parallelogramms und die Mittellinie einer Dreiecksfläche eine Schwerlinie.

Der Schwerpunkt eines Systems ist völlig bestimmt, wenn zwei Schwerlinien oder eine Schwerlinie und eine Schwerebene, welche die Linie nicht enthält, oder drei Schwerebenen, welche sich nicht längs einer Geraden schneiden, bekannt sind.

§ 66.

Schwerpunkte von Linien.

Allgemeine Formeln für die Schwerpunkte von Linien.

Es sei ds das Linienelement einer Curve im Raume oder in der Ebene, ϱ die Dichte der Massenbelegung, folglich der Quotient aus einer Masse und einer Länge. Auf dem Elemente ds befindet sich die Masse

$$dM = \varrho ds,$$

und die ganze Masse ist

$$M = \int \varrho ds,$$

wo das Integral über das betrachtete Curvenstück erstreckt werden muss (Fig. 215). Die Coordinaten des Schwerpunktes sind

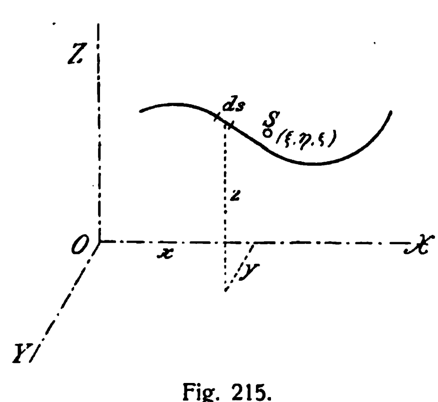


Fig. 215.

$$\xi = \frac{\int \varrho x ds}{M},$$

$$(197) \quad \eta = \frac{\int \varrho y ds}{M},$$

$$\zeta = \frac{\int \varrho z ds}{M}.$$

Wenn die Linie gleichförmig mit Masse belegt ist und die Länge L hat, so vereinfachen sich die Ausdrücke (197); man findet:

$$\xi = \frac{\int x ds}{L},$$

(198)
$$\eta = \frac{\int y ds}{L},$$

$$\zeta = \frac{\int z ds}{L}.$$

Ist die Curve eben, so liegt der Schwerpunkt in ihrer Ebene; wählt man diese z. B. als xy-Ebene, dann ist $\zeta = 0$ und die Formeln für ξ und η reichen aus zur Bestimmung des Schwerpunktes.

Im folgenden ist überall eine homogene Massenbelegung vorausgesetzt, wenn nicht das Gegenteil gesagt wird.

Anwendungen.

Geradlinige Strecke.

1) *Der Schwerpunkt einer geradlinigen Strecke ist ihr Halbirungspunkt.*

Dreiecksumfang.

2) Der Umfang eines Dreieckes (Fig. 216). Man denkt sich in den Halbirungspunkten der Dreiecksseiten Massen concentrirt, welche proportional den Seitenlängen sind. Der Schwerpunkt dieser drei Massen ist der gesuchte Schwerpunkt. Der Mittelpunkt der Massen in A' und in B' liegt in demjenigen Punkte C'' der Geraden $B'A'$, für welchen

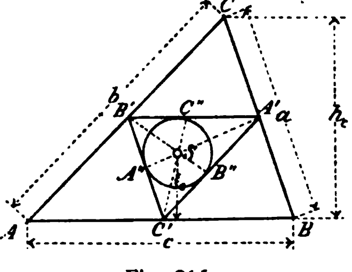


Fig. 216.

$$\frac{A'C''}{B'C''} = \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

ist. Hieraus ergiebt sich, dass die Schwerlinie $C'C''$ den Winkel $A'C'B'$ halbirt. In derselben Weise erhält man die durch A' und B' gehenden Schwerlinien. Der Schwerpunkt des Dreiecksumfanges ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem Dreieck eingeschrieben ist, das die Seitenmitten des gegebenen Dreieckes zu Ecken hat.

Mit den Bezeichnungen in der Figur ist der Abstand des Schwerpunktes von der Seite AB

$$\xi_c = \frac{a+b}{2(a+b+c)} h_c.$$

Kreisbogen.

3) Kreisbogen. Der Schwerpunkt liegt auf dem Radius, welcher den Kreisbogen halbirt (Fig. 217); man braucht nur seinen Abstand ξ vom Mittelpunkte des Kreises zu berechnen. Mit den Bezeichnungen in der Figur findet man

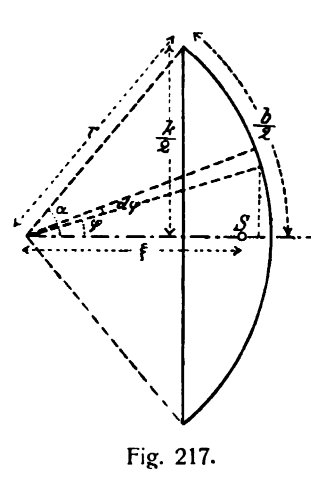


Fig. 217.

$$b\xi = 2\int_0^a r\cos\varphi\,.\,rd\varphi =$$

$$= 2r^2\Big[\sin\varphi\Big]_0^a = 2r^2\sin a,$$

und weil

$$k = 2r\sin a$$

ist,

$$\xi = \frac{k}{b} r. \tag{199}$$

Der Schwerpunkt des Kreisbogens teilt also den Radius im Verhältnis der Sehne zum Bogen.

Für einen Halbkreis wird

$$k = 2r \text{ und } b = \pi r$$

also

$$\xi = \frac{2r}{\pi} = 0.63662\, r. \tag{200}$$

4) Halbkreis mit Durchmesser. Da man den Schwerpunkt einer geraden Strecke und eines Kreisbogens kennt, so kann man die Lage des Schwerpunktes für jedes aus geradlinigen Strecken und Kreisbögen zusammengesetzte System berechnen. Ein Problem dieser Art ist z. B. folgendes. Aus homogenem Eisendrahte mit constanter Dicke werde ein Halbkreis mit seinem Durchmesser gebogen; welchen Winkel bildet der Durchmesser mit der Verticalen, wenn das System in einem Eckpunkte aufgehängt wird?

Halbkreis mit Durchmesser.

Der Schwerpunkt liegt lotrecht unter dem Aufhängepunkt (Fig. 218). Wenn man die Momente des Durchmessers und des Halbkreises in Bezug auf eine Ebene nimmt, welche durch den Durchmesser senkrecht zur Ebene des Systems gelegt wird, so erhält man

$$(\pi r + 2r)\,\eta = \pi r \times \frac{2r}{\pi},$$

$$\eta = \frac{2}{\pi + 2}\,r,$$

sowie für den verlangten Winkel φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{r} = \frac{2}{\pi + 2},$$

$$\varphi = 21^\circ\, 15'\, 26''.$$

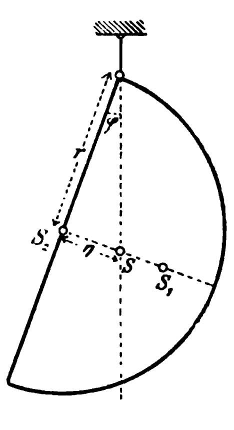


Fig. 218.

Würde der Durchmesser aus Eisendraht mit dem spec. Gewichte 7.60, der Halbkreis aus Messingsdraht mit dem spec. Gewichte 8.55 bestehen, so würde sich $\varphi = 20^\circ\, 21'\, 8''$ ergeben.

5) Cycloide. Die Gleichungen einer Cycloide, welche beim Rollen eines Kreises vom Radius r entsteht, sind nach § 33 p. 148

Cycloide.

$$x = r\,(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r\,(1 - \cos\varphi).$$

Der Schwerpunkt S liegt auf der Symmetrieaxe durch den Scheitel des Cycloidenbogens (Fig. 219). Zur Berechnung des Abstandes η des Schwerpunktes S von der x-Axe erhält man die Formeln

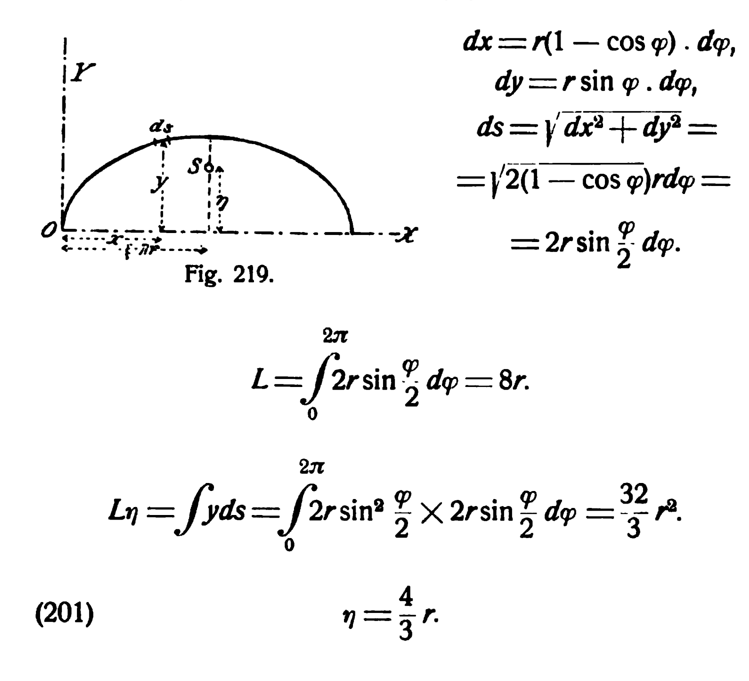


Fig. 219.

$$dx = r(1 - \cos\varphi) \,.\, d\varphi,$$
$$dy = r \sin\varphi \,.\, d\varphi,$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$
$$= \sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\, r d\varphi =$$
$$= 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8r.$$

$$L\eta = \int y ds = \int_0^{2\pi} 2r \sin^2\frac{\varphi}{2} \times 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{32}{3} r^2.$$

(201) $$\eta = \frac{4}{3} r.$$

§ 67.

Schwerpunkte von Flächen.

Allgemeine Formeln für die Schwerpunkte von Flächen.

Es sei dF ein Flächenelement eines begrenzten krummen oder ebenen Flächenstückes (Fig. 220), ϱ die Dichte der Massenbelegung, folglich der Quotient aus einer Masse und dem Quadrate einer Länge. Das ganze Flächenstück besitzt die Masse

(202) $$M = \int \varrho dF.$$

Die Coordinaten seines Schwerpunktes sind

$$\xi = \frac{\int \varrho x dF}{M},$$

$$(203) \quad \eta = \frac{\int \varrho y dF}{M},$$

$$\zeta = \frac{\int \varrho z dF}{M},$$

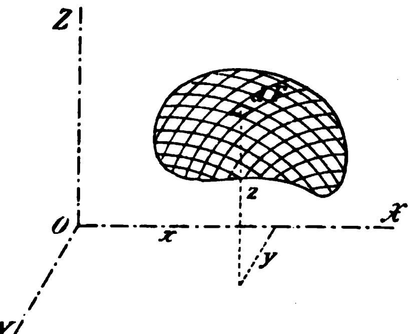


Fig. 220.

wo alle Integrale über das Flächenstück erstreckt werden müssen.

Wenn die Massenbelegung gleichförmig ist, wie in den unten angeführten Beispielen vorausgesetzt wird, so liefern die Ausdrücke (203) mit der Bezeichnung F für den gesamten Flächeninhalt die Formeln

$$(204) \quad \xi = \frac{\int x dF}{F}, \quad \eta = \frac{\int y dF}{F}, \quad \zeta = \frac{\int z dF}{F}.$$

Bei einer ebenen begrenzten Fläche braucht man nur zwei Schwerpunktscoordinaten zu berechnen.

Oberfläche eines Umdrehungskörpers.

Wenn man die Oberfläche eines Umdrehungskörpers mit zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen schneidet, so erhält man eine Zone, deren Schwerpunkt S auf der Rotationsaxe liegt (Fig. 221).

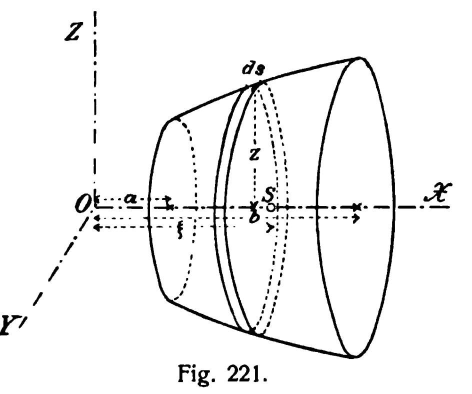


Fig. 221.

Diese Rotationsaxe werde als x-Axe gewählt. Einem Bogenelemente ds der Meridiancurve entspricht ein ringförmiger Streifen $2\pi z\,ds$ der betrachteten Zone; der Flächeninhalt der Zone ist

$$F = \int_a^b 2\pi z\,ds, \tag{205}$$

wo die Integrationsgrenzen sich auf die Variable x beziehen, und a und b die Abstände der beiden Grundebenen von der yz-Ebene sind. Das Moment des betrachteten Streifens in Bezug auf die yz-Ebene ist $\int 2\pi z x\,ds$. Bezeichnet ξ den Abstand des Schwerpunktes von dieser Ebene, so findet man

$$F \,.\, \xi = 2\pi \int_a^b z x\,ds$$

und

$$\xi = \frac{\int_a^b z x\,ds}{\int_a^b z\,ds}, \tag{206}$$

alles unter der Voraussetzung gleichförmiger Massenbelegung.

Anwendungen.

Dreiecksfläche.

1) Dreiecksfläche. Für die gleichförmig belegte Dreiecksfläche ist jede Mittellinie eine Schwerlinie (Fig. 222), weil sie als Axe einer schiefen Symmetrie parallel der zugehörigen Grundlinie betrachtet werden kann. Der Schwerpunkt der Dreiecksfläche ist also der gemeinsame Schnittpunkt der drei Mittellinien. Nach einem bekannten geometrischen Satze ist sein Ab-

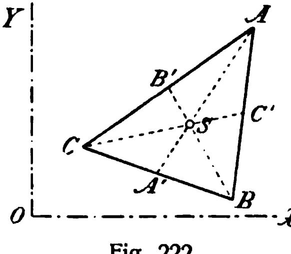


Fig. 222.

stand von jeder Seite des Dreieckes gleich dem Drittel der entsprechenden Höhe.

Der Schwerpunkt der Dreiecksfläche fällt mit dem Schwerpunkte von drei gleich grossen Massen in den Ecken zusammen (p. 330) und hat also zu Coordinaten die aritmetischen Mittel der Coordinaten der Eckpunkte.

Parallel-trapez.

2) P a r a l l e l t r a p e z. Die Verbindungslinie der beiden parallelen Seiten ist eine Schwerlinie (Fig. 223), weil sie als Axe einer schiefen Symmetrie parallel den genannten Seiten betrachtet werden kann. Man erhält eine zweite Schwerlinie, wenn man das Trapez in zwei Dreiecke zerlegt und ihre Schwerpunkte mit einander verbindet. Der Schnittpunkt S beider Schwerlinien ist der Schwerpunkt des Trapezes. Zur Berechnung des Abstandes η des Punktes S von der Grundlinie a dienen folgende Formeln, welche keiner näheren Erläuterung bedürfen.

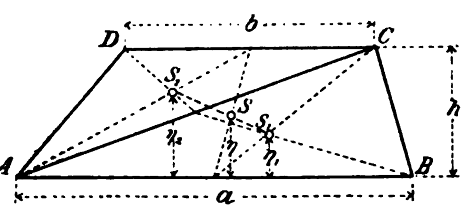


Fig. 223.

$$F_1 = \frac{ah}{2}; \quad F_2 = \frac{bh}{2}.$$

$$\eta_1 = \frac{h}{3}; \quad \eta_2 = \frac{2h}{3}.$$

$$(F_1 + F_2)\,\eta = F_1\,\eta_1 + F_2\,\eta_2.$$

$$\frac{a+b}{2}\,h\eta = \frac{ah^2}{6} + \frac{bh^2}{3}.$$

$$\eta = \frac{2b+a}{a+b}\,\frac{h}{3}. \tag{207}$$

Für den Abstand η' von S gemessen von der Grundlinie b aus ergiebt sich durch Vertauschen von a und b:

$$\eta' = \frac{2a+b}{a+b}\frac{h}{3}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{2b+a}{2a+b} = \frac{b+\frac{a}{2}}{a+\frac{b}{2}}.$$

Diese Formel liefert eine einfache Construction einer zweiten Schwerlinie (Fig. 224). Man verlängert jede Grundlinie um die Länge der anderen Grundlinie und zwar nach entgegengesetzten Richtungen und verbindet dann die Endpunkte dieser Verlängerungen mit einander.

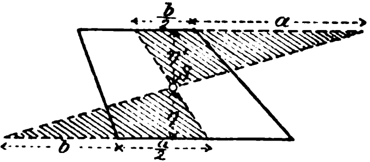


Fig. 224.

Viereckfläche.

3) Ebene Viereckfläche. Zerlegt man das Viereck in zwei Dreiecke und verbindet ihre Schwerpunkte, so erhält man eine Schwerlinie. Führt man diese Construction noch auf eine zweite Art aus, so wird eine zweite Schwerlinie und somit der Schwerpunkt selbst gefunden. Die Construction kann aber noch einfacher durchgeführt werden (Fig. 225). Man zieht die Diagonalen *AC* und *BD*, trägt *AF* gleich *CE* ab und sucht den Schwerpunkt des Dreieckes *DFB*. Dieser ist dann auch Schwerpunkt der Viereckfläche. Denn die Dreiecke *DFE* und *DAC* einerseits und *BFE* und *BAC* andererseits haben gemeinsame Schwerpunkte, während die Flächeninhalte der Dreiecke *DFE* und *BFE* sich wie die Flächeninhalte *DAC* und *BAC* verhalten.

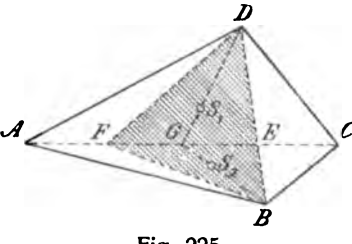


Fig. 225.

4) Ebenes Polygon. Das Polygon wird in Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunktscoordinaten bestimmt werden. In diesen Schwerpunkten denkt man sich Massen angebracht, welche proportional den Flächeninhalten der Dreiecke sind. Der Schwerpunkt dieses Massensystems ist der Schwerpunkt des Polygons.

Ebenes Polygon.

Der Schwerpunkt kann auch graphisch gefunden werden und zwar in folgender Weise: Man bringt in den Schwerpunkten der Dreiecke parallele Kräfte an, welche proportional den Flächeninhalten der Dreiecke sind, z. B. so, dass man alle Dreiecke auf eine gemeinsame Grundlinie reducirt und die erhaltenen Höhen als Kräfte verwendet. Dann wird der Mittelpunkt der parallelen Kräfte bestimmt. Zu diesem Zwecke construirt man zuerst für eine Lage der Kräfte mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons ihre Resultirende, dreht dann alle Kräfte um denselben Winkel, am besten um 90°, und construirt die Resultirende der Kräfte in der neuen Lage. Der Schnittpunkt der beiden Resultirenden ist der Schwerpunkt des Polygons.

Dasselbe graphische Verfahren kann für eine beliebige ebene Figur benützt werden. Man teilt die Figur in eine kleinere oder grössere Anzahl von Dreiecken, entweder genau oder annähernd. In besonderen Fällen können auch andere Teilfiguren betrachtet werden; nur muss man die Lage ihrer Schwerpunkte kennen.

5) Kreissector. Der Schwerpunkt liegt auf der Halbirungslinie des Centriwinkels (Fig. 226). Es sei ξ der Abstand des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte O des Kreisbogens. Der Sector kann in unendlich schmale Sectoren zerlegt werden, welche man als Dreiecke betrachten kann. Die Schwerpunkte dieser

Kreissector.

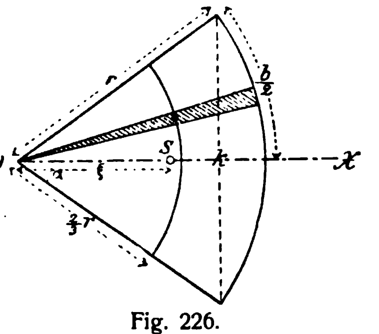


Fig. 226.

Dreiecke liegen alle auf einem Kreisbogen, dessen Radius $\frac{2}{3}$ vom Radius des Sectors ist. Die ganze Masse des Sectors kann auf diesen Kreisbogen verteilt werden, und zwar gleichförmig. Der Schwerpunkt des Kreisbogens ist bekannt; er ist auch der Schwerpunkt des Sectors. Nennt man α den halben Centriwinkel, k die Sehne und b den Bogen des ursprünglichen Kreisbogens, so ergiebt sich nach p. 338

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{k}{b} r$$

oder

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} r. \tag{208}$$

Speciell für die Halbkreisfläche ist

$$\xi = \frac{4}{3\pi} r = 0.42441\, r. \tag{209}$$

Parabelsegment.

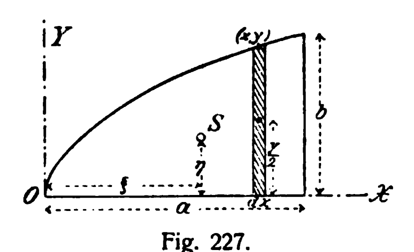


Fig. 227.

6. Parabelsegment. Für ein Parabelsegment von der Form der Figur 227 erhält man, wenn das Segment in schmale Streifen dF senkrecht zur Axe der Parabel zerlegt wird,

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}}\, b,$$

$$dF = y dx,$$

$$F = \int_0^a y dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} ab.$$

$$F \cdot \xi = \int_0^a x y dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} a^2 b.$$

$$F.\eta = \int_0^a \tfrac{1}{2}y^2 dx = \frac{b^2}{2a}\int_0^a x dx = \frac{1}{4}ab^2.$$

(210) $$\xi = \frac{3}{5}a; \ \eta = \frac{3}{8}b.$$

7) Mantelflächen des Cylinders und des Kegels.

Mantelfläche des Cylinders.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines Cylinders, dessen Grundflächen senkrecht zu den Erzeugenden sind, fällt mit dem Mittelpunkte derjenigen Geraden zusammen, welche die Schwerpunkte der Begrenzungscurven der beiden Grundflächen verbindet, sie mögen Kreise oder andere Curven sein.

Mantelfläche des Kegels.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines geraden Kegels liegt auf der Axe des Kegels (Fig. 228). Die ganze Mantelfläche kann in schmale dreieckförmige Elemente zerlegt werden, deren Schwerpunkte auf einem Kreise liegen, dessen Abstand von der Grundfläche des Kegels ein Drittel der Höhe ist. Der Schnittpunkt der Ebene dieses Kreises mit der Axe des Kegels ist der Schwerpunkt.

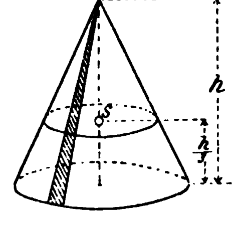


Fig. 228.

Mantelfläche des abgestumpften Kegels.

Für die Mantelfläche eines abgestumpften Kreiskegels mit der Höhe h, dem Radius R der grösseren und r der kleineren Endfläche berechnet man den Abstand ξ des Schwerpunktes von der grösseren Endfläche dadurch, dass man die Mantelfläche in sehr schmale Paralleltrapeze teilt, und zwar findet man (siehe die Formel (207))

(211) $$\xi = \frac{R+2r}{R+r}\frac{h}{3}.$$

Kugelzone.

8) Kugelzone. Man construire einen Cylinder, welcher die Kugel berührt und dessen Axe mit derjenigen der Kugelzone zusammenfällt (Fig. 229). Bekanntlich

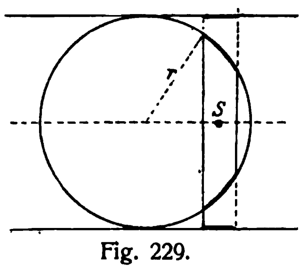


Fig. 229.

besitzen eine Zone der Kugel und eine Zone des Cylinders mit gemeinsamen Endflächen den gleichen Flächeninhalt. Dasselbe gilt von zwei entsprechenden unendlich schmalen Elementarzonen; sie haben ausserdem einen gemeinsamen Schwerpunkt. Es folgt hieraus, dass die statischen Momente einer Kugelzone und der entsprechenden Cylinderzone in Bezug auf eine beliebige den Endflächen parallele Ebene dieselben sind. Beide Zonen haben deshalb auch gemeinsame Schwerpunkte, d. h. der Schwerpunkt einer Kugelzone (oder einer Kugelcalotte) liegt auf ihrer Axe und halbirt ihre Höhenlinie.

§ 68.

Schwerpunkt von Körpern.

Für den Schwerpunkt eines Körpers gelten die Formelsysteme (194) und (195). In den folgenden Anwendungen wird überall vorausgesetzt, dass der Körper homogen sei.

Umdrehungskörper. Der homogene Körper sei ein Umdrehungskörper, welcher von zwei zur Rotationsaxe senkrechten Endflächen begrenzt werde. Der Schwerpunkt liegt auf der Rotationsaxe und wird durch seinen Abstand ξ von der yz-Ebene bestimmt (Fig. 221). Wenn dx die Projection des Linienelementes ds der Meridiancurve auf die Rotationsaxe bezeichnet, so erhält man mit Anwendung der Bezeichnungen der Figur 221

$$V\xi = \int_a^b \pi z^2 x dx$$

und weil

(212)
$$V = \int_a^b \pi z^2 dx$$
ist
(213)
$$\xi = \frac{\int_a^b z^2 x dx}{\int_a^b z^2 dx}.$$

Prisma und Cylinder.

1) Prisma und Cylinder. Ein Prisma oder ein Cylinder mit parallelen Endflächen kann durch Ebenen, welche parallel diesen Endflächen sind, in unendlich dünne Scheiben zerlegt werden. Die Schwerpunkte dieser Scheiben liegen alle auf der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Endflächen mit einander verbindet, und zwar kann man sich die ganze Masse des Körpers gleichförmig auf dieser Geraden ausgebreitet denken. Der Schwerpunkt des Körpers ist also der Halbirungspunkt der betrachteten geradlinigen Strecke. Das Resultat gilt sowohl für einen ortogonal als auch für einen zu den Erzeugenden schief abgeschnittenen prismatischen oder cylindrischen Körper mit parallelen Endflächen.

Tetraeder.

2) Tetraeder. Das Tetraeder kann durch Ebenen, welche parallel einer Basisfläche sind, in unendlich dünne Schichten zerlegt werden, deren Grundflächen ähnlich der Basisfläche sind. Die Schwerpunkte dieser Schichten liegen auf einer Geraden, welche den Schwerpunkt der Basisfläche mit der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders verbindet (Fig. 230). Man erhält vier solche Schwerlinien, welche sich in dem Schwerpunkte des Tetraeders schneiden müssen.

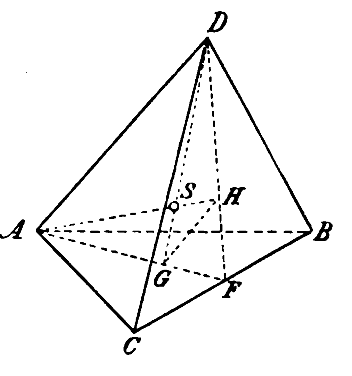


Fig. 230.

Es soll jetzt bewiesen werden, dass der Abstand des Schwerpunktes von einer Seitenfläche des Tetraeders ein Viertel der entsprechenden Höhe beträgt. Es sei ABC die Seitenfläche. Die Kante BC werde in F halbirt, ferner ziehe man die Linien AF und DF. Nimmt man GF gleich einem Drittel von AF und HF gleich einem Drittel von DF, so sind G und H die Schwerpunkte der Seitenflächen ABC und DBC. Der Schnittpunkt S von DG und AH ist der Schwerpunkt des Tetraeders. In dem Dreiecke AFD teilt die Transversale GH zwei Seiten in dem Verhältnisse 1 : 2 und ist also parallel der dritten Seite AD. Zugleich ist $GH = \frac{1}{3} AD$. Die Dreiecke SAD und SHG sind ähnlich und $SG = \frac{1}{3} SD$, oder was dasselbe ist, $SG = \frac{1}{4} DG$. In demselben Verhältnisse 1 : 4 steht der Abstand des Schwerpunktes S von der Seitenfläche ABC zu dem Abstande der Ecke D von derselben Seitenfläche.

Beim Vergleiche mit der Aufgabe 3) auf p. 330 erkennt man, dass der Schwerpunkt des homogenen Tetraeders mit dem Schwerpunkte von vier gleich grossen Massen in den Eckpunkten übereinstimmt. Seine Coordinaten sind die aritmetischen Mittel der Coordinaten der Eckpunkte.

Pyramide. 3) Pyramide und Kegel. Eine Schwerlinie der Pyramide ist die Gerade, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte seiner Grundfläche verbindet (Fig. 231). Man kann die ganze Pyramide in Tetraeder mit gemeinsamer Spitze zerlegen, und zwar so, dass die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke geteilt wird; die Schwerpunkte aller dieser Tetraeder liegen in einer Ebene, welche parallel der Grundfläche ist und sich in einem Abstande gleich dem Viertel der

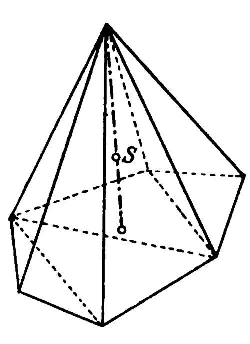


Fig. 231.

Höhe oberhalb derselben befindet. In dieser Ebene liegt also auch der Schwerpunkt der Pyramide und hat folglich einen Abstand von der Grundfläche gleich dem Viertel der Höhe.

Kegel.

Lässt man die Seitenzahl der Grundfläche unendlich gross und die Seiten selbst unendlich klein werden, so geht die Pyramide in einen Kegel über. Die Betrachtungen über den Schwerpunkt gelten unverändert. Der Schwerpunkt eines Kegels liegt also auf der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, in einem Abstande von der Grundfläche, welcher ein Viertel der Höhe beträgt.

Kugelsector.

4) Kugelsector. Halbkugel. Ein ortogonaler Kreiskegel, dessen Spitze im Mittelpunkte einer Kugel liegt, schneidet aus der Kugel einen Kugelsector. Der Schwerpunkt liegt auf der Axe dieses Umdrehungskörpers und kann in einfacher Weise wie folgt bestimmt werden (Fig. 232). Der Sector kann in unendlich schmale pyramidenförmige Elemente zerlegt werden, deren gemeinsame Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden liegen auf der Fläche einer Kugelcalotte, deren Radius $\frac{3}{4}$ von dem Radius des gegebenen Sectors ist. Weil ihre Volumina proportional den kleinen Flächenelementen der Kugelcalotte sind, so kann man sich diese als gleichförmig mit Masse belegt denken; der Schwerpunkt des Kugelsectors fällt mit dem Schwerpunkte dieser Kugelcalotte zusammen (p. 348). Mit den Bezeichnungen in der Figur ergiebt sich

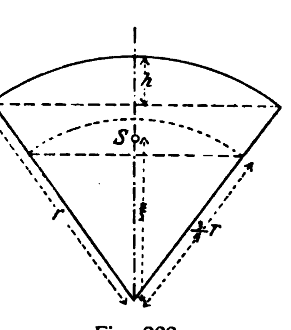


Fig. 232.

(214) $$\xi = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h.$$

Halbkugel. Für die Halbkugel erhält man

$$\xi = \frac{3}{8} r. \tag{215}$$

Umdrehungs-paraboloid. 5). Umdrehungsparaboloid. Wenn das in der Figur 227 dargestellte Parabelsegment um die Axe der Parabel rotirt, so entsteht ein Umdrehungsparaboloid, dessen Schwerpunkt mit Hülfe der allgemeinen Formeln auf p. 349 bestimmt wird. Ersetzt man z in der Figur 227 durch y, so findet man

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a} \int_0^a x dx = \frac{1}{2} \pi a b^2,$$

$$\int_0^a y^2 x dx = \frac{b^2}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^2 b^2,$$

und

$$\xi = \frac{2}{3} a. \tag{216}$$

§ 69.

Guldin'sche Regeln.

Pappus hat eine interessante Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte auf die Berechnung der Fläche und des Inhaltes von Rotationskörpern gemacht. Die erhaltenen Regeln werden aber gewöhnlich nach Guldin benannt.

Oberfläche eines Rotationskörpers. Nach p. 342 ist der Flächeninhalt F einer Zone der Mantelfläche eines Umdrehungskörpers, welche durch die Rotation einer ebenen Curve (Fig. 221) um eine in ihrer Ebene liegende Axe entsteht,

$$F = 2\pi \int z ds,$$

wo das Integral über das ganze betrachtete Stück erstreckt werden muss. Der Ausdruck $\int z ds$ stellt das statische Moment des Curvenstückes in Bezug auf eine durch die Axe senkrecht zur Ebene der Curve gelegte Ebene dar (Fig. 233). Nennt man L die Länge des Curvenstückes, ζ den Abstand seines Schwerpunktes S von der Axe, so erhält man

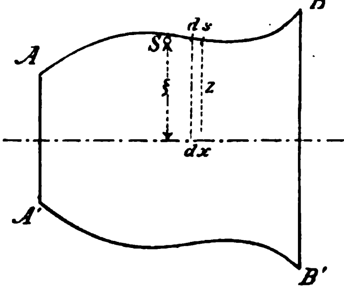


Fig. 233.

$$L . \zeta = \int z ds$$

und findet also

$$F = 2\pi\zeta . L. \tag{217}$$

Die Grösse $2\pi\zeta$ ist der Weg, den der Schwerpunkt S bei einer Umdrehung beschreibt, d. h. der Umfang eines Kreises mit dem Radius ζ. Es ergiebt sich also folgende Regel zur Bestimmung der Oberfläche eines Rotationskörpers.

Der Flächeninhalt einer Zone einer Umdrehungsfläche ist gleich dem Producte aus der Länge des sie erzeugenden Meridianbogens und dem Wege, den der Schwerpunkt des Bogens durchläuft.

Die Regel kann auch umgekehrt für die Berechnung des Schwerpunktsabstandes ζ einer ebenen Curve benützt werden, wenn der Inhalt F der Zone der Rotationsfläche bekannt ist. Man erhält

$$\zeta = \frac{F}{2\pi L}. \tag{218}$$

Volumen eines Rotationskörpers.

Wenn eine begrenzte ebene Fläche sich um eine in ihrer Ebene liegende, die Fläche nicht schneidende Axe dreht, so entsteht ein ringförmiger Rotationskörper (Fig. 234). Ein Element dF dieser Fläche, welches den Abstand z von der Rotationsaxe hat, erzeugt einen Ring mit dem Volumen

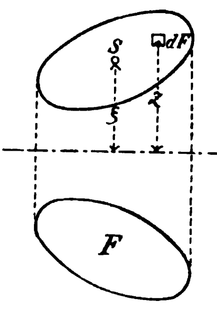


Fig. 234.

$$dV = 2\pi z \,.\, dF.$$

Das Volumen des ganzen Rotationskörpers ist

$$V = 2\pi \int z dF,$$

wo das Integral über das ganze ebene Flächenstück erstreckt werden muss. Es bezeichnet $\int z dF$ das statische Moment dieses Flächenstückes in Bezug auf eine durch die Rotationsaxe senkrecht zur Ebene des Flächenstückes gelegte Ebene. Ist F die ganze Fläche, ζ der Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe, so erhält man

$$\int z dF = \zeta \,.\, F$$

und folglich

$$V = 2\pi\zeta \,.\, F. \tag{219}$$

Diese Formel enthält die Guldin'sche Regel für die Volumina der Rotationskörper.

Das Volumen eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Producte aus dem Inhalte der ihn erzeugenden Fläche und dem von ihrem Schwerpunkte durchlaufenen Wege.

Umgekehrt kann man diese Regel zur Bestimmung des Schwerpunktes einer ebenen Fläche benützen, wenn man den Inhalt des Rotationskörpers kennt, welcher durch Drehung der Fläche um irgend eine, in ihrer Ebene liegende Axe entsteht.

Dreht man die ebene Fläche um ihren Schwerpunkt ohne die Axe zu verändern, so erhält man Umdrehungskörper von verschiedener Form, aber von gleich grossem Volumen.

Anwendungen.

1) Ein Kreis dreht sich um eine in seiner Ebene liegende Axe; man berechne die Fläche und das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Es sei r der Radius des Kreises (Fig. 235), a der Abstand seines Mittelpunktes von der Axe, wobei $a > r$ ist. Für die Fläche des ringförmigen Körpers erhält man:

$$F = 2\pi r \,.\, 2\pi a = 4\pi^2 ar.$$

Fig. 235.

Das Volumen ist:

$$V = \pi r^2 \,.\, 2\pi a = 2\pi^2 ar^2.$$

2) Mit den Bezeichnungen der Figur 227 berechnet man nach der zweiten Guldin'schen Regel das Volumen des Umdrehungsparaboloides

$$V = \frac{2}{3} ab \,.\, 2\pi \,.\, \frac{3}{8} b = \frac{1}{2} \pi ab^2,$$

welcher Ausdruck mit dem auf p. 352 gefundenen übereinstimmt.

3) Die Schwerpunkte des Bogens und der Fläche eines Halbkreises sollen mit Hülfe der Guldin'schen Regeln berechnet werden.

Wenn der Halbkreis sich um seinen Durchmesser dreht, so entsteht ein Körper von bekannter Fläche und be-

kanntem Rauminhalte, nämlich eine Kugel. Vermittelst der Formel (218) berechnet man den Abstand ζ des Schwerpunktes des Halbkreisbogens von dem Durchmesser:

$$\xi = \frac{4\pi r^2}{2\pi \cdot \pi r} = \frac{2}{\pi} r.$$

Ähnlich erhält man für die Halbkreisfläche

$$\xi = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r.$$

(Vergl. die Ausdrücke auch p. 338 und 346).

§ 70.

Übungsaufgaben zur Lehre vom Schwerpunkte.

1) Auf einer Geraden liegt eine Punktreihe, welche sich nach der einen Richtung in's Unendliche erstreckt. Der Abstand zweier auf einander folgender Punkte ist constant. In dem ersten Punkte befindet sich die Masse m, in dem zweiten die Masse $\frac{m}{2}$, in dem dritten die Masse $\frac{m}{4}$ u. s. w., in dem n:ten Punkte die Masse $\frac{m}{2^{n-1}}$. Der Massenmittelpunkt des Systemes sei zu bestimmen.

2) Ein Punkt wird von n gegebenen Punkten im Raume mit Kräften angezogen, welche proportional der Entfernung sind. Man beweise, dass die Resultirende durch den Schwerpunkt der n Punkte geht und berechne ihre Grösse.

3) Man bestimme die Schwerpunkte des Bogens und der Fläche eines Kreisquadranten und eines Kreissextanten.

4) Der Schwerpunkt eines Kreissegmentes soll bestimmt werden.

5) Man bestimme die Schwerpunkte der Flächen einer Halbellipse und eines Ellipsenquadranten.

6) Wo liegt der Schwerpunkt einer Fläche, welche zwei Radien aus einem Kreisringe ausschneiden?

7) Aus einer Kreisscheibe wird eine Anzahl kreisförmiger Löcher ausgeschnitten. Wie findet man den Schwerpunkt?

8) Über den Seiten eines Dreieckes werden Quadrate gezeichnet. Durch Verbindung der Mittelpunkte dieser Quadrate entsteht ein

neues Dreieck. Man beweise, dass beide Dreiecke einen gemeinsamen Schwerpunkt besitzen.

9) Eine geradlinige Strecke ist in solcher Weise mit Masse belegt, dass die Dichte gleichförmig von dem Werte 0 an einem Ende bis zu dem Werte ϱ am anderen Ende zunimmt. Man bestimme den Schwerpunkt der Strecke.

10) Der Schwerpunkt einer Halbkreisfläche soll bestimmt werden, wenn die Dichte proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte wächst.

11) Der Abstand des Schwerpunktes eines Tetraeders von einer Seitenfläche soll mit Benützung des bekannten Resultates ermittelt werden, dass man aus drei Tetraedern mit gleich grossem Rauminhalte ein Prisma bilden kann.

12) Man berechne die Lage des Schwerpunktes eines Tetraeders auf einer Schwerlinie dadurch, dass man die Masse des ganzen Tetraeders in zweckmässiger Weise längs der Schwerlinie ausbreitet.

13) Wie findet man den Schwerpunkt eines beliebigen Polyeders?

14) Man bestimme die Schwerpunkte der abgestumpften Pyramide und des abgestumpften Kegels.

15) Man berechne die Lage des Schwerpunktes eines Kugelsegmentes.

16) Zwei concentrische Kugeln werden durch einen Kreiskegel mit der Spitze im Mittelpunkte der Kugel geschnitten. Zu bestimmen sei der Schwerpunkt des zwischen den beiden Kugelflächen liegenden kegelförmigen Körpers.

17) Es sollen die Ausdrücke für die Polarcoordinaten des Schwerpunktes einer ebenen Fläche abgeleitet werden.

18) Schwerpunkt eines Kugeloctanten.

19) Schwerpunkt eines Ellipsoidoctanten.

20) Man soll den Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen Kreiscylinders ermitteln.

21) Ein Halbkreis dreht sich um eine seinem Durchmesser parallele Axe. Man berechne die Fläche und das Volumen des entstehenden Ringes.

22) Die krumme Oberfläche einer Kuppel wird durch die Drehung eines Kreisbogens

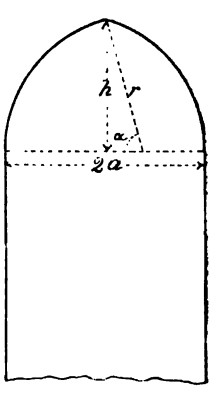


Fig. 236.

erzeugt (Fig. 236). Es sollen mit Hülfe der G u l d i n'schen Regeln die Fläche und der Rauminhalt der Kuppel berechnet werden, wenn die Höhe h und der Radius a der Grundfläche bekannt sind. Es empfiehlt sich an Stelle dieser Constanten den Radius r und den Centriwinkel α des Kreisbogens einzuführen. Speciell nehme man in den allgemeinen Formeln $\alpha = 60°$.

Achter Abschnitt.

Gleichgewicht unterstützter Körper.

§ 71.

Gleichgewicht eines Körpers mit einem Unterstützungspunkte.

Reactionen.

Wenn ein Körper, auf welchen gegebene äussere Kräfte wirken, in einem oder mehreren Punkten, längs eines Stückes einer Linie oder einer Fläche unterstützt ist, so entstehen im allgemeinen in den Stützpunkten gewisse Widerstandskräfte oder Reactionen, welche zunächst unbekannt sind. Um die Bedingungen des Gleichgewichtes des Körpers und zugleich die Reactionen zu finden, vorausgesetzt dass es möglich ist, denkt man sich den Körper frei, bringt die unbekannten Reactionen als äussere Kräfte an und wendet auf das so erhaltene Kräftesystem die Gleichgewichtsbedingungen für einen freien starren Körper an.

Gleichgewichtsbedingungen.

Wenn der Körper nur einen festen Unterstützungspunkt O besitzt (Fig.

Fig. 237.

237), so führt man den unbekannten Druck Q auf den Körper in diesem Punkte ein. Es seien die äusseren Kräfte

$$P_1 P_2 \ldots P_n$$

mit den Richtungswinkeln bez.

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \quad \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots \alpha_n \beta_n \gamma_n;$$

die Coordinaten der Angriffspunkte seien

$$x_1 y_1 z_1 \quad x_2 y_2 z_2 \ldots x_n y_n z_n$$

in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit O als Anfangspunkt. Es seien ferner Q_x, Q_y, Q_z die Componenten der Kraft Q nach denselben Axen. Durch Anwendung der sechs Gleichgewichtsbedingungen (176) auf die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ und Q erhält man jetzt die Gleichungen

$$(220) \quad \begin{aligned} \Sigma(P\cos\alpha) + Q_x &= 0, \\ \Sigma(P\cos\beta) + Q_y &= 0, \\ \Sigma(P\cos\gamma) + Q_z &= 0. \\ \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) &= 0, \\ \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) &= 0, \\ \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Die drei ersten Gleichungen liefern den Druck Q, und zwar ergiebt sich

$$(221) \quad \begin{aligned} Q_x &= -R_x, \\ Q_y &= -R_y, \\ Q_z &= -R_z, \end{aligned}$$

wo R_x, R_y, R_z die Componenten der Resultirenden R der Kräfte P sind. Der Druck Q ist gleich und entgegengesetzt R. Die drei letzteren Gleichungen (220) drücken die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper mit einem festen Punkte aus. *Es müssen die Summen der Momente der äusseren Kräfte in Bezug*

auf drei zu einander senkrechten Axen durch den festen Punkt gleich Null sein. Man kann diese Bedingungen auch so ausdrücken, dass bei der Reduction der Kräfte P auf den Punkt O kein resultirendes Kräftepaar entstehen darf.

Die Schwere als einzige Kraft.

Wenn die Schwerkraft die einzige wirkende Kraft ist, so ist die Resultirende aller äusseren Kräfte die im Schwerpunkte S des Körpers wirkende Schwere G. Damit ihre Momente in Bezug auf drei Coordinatenaxen durch O gleich Null seien, muss die Kraft durch O gehen, d. h. *beim Gleichgewichte liegt der Schwerpunkt auf der Verticalen durch den Unterstützungspunkt.*

Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht.

Wenn man den Körper sehr wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt, so bilden die Schwere G und die mit ihr gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Reaction Q im Punkte O ein Kräftepaar, welches den Körper entweder nach der Gleichgewichtslage zurück zu drehen oder noch mehr von derselben zu entfernen sucht; es kann auch der Fall vorkommen, dass das Gleichgewicht nach der Verrückung fortdauert. Hieraus ergeben sich folgende drei Definitionen, welche nicht nur für einen in einem Punkte unterstützen Körper gelten, sondern eine allgemeine Bedeutung haben.

Das Gleichgewicht heisst stabil, wenn der Körper nach einer kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage nach derselben zurückzukehren sucht (Fig. 238 *I*).

Das Gleichgewicht heisst labil, wenn der Körper nach einer kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage sich noch mehr von derselben zu entfernen sucht (Fig. 238 *II*).

Das Gleichgewicht heisst indifferent, wenn es nach einer kleinen Verrückung des Körpers aus der Gleichgewichtslage fortbesteht (Fig. 238 *III*).

Wenn die Schwere G die einzige Kraft ist, so muss der Schwerpunkt in dem Falle *I* unterhalb, in dem Falle *II* oberhalb des festen Punktes liegen; in dem Falle *III* müssen beide Punkte zusammenfallen.

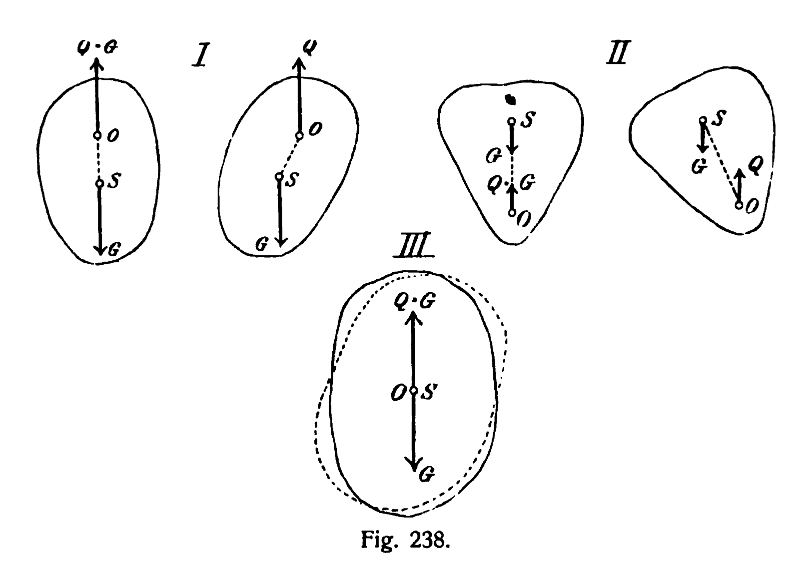


Fig. 238.

Experimentelle Schwerpunktsbestimmung.

Wenn der Schwerpunkt eines Körpers durch Rechnung nur mit Schwierigkeit bestimmt werden kann, so empfiehlt es sich ihn experimentell zu bestimmen. Man hängt den Körper nach einander an zwei verschiedenen Punkten auf und markirt in beiden Lagen die Verticale durch den Aufhängepunkt. Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

Körper mit einem Stützpunkte in einer Horizontalebene.

Ein anderes Beispiel eines in einem Punkte unterstützten Körpers bietet ein Körper dar, welcher mit einer convexen Fläche auf einer ebenen horizontalen Unterlage ruht. Der Unterstützungspunkt ist nicht fest, sondern kann sich in der Unterstützungsebene verschieben. Wenn die Schwerkraft allein wirkt, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes, dass der Schwerpunkt auf der Verticalen des Unterstützungspunktes liege. Auch in diesem Falle kommen die drei verschiedenen Arten des Gleichgewichtes in Betracht und werden durch das Verhalten des Körpers nach einer kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage erkannt.

Beispielsweise befindet sich ein homogener Körper,

welcher aus einer Halbkugel und einem Kegel besteht (Fig. 239), im Gleichgewichte auf einer festen horizontalen Unterlage, wenn seine Axe vertical ist. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn der Schwerpunkt des Körpers innerhalb der Halbkugel (*I*), labil, wenn er innerhalb des Kegels liegt (*II*), und indifferent, wenn er mit dem Mittelpunkte der Kugelfläche zusammenfällt (*III*). In dem letzten Falle berechnet man die Höhe h des Kegels aus

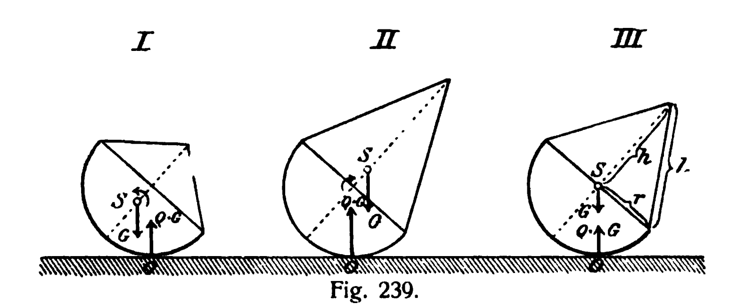


Fig. 239.

einer Gleichung, welche ausdrückt, dass die Halbkugel und der Kegel gleich grosse Momente in Bezug auf ihre gemeinsame Grundfläche liefern, d. h. aus der Gleichung

$$\frac{2\pi r^3}{3}\cdot\frac{3}{8}\,r = \frac{\pi r^2 h}{3}\cdot\frac{h}{4}.$$

Man erhält

(222) $$h = r\sqrt{3}$$

und findet für die Kantenlänge l des Kegels

(223) $$l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2r,$$

d. h. bei indifferentem Gleichgewichte ist der Meridianschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck. Mit $h < r\sqrt{3}$ ist das Gleichgewicht stabil, mitt $h > r\sqrt{3}$ nicht stabil.

Wenn der in einem Punkte einer Ebene unterstützte Körper kein Umdrehungskörper ist, dessen Axe in der

Gleichgewichtslage durch den Stützpunkt geht, so muss man auch auf die verschiedenen Drehungsrichtungen Rücksicht nehmen, nach welchen der Schwerpunkt sich aus der Gleichgewichtslage entfernen kann. Es giebt dabei eine besondere Stabilität in Bezug auf eine Drehung des Schwerpunktes aus jeder Verticalebene heraus; während das Gleichgewicht in Bezug auf eine Ebene oder Drehung stabil ist, kann es in Bezug auf eine andere labil sein. Dies ist z. B. der Fall bei der halbkreisförmigen Scheibe mit abgerundeten Kanten in der Figur 240. Es besteht Stabilität in Bezug auf eine Drehung um eine auf den Seitenebenen der Scheibe senkrechte Axe, nicht aber in Bezug auf eine zu diesen Ebenen parallele Axe.

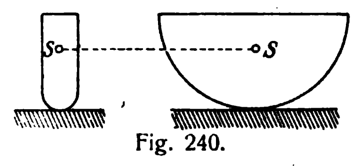


Fig. 240.

Körper mit einer Stützaxe.

Wenn es sich um eine bestimmte Drehungsebene handelt, so sind die vorigen Untersuchungen auch auf Körper anwendbar, welche eine zu dieser Ebene senkrechte feste Axe oder eine gerade Stützlinie besitzen. Es stelle z. B. die Figur 239 den Durchschnitt eines cylindrischen Körpers mit ortogonal abgeschnittenen Endflächen dar. Als Bedingung des indifferenten Gleichgewichtes erhält man dabei

$$\frac{\pi r^2}{2} \frac{4r}{3\pi} = rh \frac{h}{3},$$

d. ist

(224) $$h = r\sqrt{2}.$$

Für ein kleineres h ist das Gleichgewicht stabil, für ein grösseres labil.

§ 72.

Gleichgewicht eines in zwei Punkten unterstützten Körpers.

Wenn ein Körper zwei feste Punkte A und B hat (Fig. 241), so kann er sich nur um die durch die beiden

Punkte gehende Axe drehen. Bei der Reduction der Kräfte wähle man den einen festen Punkt, z. B. A zum Reductionspunkte, ausserdem zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive z-Axe durch den Punkt B gelegt werde. Die äusseren Kräfte seien $P_1, P_2 \ldots P_n$; ihre Richtungswinkel und Angriffspunkte mögen wie in § 71 bezeichnet werden. Im Punkte

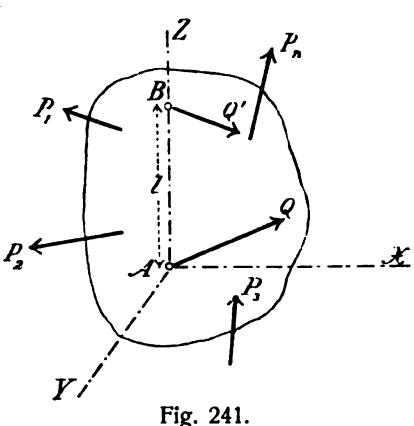


Fig. 241.

A wirkt eine Reaction Q mit den Componenten Q_x, Q_y und Q_z, im Punkte B eine Reaction Q' mit den Componenten Q_x', Q_y' und Q_z' nach den drei Coordinatenaxen. Der Abstand der beiden Punkte A und B sei l. Damit die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$, Q und Q' sich das Gleichgewicht halten, müssen die Projectionsgleichungen

$$Q_x + Q_x' + \Sigma(P \cos \alpha) = 0,$$
$$Q_y + Q_z' + \Sigma(P \cos \beta) = 0,$$
$$Q_z + Q_z' + \Sigma(P \cos \gamma) = 0$$

und die Momentengleichungen

$$- Q_y' l + \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$
$$Q_x' l + \Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0,$$
$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0$$

erfüllt sein.

Gleichgewichtsbedingung.

Die letzte Gleichung enthält die unbekannten Reactionen in den Stützpunkten nicht und drückt deshalb die einzige erforderliche Gleichgewichtsbedingung aus, nämlich:

Zum Gleichgewichte eines starren Körpers mit zwei festen Stützpunkten muss die Summe der statischen Mo-

mente der äusseren Kräfte in Bezug auf die durch die beiden Punkte geführte Axe gleich Null sein.

Die fünf übrigen Gleichungen liefern die Reactionen Q und Q' in den festen Stützpunkten, aber nicht vollständig, weil zur Bestimmung dieser Kräfte sechs Gleichungen notwendig wären. Man erhält

$$(225)\quad \begin{aligned} Q_x &= \frac{\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma)}{l} - \Sigma(P \cos \alpha), \\ Q_y &= -\frac{\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta)}{l} - \Sigma(P \cos \beta), \\ Q_x' &= -\frac{\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma)}{l}, \\ Q_y' &= \frac{\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta)}{l} \end{aligned}$$

und

$$(226)\quad Q_z + Q_z' = -\Sigma(P \cos \gamma).$$

Somit werden nur die zur Axe AB senkrechten Componenten von Q und Q' völlig bestimmt; was die in der Richtung dieser Axe selbst wirkenden Componenten betrifft, so erhält man nur ihre Summe.

In der Wirklichkeit giebt es natürlich eine bestimmte Verteilung der Summe $-\Sigma(P \cos \gamma)$ auf die beiden Componenten Q_z und Q_z'. Diese Verteilung kann von der Art der Befestigung abhängig sein; wenn diese so beschaffen ist, dass in dem einen Stützpunkte die Reaction senkrecht zur Axe AB sein muss, so ist die in die Axe fallende Componente Q_z oder Q_z' gleich Null und die andere axiale Componente völlig bestimmt. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass das Problem erst dann lösbar wird, wenn man den Körper nicht als starr, sondern als elastisch betrachtet. (Siehe § 1, II).

Die Kräfte Q und Q' liefern eine Kraft, welche längs der Axe AB wirkt, eine zu dieser Axe senkrechte Kraft

z. B. in dem Punkte A, und ein Kräftepaar in einer durch AB gehenden Ebene. Nimmt man diese Kräfte und das Kräftepaar im entgegengesetzten Sinne, so erhält man ein dem System der äusseren Kräfte P äquivalentes System. Diese Kräfte erzeugen also einen Druck längs der Axe, einen Druck senkrecht zur Axe und eine durch das Kräftepaar verursachte Biegung der Axe.

Die Schwere als einzige Kraft.

Wenn nur die Schwerkraft G im Schwerpunkte S auf den in A und B unterstützten Körper wirkt, so ergiebt sich ein Moment der Kraft G in Bezug auf die Axe AB, wenn G die Axe nicht schneidet oder ihr parallel ist. Die Bedingung des Gleichgewichtes eines schweren Körpers mit zwei festen Punkten ist also, dass der Schwerpunkt in einer durch diese beiden Punkte geführten Verticalebene liegen muss. Es werde zuerst vorausgesetzt, dass die Axe AB nicht vertical sei (Fig. 242). Man sieht dann ohne weiteres ein, dass das Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent ist, je nachdem der Schwerpunkt S unterhalb der Axe AB, oder oberhalb derselben oder auf ihr selbst liegt. Um die Reactionen in A und B zu bestimmen, zerlegt man G in zwei Componenten, und zwar in $G \cos\gamma$ parallel der Axe AB und $G \sin\gamma$ senkrecht dazu. Die erstere ist gleich dem Drucke längs der Axe. Die zur Axe AB normalen Componenten N und N' der Drücke in den Punkten A und B werden mit Hülfe einer Momentengleichung mit B oder A als Pol berechnet. Mit den Bezeichnungen in der Figur findet man

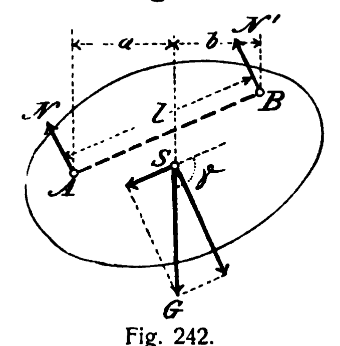


Fig. 242.

$$N = \frac{b}{l} G; \quad N' = \frac{a}{l} G.$$

Wenn die Axe AB vertical ist, so besteht immer Gleichgewicht, und zwar ein indifferentes. Dieser Fall kommt z. B. bei der in der Fig. 243 abgebildeten Thür vor. Die Thür ist in jeder Lage im Gleichgewicht. Die Schwerkraft G und der damit gleich grosse Gegendruck (G) längs der Verticalen AB bilden ein Kräftepaar, welchem ein aus den normalen Drücken in den Charnieren A und B gebildetes Kräftepaar das Gleichgewicht halten muss. Bezeichnet man die beiden gleichen Drücke mit N, so erhält man

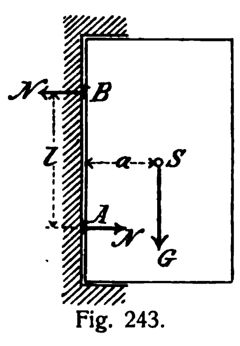


Fig. 243.

$$N = \frac{a}{l} G.$$

Es hängt von der Construction der Charniere ab, wie sich das Gewicht G auf dieselben verteilt. So kann z. B. die Thür nur auf dem einen Charnier ruhen, oder auf beide gleich stark drücken u. s. w.

Parallele horizontale Stützkanten.

Wenn ein Körper, auf den seine Schwere und verticale Belastungen wirken, mit zwei glatten horizontalen Stützflächen auf zwei parallelen geradlinigen Kanten ruht, so besteht Gleichgewicht und es entstehen verticale Reactionen in den Kanten (Fig. 244). Man erhält diese Reactionen durch Zerlegung des Kräftesystemes in zwei durch die Kanten gehende parallele Componenten. Beispiele hierzu sind die in den §§ 56 und 57 betrachteten belasteten Balken.

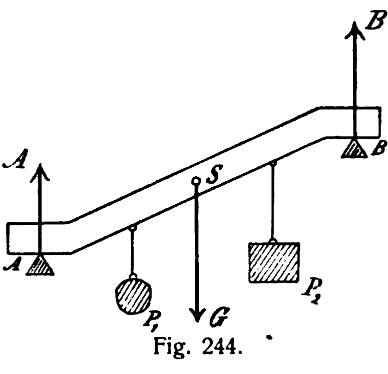


Fig. 244.

Ein Körper sei in zwei Punkten unterstützt, welche schiefen glatten Ebenen angehören (Fig. 245). Es werde

ferner vorausgesetzt, dass alle Kräfte in einer Normalebene zu der horizontalen Schnittlinie beider Ebenen liegen. In den Stützpunkten entstehen Drücke N_1 und N_2 senkrecht zu den beiden Stützebenen; sie schneiden sich in einem Punkte D. Damit Gleichgewicht bestehe, müssen die äusseren Kräfte eine Resultirende ergeben, welche durch den Punkt D geht. Die Drücke N_1 und N_2 werden mit Hülfe eines Kräftedreiecks construirt oder auch vermittelst der Gleichgewichtsbedingungen für drei Kräfte in derselben Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte berechnet (siehe p. 180). Die Figur 245 stellt den Fall dar, in welchem die Schwere des Körpers die einzige äussere Kraft ist; im Falle des Gleichgewichts muss der Schwerpunkt S auf der Verticalen durch D liegen.

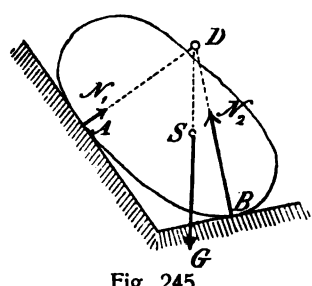


Fig. 245.

Anwendungen.

1) Ein schwerer, homogener Stab von constantem Querschnitt ist am unteren Ende befestigt, während das obere Ende von einer verticalen glatten Ebene unterstützt wird. Die Reactionen in den Stützpunkten sollen bestimmt werden (Fig. 246).

Der Stab befinde sich in einer zur Stützebene senkrechten Verticalebene; seine Länge sei l und sein Gewicht sei G. Die horizontale Componente des Druckes in dem unteren Stützpunkte A werde mit H, die verticale Componente mit N_1 bezeichnet, während N_2 der horizontale Druck in dem oberen Stützpunkte B sei. Die vier in einer Ebene liegenden Kräfte G, H, N_1 und N_2 halten sich das Gleichgewicht. Durch Projection auf die horizontale und die verticale Richtung ergiebt sich

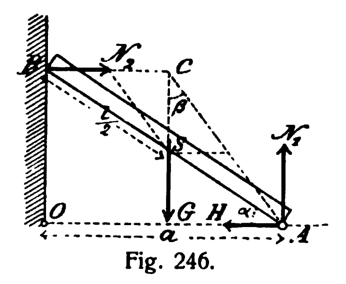


Fig. 246.

$$N_2 - H = 0,$$
$$N_1 - G = 0,$$

während eine Momentengleichung mit A als Pol

$$N_2\sqrt{l^2-a^2}-G\frac{a}{2}=0$$

liefert. Für die Reactionen folgt hieraus

$$N_1=G;\ N_2=H=\frac{a}{2\sqrt{l^2-a^2}}\,G$$

oder auch

$$N_2=\frac{1}{2}\cot\alpha\,.\,G,$$

wo α der Winkel des Stabes mit der Horizontalebene ist.

Graphisch löst man die Aufgabe so, dass man G nach den Richtungen CB und CA zerlegt, und dann die horizontale und verticale Componente der auf CA fallenden Kraft bildet. Die Figur liefert

$$N_1=G,$$
$$N_2=H=G\operatorname{tg}\beta.$$

Weil ferner

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\frac{1}{2}AO}{BO}=\frac{1}{2}\cot\alpha$$

ist, so wird

$$N_2=H=\frac{1}{2}\cot\alpha\,.\,G.$$

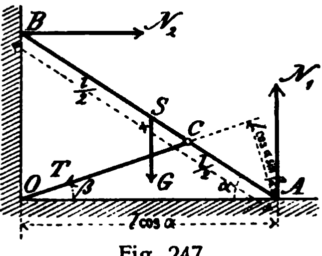


Fig. 247.

2) Ein schwerer, homogener und überall gleich dicker Stab AB ruht mit dem einen Ende auf einer glatten Horizontalebene, mit dem andern Ende auf einer glatten Verticalebene. In einem Punkte C wird der Stab durch ein Seil festgehalten, welches durch die Schnittlinie der beiden Ebenen geht (Fig. 247). Der Stab und das Seil liegen in einer Normalebene zu dieser Schnittlinie. Die Reactionen in den Stützpunkten und die Spannung des Seiles sollen bestimmt werden.

Mit den Bezeichnungen der Figur liefern die beiden Projectionsgleichungen und die Momentengleichung für A als Pol

$$N_2-T\cos\beta=0,$$
$$N_1-G-T\sin\beta=0,$$

$$-G\frac{l}{2}\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha - Tl\cos\alpha\sin\beta = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen in Bezug auf T, N_1 und N_2 findet man

$$T = \frac{\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)} G,$$

$$N_1 = G + T\sin\beta,$$

$$N_2 = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)} G.$$

Dieselbe Aufgabe kann auch graphisch gelöst werden (Fig. 248). Es müssen N_1 und N_2 zusammen eine Kraft R, G und T zusammen die gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kraft (R) geben. Beide liegen auf einer Geraden, welche durch die beiden Schnittpunkte bestimmt ist. Aus den schraffirten ähnlichen Dreiecken in der Figur findet man

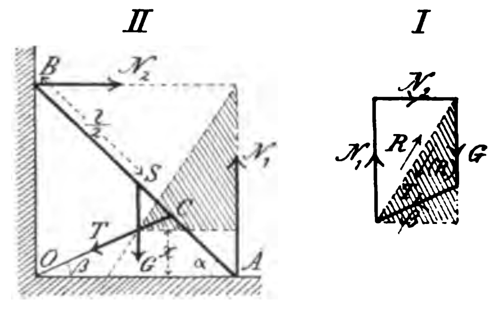


Fig. 248.

$$N_2 = T\cos\beta,$$

$$N_1 = G + T\sin\beta.$$

$$x = \frac{l}{2}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

$$\frac{T\cos\beta}{G + T\sin\beta} = \frac{\frac{l}{2}\cos\alpha}{l\sin\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

und erhält hieraus wieder

$$T = \frac{\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)} G.$$

Die Figuren I und II können als Kräfte- und Seilpolygon des von T, N_1 und N_2 gebildeten Kräftesystemes aufgefasst werden, dessen Resultirende G ist. Der Schnittpunkt von N_2 und G ist der Pol des Kräftepolygons.

Die Construction ist übrigens dieselbe wie die auf p. 272 angegebene Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungslinien.

Rad an einer Welle. 3) Das Rad an der Welle. Wann findet Gleichgewicht statt und welche sind die Reactionen in den Lagern?

Bezeichnet man den Radius der Welle mit r, den Radius des Rades mit R, die verticale Last mit Q, die in einer Verticalebene wirkende Kraft mit P und ihre Neigung gegen die Verticale mit α (Fig. 249), die Länge der Welle zwischen den Lagern mit l und die Längen ihrer drei Abteilungen mit a, b und c, so findet man mit

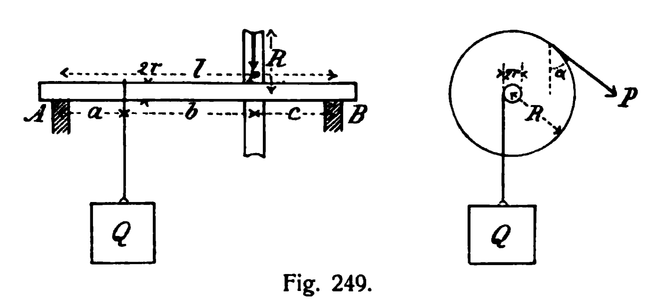


Fig. 249.

Hülfe der Momentengleichung in Bezug auf die Axe der Welle die Gleichgewichtsbedingung

$$Qr = PR$$

oder

$$P = \frac{r}{R} Q.$$

Die Lagerdrücke haben eine horizontale und eine verticale Componente. Man erhält die horizontalen Componenten auf die Weise, dass man die horizontale Componente $P \sin\alpha$ von P in zwei ihr parallele Componenten durch die Stützpunkte zerlegt, und zwar sind sie

$$\frac{c}{l} P \sin\alpha \text{ in } A \text{ und } \frac{a+b}{l} P \sin\alpha \text{ in } B.$$

Die Verticalcomponenten werden durch Zerlegung von Q und $P\cos\alpha$ erhalten. Sie sind

$$\frac{b+c}{l} Q + \frac{c}{l} P \cos\alpha \text{ und } \frac{a}{l} Q + \frac{a+b}{l} P \cos\alpha$$

bez. in A und B.

§ 73.

Körper mit drei oder mehreren Stützpunkten in derselben Ebene. Stabilität.

Körper mit drei Stützpunkten.

Wenn ein Körper, auf welchen die Schwere allein wirkt, drei Stützpunkte in derselben Horizontalebene besitzt, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, dass die Verticale durch den Schwerpunkt die Ebene innerhalb des von den Stützpunkten gebildeten Dreieckes trifft. Ist die Ebene völlig glatt, so sind die Gegendrücke in den Stützpunkten vertical und werden am einfachsten dadurch berechnet, dass man die Momente der Kräfte in Bezug auf die drei in der Ebene liegenden Axen nimmt, welche je zwei Stützpunkte mit einander verbinden. So erhält man z. B. bei dem Tische mit drei Füssen (Fig. 250) den Druck N_1 vermittelst der Momentengleichung in Bezug auf die Axe BC

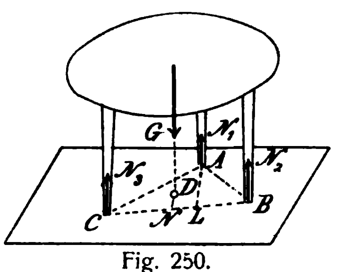


Fig. 250.

$$N_1 . LA = G . ND;$$

d. h.

$$N_1 = \frac{ND}{LA} G. \tag{227}$$

Ähnlich werden die beiden anderen Drücke berechnet.

Körper mit mehreren Stützpunkten. Stützfläche.

Wenn ein Körper in mehr als drei Punkten einer Horizontalebene oder in einer ebenen Fläche unterstützt wird, so sind die Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper nicht mehr genügend zur Berechnung der einzelnen Reactionen oder der Verteilung des Druckes auf die Unterstützungsfläche. Man kennt nur ihre Resultirende, welche gleich und entgegengesetzt dem Gewichte des Körpers ist. Zum Gleichgewichte ist erforderlich,

dass die Verticale durch den Schwerpunkt das Polygon trifft, dessen Ecken die Unterstützungspunkte sind.

Stabilitätsmoment. Das Product aus dem Gewichte G eines Körpers, welcher auf einer horizontalen Ebene ruht, und dem Abstande der Verticalen durch den Schwerpunkt und einer Kante in der Unterstützungsebene wird Stabilitätsmoment in Bezug auf die betreffende Kante genannt. Beispielsweise ist $G.ND$ in der Figur 250 ein Stabilitätsmoment. Um den Körper aus der Gleichgewichtslage durch eine Drehung um die betreffende als fest gedachte Kante zu verrücken, muss man eine Kraft P anbringen, deren Moment in Bezug auf dieselbe Kante numerisch grösser als das Stabilitätsmoment ist und das entgegengesetzte Zeichen hat (Fig. 251). Die Möglichkeit einer Verschiebung des Körpers längs der Unterlage wird hier nicht betrachtet. Wenn die Kraft P in einer Normalebene zur Kante liegt, so ist im Falle des Gleichgewichts

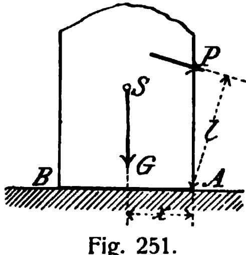


Fig. 251.

$$Pl = Gx.$$

Das Stabilitätsmoment ist im allgemeinen verschieden in Bezug auf verschiedene Axen. Wird die Axe nicht besonders angegeben, so ist das kleinste der vorkommenden Stabilitätsmomente gemeint.

Dynamische Stabilität. Wenn der Körper sich dreht, so wird eine mechanische Arbeit verrichtet, welche gleich und entgegengesetzt der Arbeit der Schwere ist. Man nennt dynamische Stabilität diejenige Arbeit, welche verbraucht wird, um den Körper durch die Drehung in die nächste labile Gleichgewichtslage zu bringen, d. h. seinen Schwerpunkt zu heben, bis er lotrecht über der Kante steht. Die dynamische Stabilität ist somit gleich dem Producte aus der Schwerkraft und der Hebung des Schwerpunktes.

Das Stabilitätsmoment und die dynamische Stabilität sind beide das Product aus einer Kraft und einer Länge; ihre Einheiten sind also dieselben wie die Einheit der Arbeit, z. B. kgm.

Anwendungen.

1) Wenn die Anzahl der Stützpunkte eines Körpers in einer glatten Horizontalebene grösser als drei ist, so müssen zur Bestimmung der Drücke in den Stützpunkten ausser den Gleichgewichtsbedingungen noch andere Gleichungen zu Hülfe gezogen werden, welche meistens von der Elasticität des Körpers und der Unterlage abhängen. Als Beispiel sollen die Drücke in den Füssen eines Tisches mit vier Füssen, welche ein Rechteck bilden, berechnet werden, wenn der Tisch in irgend einer Weise belastet ist (Fig. 252). Es seien B_1, B_2, B_3 und B_4 die vier Stützpunkte mit den Coordinaten bez. (a, b), $(a, -b)$, $(-a, -b)$ und $(-a, b)$ in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ihrer Ebene, N_1, N_2, N_3 und N_4 die Drücke der Unterlage auf die Füsse und zwar positiv nach oben gerechnet, G das ganze Gewicht des Tisches und seiner Belastung, (x, y) der Punkt, in welchem die Richtungslinie von G die Unterlage trifft.

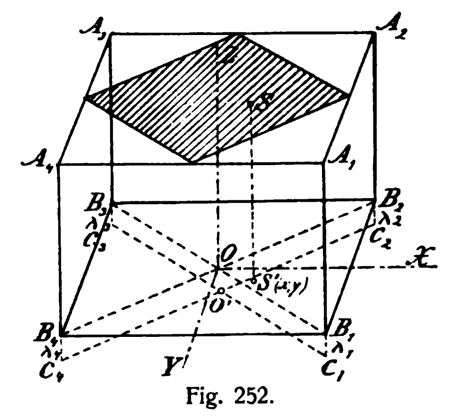


Fig. 252.

N_1, N_2, N_3 und N_4 bilden ein System paralleler Kräfte im Raume, welche den drei Gleichgewichtsbedingungen

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = G,$$
$$N_1 b - N_2 b - N_3 b + N_4 b = Gy,$$
$$-N_1 a - N_2 a + N_3 a + N_4 a = -Gx$$

genügen müssen. Es ist aber noch eine vierte Gleichung erforderlich. Um sie aufzustellen, soll hier die Annahme gemacht werden, dass die horizontale Unterlage nicht absolut starr sei, sondern den Drücken so nachgebe, dass sie sich bei B_1, B_2, B_3 und B_4 um die kleinen den Drücken proportionalen Beträge λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4

senkt, während sie eben bleibt. Nach dieser hier ohne nähere Begründung gemachten Annahme würde man

$$\frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{N_2}{\lambda_2} = \frac{N_3}{\lambda_3} = \frac{N_4}{\lambda_4}$$

und die Senkung des Mittelpunktes O gleich

$$OO' = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} = \frac{\lambda_2 + \lambda_4}{2}$$

erhalten. Ferner würde als vierte Gleichung

$$N_1 - N_2 + N_3 - N_4 = 0$$

sich ergeben. Nunmehr würde man durch Auflösung der Gleichungen die Werte

$$N_1 = \frac{G}{4}\left\{1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}; \quad N_2 = \frac{G}{4}\left\{1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right\},$$

$$N_3 = \frac{G}{4}\left\{1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right\}; \quad N_4 = \frac{G}{4}\left\{1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}$$

erhalten. Diese Werte müssen positiv sein; die Bedingung hierfür ist, das G das Parallelogramm trifft, dessen Ecken die Halbirungspunkte der Seiten des Rechteckes $B_1B_2B_3B_4$ sind.

Wenn G das Rechteck z. B. nahe an B_1, nicht aber das genannte Parallelogramm trifft, so kann man annehmen, dass der Fuss A_3B_3 keinen Druck erfährt. Das Problem ist dann mit dem auf p. 373. behandelten Probleme der drei Stützpunkte identisch.

2) Man berechne das Stabilitätsmoment und die dynamische Stabilität eines rechtwinkligen parallelepipedischen Granitblockes mit den Kanten der Grundfläche

$$a = 1.5 \text{ m}, \quad b = 0.6 \text{ m}$$

und der Höhe

$$h = 0.8 \text{ m},$$

wenn das specifische Gewicht des Granites

$$\gamma = 2.75 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

beträgt (Fig. 253).

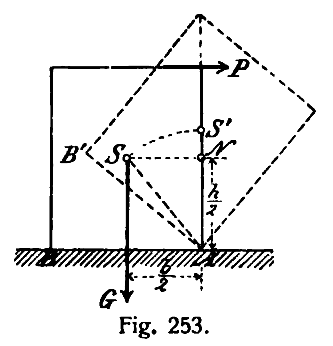


Fig. 253.

Es ergiebt sich

$$G = \gamma abh,$$

$$x = \frac{b}{2}$$

und das Stabilitätsmoment ist

$$Gx = \gamma abh \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\gamma ab^2h.$$

Der Abstand zwischen der Kante A und der höchsten Lage des Schwerpunktes S' ist

$$AS = AS' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2},$$

die Hebung desselben im verticalen Sinne also

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{b^2+h^2} - h\right\}.$$

Für die dynamische Stabilität findet man somit

$$G \cdot NS' = \gamma abh\frac{1}{2}\left\{\sqrt{b^2+h^2} - h\right\}.$$

Setzt man die numerischen Werte ein, so wird

$$G = 1.98 \text{ t},$$

das Stabilitätsmoment

$$Gx = 0.594 \text{ t m} = 594 \text{ kg m};$$

ferner

$$NS' = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{0.6^2+0.8^2} - 0.8\right\} = 0.1 \text{ m}$$

und die dynamische Stabilität

$$0.198 \text{ t m} = 198 \text{ kg m}.$$

Um den Block um die Kante A herum zu kippen, braucht man im ersten Augenblicke, um ihn in Bewegung zu setzen, eine an der oberen Kante senkrecht wirkende Kraft

$$P = \frac{Gx}{h} = \frac{0.594}{0.8} = 0.7425 \text{ t} = 742.5 \text{ kg}.$$

3) Wie stark muss der Winddruck auf eine verticale Ziegelmauer sein, damit die Mauer umstürze?

Es seien h die Höhe, s die Dicke der Mauer, γ das specifische Gewicht der Mauer, p der gesuchte auf der Mauerfläche senkrechte Druck pro Flächeneinheit. Nimmt man ein Stück der Mauer von der Länge 1 und drückt die Bedingung aus, dass die Momente des Winddruckes und der Schwere in Bezug auf die eine untere Mauerkante gleich gross seien, so findet man

$$\gamma s h \frac{s}{2} = p h \frac{h}{2}$$

und also

$$p = \gamma \frac{s^2}{h}.$$

Mit den Werten $h = 10$ m, $s = 0.6$ m, $\gamma = 1.6 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ wird

$$p = 0.0576 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 57.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

4) Man berechne das Stabilitätsmoment einer homogenen Mauer, deren Durchschnitt ein Paralleltrapez ist, in Bezug auf das Kippen nach innen oder nach aussen.

§ 74.

Gleichgewicht von Systemen mit einander verbundener Körper.

System mehrerer Körper. Mehrere Körper können in verschiedener Weise mit einander zu einem System verbunden sein. So kann z. B. ein Körper an einem anderen vermittelst eines Seiles aufgehängt oder mit ihm durch ein Gelenk verbunden sein; oder der Zusammenhang zwischen zwei Körpern kann darin bestehen, dass sie gegen einander gedrückt werden u. s. w. In den Verbindungspunkten oder Gelenken entstehen Kräfte derselben Art wie bei den in den §§ 71 . . 73 betrachteten unterstützten Körpern. Diese inneren Kräfte oder Reactionen kommen paarweise gleich gross und entgegengesetzt gerichtet vor.

Gleichgewichtsbedingungen. Um die Gleichgewichtsbedingungen an einem System von mit einander verbundenen Körpern, auf welche äussere Kräfte wirken, aufzustellen, denkt man sich alle Drücke in den Stützpunkten, an den Verbindungsstellen, Gelenken u. s. w. als äussere Kräfte angebracht, betrachtet jeden Körper für sich und wendet die sechs Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper im Raume (p. 319) an. Wenn das Problem mit Hülfe der Statik lösbar ist, so müssen diese Gleichungen nicht nur die

Gleichgewichtsbedingungen liefern, sondern auch die unbekannten inneren Drücke oder Reactionen ergeben.

Wenn jeder Teil des Systemes im Gleichgewichte ist, so ist das ganze System im Gleichgewichte wie ein einziger starrer Körper; man kann deshalb die Gleichgewichtsbedingungen auf das ganze System anwenden. In dieser Weise erhält man oft Gleichgewichtsbedingungen von sehr zweckmässiger Form, was davon herrührt, dass sämtliche paarweise vorkommenden inneren Drücke in den Gleichungen nicht auftreten.

Anwendungen.

1) Bogenbrücke mit drei Gelenken.

Analytisches Verfahren.

Eine Bogenbrücke mit drei Gelenken besteht aus zwei starren Körpern, welche am Scheitelgelenk mit einander und an den Kämpfergelenken mit den Widerlagern verbunden sind (Fig. 254). Die Axen der drei Gelenke sind einander parallel und horizontal. Die Belastungen der Brücke sind einerseits die Gewichte G_1 und G_2 der

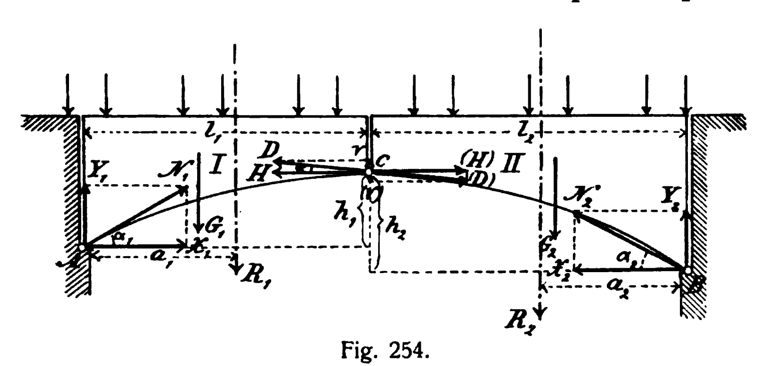


Fig. 254.

beiden Teile, anderseits die Lasten, welche über die Brücke transportirt werden. Alle diese Kräfte werden als in einer Verticalebene liegend gedacht. Das Gleichgewicht ist immer vorhanden; die Aufgabe ist die Bestimmung der Drücke in den Gelenken. Sie seien N_1

in dem Kämpfergelenk A mit der horizontalen Componente $X_1 = N_1 \cos \alpha_1$ und der verticalen Componente $Y_1 = N_1 \sin \alpha_1$, N_2 in dem Gelenk B mit der horizontalen Componente $X_2 = N_2 \cos \alpha_2$ und der verticalen Componente $Y_2 = N_2 \sin \alpha_2$, ferner im Scheitelgelenk die gleich grossen und entgegengesetzten Drücke D und (D) mit den Componenten H und V in horizontaler und verticaler Richtung und dem Neigungswinkel α gegen die Horizontale. Als Unbekannte kann man die sechs Grössen X_1 Y_1, X_2, Y_2, H und V wählen. Am Brückenteile I müssen X_1, Y_1, H und V der Resultirenden R_1 des Gewichtes G_1 und der bekannten zufälligen Belastung das Gleichgewicht halten. Ebenso halten am Teile II X_2, Y_2, (H) und (V) der Resultirenden R_2 von G_2 und der Belastung auf II das Gleichgewicht. Für jeden Teil erhält man drei Gleichgewichtsbedingungen, und zwar sollen zwei Projectionsgleichungen bei horizontaler und verticaler Projectionsaxe und eine Momentengleichung für den Pol im Kämpfergelenke benützt werden. Man findet so am Teile I

$$X_1 - H = 0,$$
$$Y_1 - R_1 + V = 0,$$
$$R_1 a_1 - V l_1 - H h_1 = 0,$$

und am Teile II

$$X_2 - H = 0,$$
$$Y_2 - R_2 - V = 0,$$
$$R_2 a_2 + V l_2 - H h_2 = 0.$$

Durch Auflösung der beiden Momentengleichungen in Bezug auf H und V findet man

$$H = \frac{R_1 a_1 l_2 + R_2 a_2 l_1}{h_1 l_2 + h_2 l_1},$$

$$V = \frac{R_1 a_1 h_2 - R_2 a_2 h_1}{h_1 l_2 + h_2 l_1}.$$

Die übrigen Gleichungen ergeben

$$X_1 = X_2 = H,$$
$$Y_1 = R_1 - V;\ Y_2 = R_2 + V.$$

Sind die Componenten der Reactionen gefunden, so ergeben sich Grösse und Richtung derselben mit Hülfe der Formeln

$$N_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2};\ \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Y_1}{X_1},$$
$$N_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2};\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Y_2}{X_2},$$
$$D = \sqrt{H^2 + V^2};\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}.$$

Wenn die Brücke aus zwei in Bezug auf die Mitte symmetrischen Hälften gebaut ist und symmetrische Belastungen trägt, so vereinfachen sich die Formeln; die Untersuchung dieses Specialfalles soll hier unterbleiben.

Graphische Verfahren.

Die Aufgabe kann auch graphisch gelöst werden. Es sollen zu diesem Zwecke zwei Methoden angeführt werden.

Nach der einen Methode denkt man sich nur den einen Brückenteil I durch R_1 belastet, den anderen unbelastet und sucht die durch R_1 allein hervorgerufenen Reactionen (Fig. 255). Weil die in C angreifende Reaction (D') und die in B angreifende N_2' die einzigen auf den Teil II wirkenden Kräfte sind, so verlangt das Gleichgewicht, dass BC ihre gemeinsame Richtungslinie sei und dass sie gleich gross und entgegengesetzt gerichtet

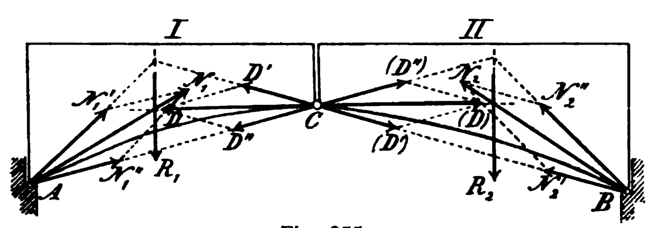


Fig. 255.

seien. Dadurch ist die Richtungslinie der im Gelenk C auf I wirkenden Reaction D' bestimmt. Die andere Reaction N_1' im Punkte A muss durch den Schnittpunkt von D' und R_1 gehen. Es können deshalb jetzt N_1' und D' durch Zerlegung von R_1 vermittelst eines Kräftedreieckes construirt werden. In derselben Weise bestimmt man die von R_2 als einziger Belastung herrührenden Reactionen N_1'', $D'' = N_1''$, (D'') und N_2''. Zuletzt braucht man nur N_1' und N_1'' zu N_1, N_2' und N_2'' zu N_2 sowie D' und D'' zu D zusammenzusetzen um diejenigen Reactionen in den Gelenken zu erhalten, welche bei gleichzeitigem Einflusse von R_1 und R_2 entstehen.

Eine zweite graphische Lösung gründet sich auf die Thatsache, dass die Richtungslinien von N_1, D und N_2 ein zu den Kräften R_1 und R_2 gehörendes Seilpolygon bilden, wie man daraus ersieht, dass N_1 und D der Kraft R_1, (D) und N_2 der Kraft R_2 das Gleichgewicht halten. Zur Lösung der Aufgabe construirt man zuerst ein zu den Kräften R_1 und R_2 gehörendes Seilpolygon, dessen drei Seiten durch je eines der Gelenke A, C und B gehen (Vergl. p 296). In dem dazu gehörenden Kräftepolygon geben die Polstrahlen die Reactionen an.

Wenn die Bogenbrücke der Form und Belastung nach symmetrisch in Bezug auf die Mitte ist, so wird die Construction sehr einfach; der Druck in dem Punkte C ist dann horizontal.

2) Belastete Stabverbindungen.

System von zwei Stäben.

Die beim Bogen mit drei Gelenken erhaltenen Resultate sind nur von der gegenseitigen Lage der Punkte A, B, C abhängig; sie gelten deshalb auch für eine Verbindung von zwei gewichtslosen Stäben in einer Verticalebene, welche durch ein Gelenk mit einander und durch je ein Gelenk mit einer festen Stütze verbunden sind und je eine concentrirte Belastung tragen (Fig. 256). Die Stäbe können auch über die Gelenke hinaus verlängert

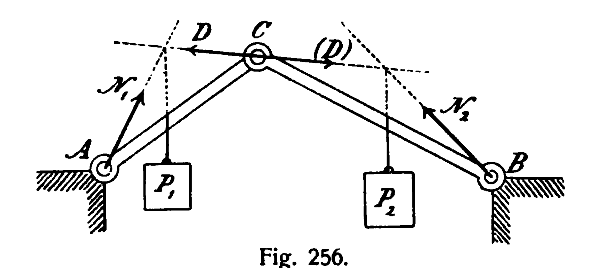


Fig. 256.

sein und an den Verlängerungen Lasten tragen. Wenn ein Stab unbelastet ist, so wirken die Drücke an seinen Endpunkten in seiner Längsrichtung, sind gleich gross und entgegengesetzt gerichtet. In der Figur 257 wird

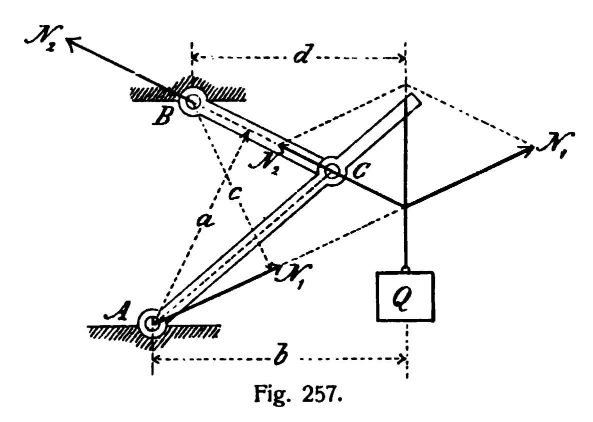


Fig. 257.

dieser Fall vorausgesetzt. Man erhält die Gelenkdrücke graphisch aus einem Kräftedreiecke oder analytisch mit Hülfe der aus zwei Momentengleichungen abgeleiteten Formeln

$$N_1 = \frac{d}{c}\, Q; \; N_2 = \frac{b}{a}\, Q.$$

System von drei Stäben.

Wenn die Anordnung der Stäbe die in der Figur 258 dargestellte ist, wo nur der mittlere von den drei Stäben belastet ist, so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts, dass der Schnittpunkt der Axen der bei-

den äussersten Stäbe auf der Verticalen durch den Aufhängepunkt der Belastung Q liegen muss. Alle Reactionen in den Gelenken erhält man aus einem einzigen Parallelogramm.

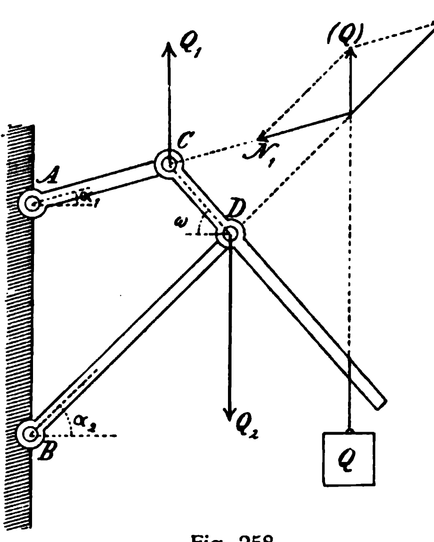


Fig. 258.

Die Aufgabe möge auch analytisch mit einiger Vollständigkeit behandelt werden. Man ersetzt zuerst die Last Q durch die beiden ihr parallelen Componenten Q_1 und Q_2 in den Gelenken C und D. Im Punkte C besteht Gleichgewicht zwischen den drei Kräften Q_1, N_1 in der Richtung CA und N in der Richtung CD, im Punkte D ebenso zwischen Q_2, N_2 in der Richtung BD und (N) in der Richtung DC. Mit den Bezeichnungen in den Figuren 258 und 259 erhält man die Gleichungen

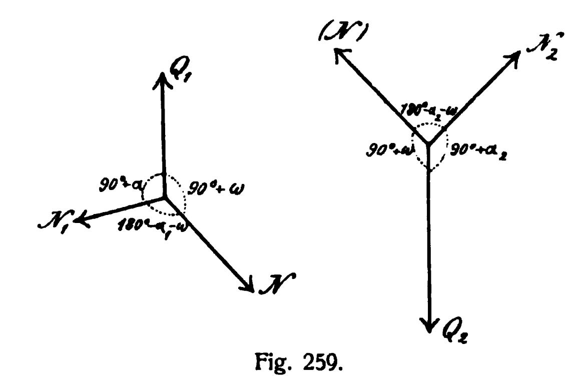


Fig. 259.

$$\frac{Q_1}{N} = \frac{\sin(\alpha_1 + \omega)}{\cos \alpha_1}; \quad \frac{Q_2}{N} = \frac{\sin(\alpha_2 + \omega)}{\cos \alpha_2}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \omega)}{\sin(\alpha_2 + \omega)} : \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \omega} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Diese Gleichung muss mit den beiden geometrischen Bedingungen zusammengestellt werden, welche durch Projection des Stabsystemes auf eine horizontale und eine verticale Axe hervorgehen, nämlich

$$l_1 \cos \alpha_1 + l \cos \omega = l_2 \cos \alpha_2,$$
$$-l_1 \sin \alpha_1 + l \sin \omega + l_2 \sin \alpha_2 = a,$$

wenn man

$$AB = a, AC = l_1, BD = l_2 \text{ und } CD = l$$

setzt. Aus diesen drei Gleichungen müssten α_1, α_2 und ω berechnet werden; schliesslich würde man die Werte von N_1, N_2 und N erhalten. Für das in der Figur 258 gezeichnete Stabsystem werden die Stäbe AC und CD auf Zug, der Stab BD auf Druck beansprucht.

In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn alle drei Stäbe belastet sind. Man zerlegt zuerst die Belastung eines Stabes in ihre beiden, ihr parallelen Componenten durch die Endgelenke des Stabes. Dann werden die einzelnen Componenten an jedem Gelenke zu einer Resultirenden zusammengesetzt. Man erhält in dieser Weise die Belastungen Q_1 und Q_2 in den Punkten C und D (Fig. 260) sowie eine verticale Kraft in jedem der Punkte A und B, welche durch eine gleiche und entgegengesetzte Componente der Reaction aufgehoben wird und nicht weiter in Betracht kommt. Die Fortsetzung der Berechnung ist dann dieselbe wie oben in dem Falle, wo der mittlere Stab allein belastet ist.

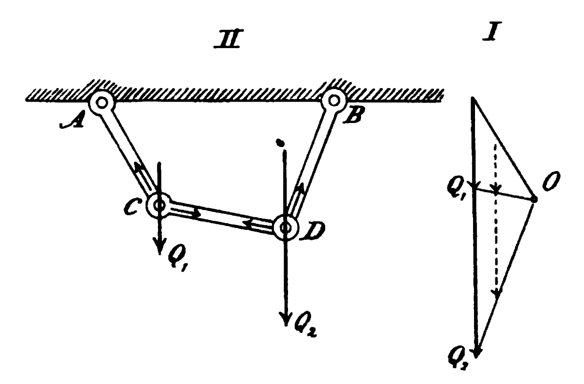


Fig. 260.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass die Stabrichtungen ein zu den Belastungen Q_1 und Q_2 in den Gelenken gehörendes Seilpolygon bilden. Aus dem dazu gehörenden Kräftepolygon kann man das Verhältnis der Kräfte Q_1 und Q_2 berechnen, welche einer gewissen Gleichgewichtsconfiguration des Stabsystemes entsprechen.

System aus beliebig vielen Stäben.

Die Figur 261, *II a* zeigt ein System von belasteten Stäben, welche durch Gelenke mit einander und mit zwei festen Widerlagern verbunden sind. Jede Belastung Q eines Stabes werde wieder in ihre beiden parallelen

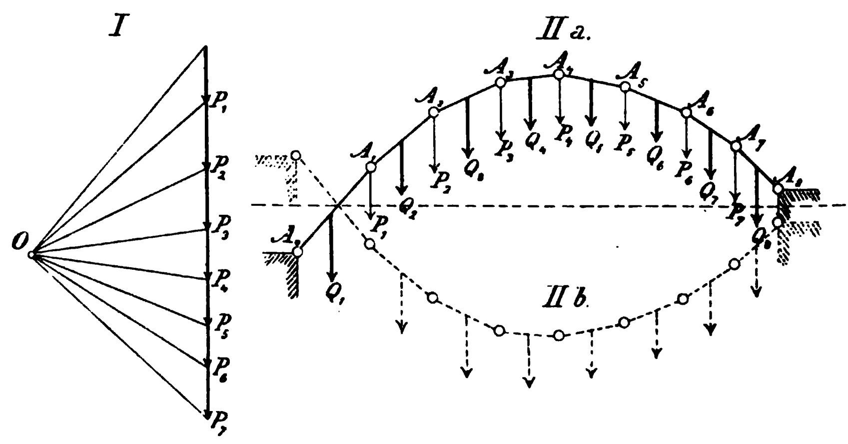


Fig. 261.

Componenten durch die Endpunkte des Stabes zerlegt, und die beiden Kräfte in demselben Gelenk zu einer Kraft P zusammengesetzt. Das System der Stäbe bildet dann in der Gleichgewichtslage ein zu den Kräften P gehörendes Seil- oder Stabpolygon. Die Figur 261, *I* stellt das Kräftepolygon dar, und die Polstrahlen geben die in den Stäben wirkenden Zug- oder Druckkräfte an. In der Figur *II a* sind alle diese Kräfte Druckkräfte. Das Gleichgewicht ist kein stabiles; es braucht nur eine unbedeutende Verrückung um die Configuration zu zerstören und in eine stabile Gleichgewichtsconfiguration übergehen zu lassen, in welcher alle in den Längsrichtungen der Stäbe wirkende Kräfte Zugkräfte sind. Eine solche stabile Gleichgewichtsconfiguration entsteht auch, wenn man das Stabsystem durch sein Spiegelbild in Bezug auf eine Horizontale ersetzt, die Richtung der Kräfte aber unverändert lässt (Fig. 261, *II b*).

Auf das eben betrachtete Problem kommen wir im nächsten Abschnitt in einem anderen Zusammenhange zurück.

3) Zwei schwere homogene Cylinder mit parallelen Axen stützen sich gegenseitig und ruhen auf zwei glatten schiefen Ebenen, deren Schnittlinie den Cylinderaxen parallel ist. Es sollen die Gleichgewichtslage und die

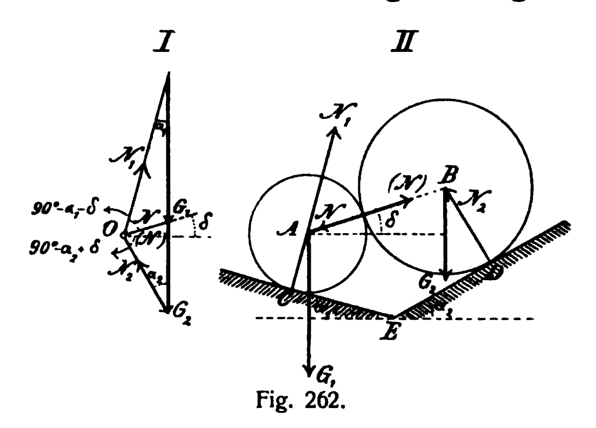


Fig. 262.

Drücke zwischen den Cylindern und den Ebenen bestimmt werden (Fig. 262).

Es seien G_1 und G_2 die Gewichte der Cylinder, N_1, N_2 und N die zu bestimmenden Drücke, δ der Neigungswinkel der Ebene durch die beiden Axen gegen die Horizontalebene; durch diesen Winkel ist die Gleichgewichtslage bestimmt. Die Drücke N_1, N und N_2 bilden ein zu den Kräften G_1 und G_2 gehörendes Seilpolygon. Der Pol des entsprechenden Kräftepolygons ist völlig bestimmt, da die äussersten Polstrahlen senkrecht zu den schiefen Ebenen sein müssen. Damit wird auch die Gleichgewichtslage gefunden. Zur Berechnung des Winkels δ und der Drücke benütze man die Formeln

$$\frac{G_1}{N} = \frac{\cos(\alpha_1 + \delta)}{\sin\alpha_1}; \quad \frac{G_2}{N} = \frac{\cos(\alpha_2 - \delta)}{\sin\alpha_2}.$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\,\frac{\cos(\alpha_1 + \delta)}{\cos(\alpha_2 - \delta)} = \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\operatorname{tg}\delta}.$$

Durch Auflösung der letzten Gleichung in Bezug auf $\operatorname{tg}\delta$ folgt

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{G_2\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - G_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{(G_1 + G_2)\sin\alpha_1\sin\alpha_2}.$$

Für die drei Drücke findet man

$$N = \frac{\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \delta)}\,G_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \delta)}\,G_2.$$

$$N_1 = \frac{\cos\delta}{\cos(\alpha_1 + \delta)}\,G_1; \quad N_2 = \frac{\cos\delta}{\cos(\alpha_2 - \delta)}\,G_2.$$

Der zehnte Abschnitt enthält weitere Anwendungen der Lehre vom Gleichgewichte starrer Körper.

Neunter Abschnitt.

Das Seilpolygon und die Kettenlinie.

§ 75.

Das Seilpolygon, seine Eigenschaften und specielle Arten desselben.

Seilpolygon und Stabpolygon.

Wenn an einem Seil, das in zwei Punkten A und B befestigt ist (Fig. 263), gewisse Kräfte $P_1, P_2 \dots P_n$ in bestimmten Punkten angreifen, so nimmt es die Form

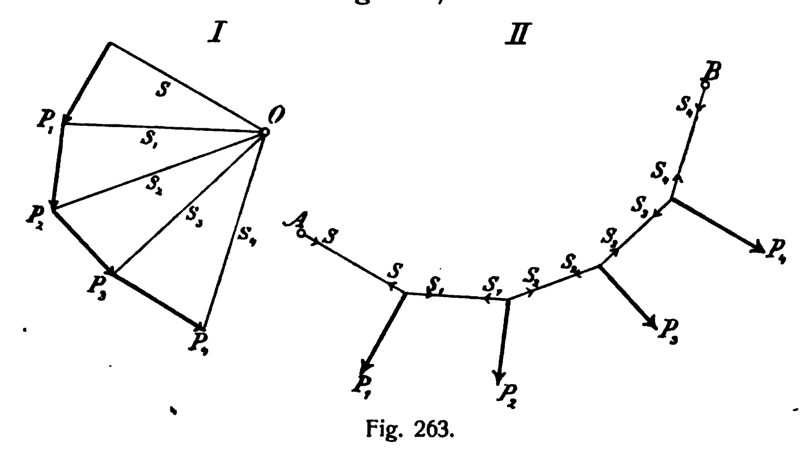


Fig. 263.

einer gebrochenen Linie an, welche die Angriffspunkte der Kräfte zu Ecken hat und übrigens von der Länge des Seiles und der Lage der Befestigungspunkte abhängt. Wenn ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist, kommen

in jedem Seilstücke Spannungen von solcher Grösse vor, dass die beiden Spannungen in einem Eckpunkte der in diesem Eckpunkte wirkenden Kraft das Gleichgewicht halten. An den Endpunkten eines Seilstückes wirken zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Spannkräfte. Im folgenden wird die Voraussetzung gemacht, dass die gebrochene Linie und alle Kräfte in einer Ebene liegen. Die aus einem Seil oder einer Kette gebildeten Polygone haben genau dieselben Eigenschaften wie die im sechsten Abschnitte benützten Seilpolygone; der Name „Seilpolygon" findet hierin seine Erklärung. Wenn die Kraft in einem Eckpunkte nach dem Innern des concaven Winkels gerichtet ist, so entstehen in den angrenzenden Gliedern Drücke, und das Seilpolygon muss durch ein S t a b p o l y g o n ersetzt werden, welches aus Stäben besteht, die durch Gelenke mit einander verbunden sind.

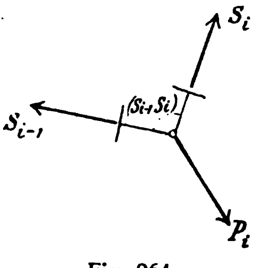


Fig. 264.

Eigenschaften des Seilpolygons.

Es mögen einige Eigenschaften der Seilpolygone besonders hervorgehoben werden.

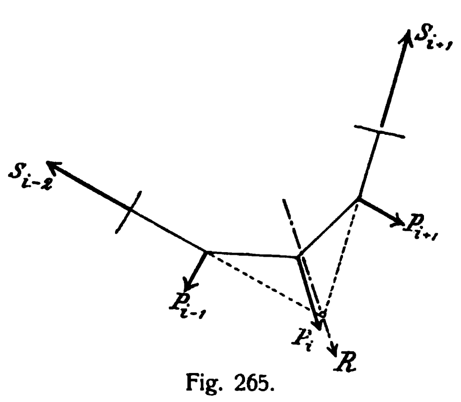


Fig. 265.

An einem Eckpunkte, wo die Kraft P_i den Spannungen S_{i-1} und S_i das Gleichgewicht hält (Fig. 264), erhält man mit einer oft benützten Bezeichnung für den Winkel zwischen zwei Richtungen die Beziehungen

$$(228)\quad P_i : S_{i-1} : S_i = \sin(S_{i-1}\, S_i) : \sin(P_i\, S_i) : \sin(P_i\, S_{i-1}).$$

Schneidet man zwei beliebige Seilstücke durch und bringt die Spannungen in denselben als äussere Kräfte an, so ist das System im Gleichgewicht. Es ergiebt sich hieraus, dass die Resultirende der zwischen den Schnittpunkten liegenden Kräfte durch den Schnittpunkt der beiden die Kräfte umfassenden Polygonglieder geht.

Schneidet man einen von dem Befestigungspunkte A oder B ausgehenden Teil des Polygons durch und bringt die Spannung in dem abgeschnittenen Gliede als äussere Kraft an, so erhält man auch ein System, welches sich im Gleichgewichte befindet.

Einige specielle Fälle des Seilpolygons verdienen besondere Beachtung.

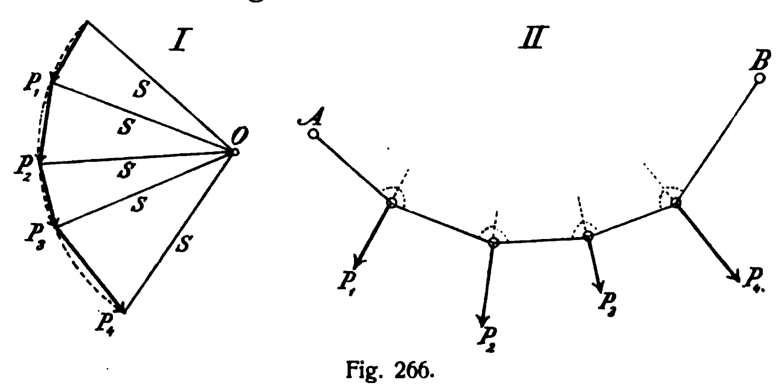


Fig. 266.

Die Kräfte halbiren die Polygonwinkel.

1) Die Kräfte P halbiren die Polygonwinkel. Dieser Fall tritt ein, wenn kleine Ringe auf das Seil aufgezogen und als Angriffspunkte der Kräfte benützt werden (Fig. 266). Wegen der an einem Eckpunkte vorhandenen Symmetrie erhält man gleich grosse Spannungen in den beiden in dem Eckpunkte zusammenstossenden Gliedern. Es ist also

$$(229) \quad S_1 = S_2 = S_3 = .. = S_i = .. = S = \text{constant},$$

d. h. *alle Seiten des Seilpolygons sind gleich stark gespannt.*

Die Formel (228) ergiebt (Fig. 267)

$$P_i : S = \sin \alpha_i : \sin \left(180^\circ - \frac{\alpha_i}{2}\right)$$

oder

$$P_i = 2 \cos \frac{\alpha_i}{2} . S,$$

ferner

$$(230) \qquad P_1 : P_2 : P_3 : \ldots = \cos \frac{\alpha_1}{2} : \cos \frac{\alpha_2}{2} : \cos \frac{\alpha_3}{2} : \ldots$$

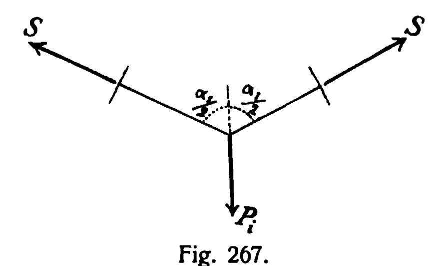


Fig. 267.

Die Kräfte verhalten sich also wie die Cosinusse der halben Polygonwinkel.

Verticale Kräfte.

2) Die Kräfte seien vertical.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Belastungen Gewichte sind.

Man schneide zwei beliebige Seiten durch (Fig. 268) und bringe die Spannungen dieser Seiten als äussere Kräfte an. Jede Spannung werde ferner in ihre horizon-

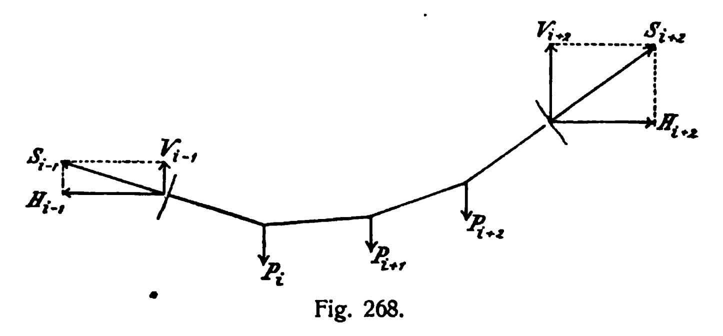


Fig. 268.

tale und verticale Componente zerlegt; die letztere rechne man positiv nach oben, negativ nach unten. Setzt man die Projectionssummen aller Kräfte auf eine horizontale

und eine verticale Axe gleich Null, so erhält man die Gleichungen

$$H_{i-1} = H_{i+2},$$

$$V_{i-1} + V_{i+2} = P_i + P_{i+1} + P_{i+2},$$

d. h.: *Die horizontalen Componenten der Spannungen in den einzelnen Seilstücken sind alle gleich gross.*

Die Summe der verticalen Spannungscomponenten zweier beliebiger Seilstücke ist gleich der Summe aller zwischen ihnen liegenden Belastungen.

Verticale Kräfte. Horizontale Polygonseite.

3) Verticale Kräfte und eine horizontale Polygonseite.

In diesem Falle, welcher noch specieller als der Fall 2) ist, giebt es in der horizontalen Seite des Polygons

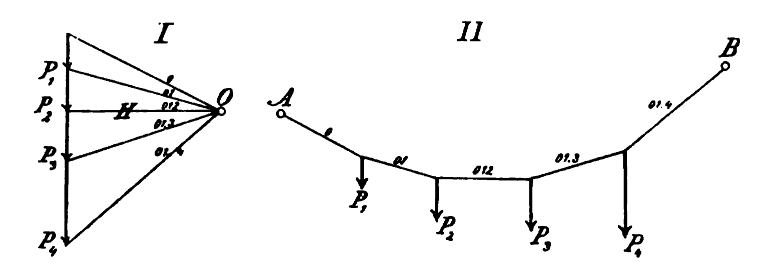


Fig. 269.

eine horizontale Spannung H, welche gleich der constanten Horizontalcomponente der Spannung einer beliebigen Seite ist (Fig. 269). In dem Kräftepolygon (Fig. 269, I) ist H die Polweite und zugleich einer der Polstrahlen. Weil die verticale Spannungscomponente in der horizontalen Seite gleich Null ist, so ist die verticale Componente der Spannung einer beliebigen Seite gleich der Summe aller Belastungen zwischen der horizontalen und der betrachteten Seite. In der Figur ist z. B. $V_4 = P_3 + P_4$. In den äussersten Seiten erreicht die verticale Componente ihre grössten Werte; dasselbe ist mit der Spannung

selbst der Fall. H ist die kleinste vorhandene Spannung. Die Polstrahlen des Kräftepolygons stellen die Spannungen dar.

Gleiche Kräfte in gleichen Entfernungen.

4) Die Kräfte im Falle 3) sollen gleich gross sein und in gleichen Entfernungen von einander angebracht sein.

Dieser Fall kommt bei einem Balken vor, welcher in solcher Weise gleichförmig belastet ist, dass die Belastung nur auf die Knotenpunkte des Seilpolygons wirkt (Fig. 270). In der Figur ist das zu betrachtende Polygon ein Stabpolygon, welches die Verticale durch die Mitte der horizontalen Seite zur Symmetrieaxe hat. Es soll bewiesen werden, dass alle Knotenpunkte auf einer Parabel liegen.

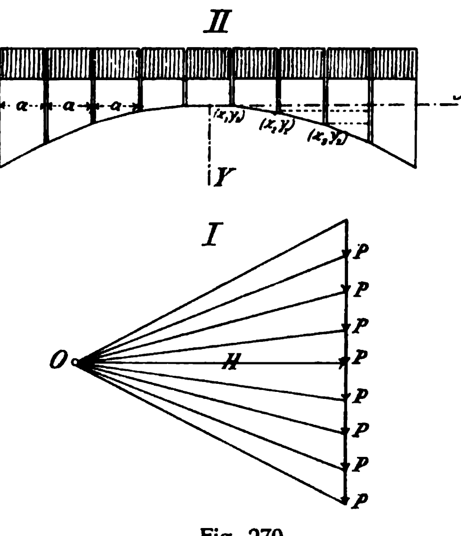


Fig. 270.

Man wähle die Mitte der horizontalen Seite zum Anfangspunkte eines Coordinatensystemes mit einer horizontalen x-Axe und einer verticalen, nach unten gerichteten y-Axe. Es seien a der Abstand von zwei gleich grossen Kräften P, H die Polweite des Kräftepolygons und x_i, y_i die Coordinaten eines beliebigen Knotenpunktes des Stabpolygons. Mit Hülfe ähnlicher Dreiecke im Kräfte- und Seilpolygon werden die folgenden Coordinatenwerte berechnet:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a,\ x_2 = \tfrac{3}{2}a,\ x_3 = \tfrac{5}{2}a, \ldots\ldots x_i = \tfrac{1}{2}(2i-1)\,a \ldots$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = \frac{P}{H} a, y_3 = 3 \frac{P}{H} a, \ldots\ldots y_i = \tfrac{1}{2} i (i-1) \frac{P}{H} a \ldots,$$

und zwar ergiebt sich der Wert von y_i aus einer Gleichung

$$y_i = y_{i-1} + (i-1) \frac{P}{H} a = \{1 + 2 + \ldots + (i-1)\} \frac{P}{H} a.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{P}{H} a = b$$

und eliminirt i zwischen den Gleichungen

$$x_i = \tfrac{1}{2}(2i - 1) a \text{ und } y_i = \tfrac{1}{2} i (i-1) b,$$

so findet man

$$x_i^2 = \frac{2a^2}{b}\left(y_i + \frac{b}{8}\right),$$

also mit Weglassung von i

$$x^2 = \frac{2a^2}{b}\left(y + \frac{b}{8}\right) \tag{231}$$

als Gleichung einer Curve, auf welcher alle Knotenpunkte liegen. Sie ist eine Parabel, deren Axe mit der y-Axe zusammenfällt und deren Scheitel im Abstande $\frac{b}{8}$ oberhalb des Anfangspunktes der Coordinaten liegt.

§ 76.

Ubergang vom Seilpolygon zur Kettenlinie.

Seilpolygon. Kettenlinie.

Wenn die aus einzelnen verticalen Kräften bestehende Belastung eines Seilpolygons durch eine continuirliche Belastung ersetzt wird, so erhält das Seilpolygon unendlich viele unendlich kurze Seiten, d. h. es geht in eine

Curve, die sog. Seilcurve oder Kettenlinie über.

Eine Kettenlinie ist die Gleichgewichtsform eines biegsamen Seiles oder einer Kette, welche nach irgend einem Gesetze continuirlich belastet ist.

Eigenschaften der Kettenlinie.

Alle Eigenschaften des Seilpolygons liefern direct entsprechende Eigenschaften der Kettenlinie. Die Spannung S in einem beliebigen Punkte C der Kettenlinie hat die Richtung der Tangente (Fig. 271). Sie werde in eine

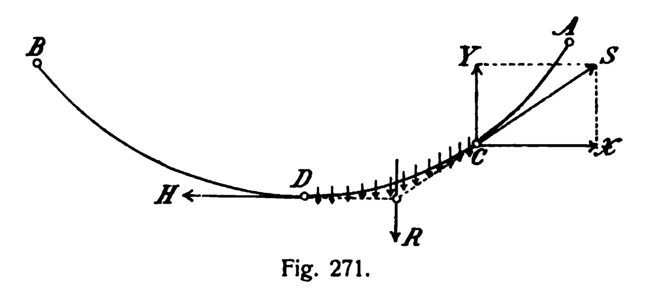


Fig. 271.

horizontale Componente X und eine verticale Componente Y zerlegt. Es sei D der tiefste Punkt der Kettenlinie, H die horizontale Spannung in demselben, R die Resultirende der Belastungen des Stückes DC. Weil H, R, X und Y sich das Gleichgewicht halten, erhält man

$$X = H; \quad Y = R; \tag{232}$$

d. h.: *Die horizontale Componente der Spannung ist constant und gleich der Spannung im untersten Punkte.*

Die verticale Componente der Spannung ist gleich der Summe der Belastungen zwischen dem betreffenden Punkte und dem untersten Punkte.

Die Resultirende R geht durch den Schnittpunkt von H und S, oder noch allgemeiner: *Die Resultirende der Belastungen zwischen zwei Punkten geht durch den Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten.*

Vom tiefsten Punkte aus nimmt die Spannung nach

beiden Seiten hin bis zu den Aufhängepunkten zu; in diesen erreicht sie die grössten Werte.

Die Gestalt der Kettenlinie ist vom Belastungsgesetz abhängig; in § 77 sollen einige specielle Fälle untersucht werden.

§ 77.

Die gewöhnliche Kettenlinie.

Gewöhnliche Kettenlinie.

Wenn die Belastung gleichmässig über die Bogenlänge verteilt ist, so dass also gleich lange Bogen gleich grosse Belastungen tragen, so entsteht eine Kettenlinie, welche die **gewöhnliche Kettenlinie** genannt wird. Sie ist die Gleichgewichtsform eines homogenen, überall gleich dicken Seiles, welches keine Belastung ausser dem eigenen Gewichte trägt.

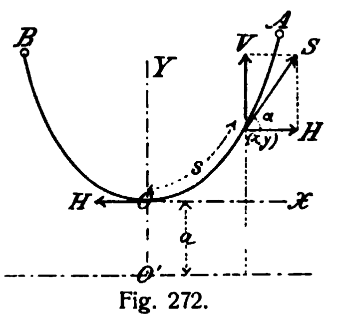


Fig. 272.

Gleichung der Kettenlinie.

Um die Gleichung der Kettenlinie aufzustellen, wähle man den tiefsten Punkt der Curve zum Anfangspunkte eines Coordinatensystems mit einer horizontalen x- und einer verticalen y-Axe (Fig. 272). Es sei s der vom Coordinatenanfangspunkte aus gerechnete Bogen, γ seine Belastung pro Längeneinheit. Die Verticalcomponente V der Spannung S hat den Wert

$$V = \gamma s. \tag{233}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{\gamma s}{H}.$$

Führt man eine Länge a ein durch die Formel

$$H = \gamma a, \tag{234}$$

so ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s}{a}; \tag{235}$$

diese Formel zeigt, dass die Tangente des Neigungswinkels der Curve gegen die x-Axe dem Bogen s proportional ist. Durch Differentiation der Gleichung (235) ergiebt sich

$$\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{dx} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx},$$

und mit Anwendung der Werte

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

folgt als Differentialgleichung der Kettenlinie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Diese Gleichung soll jetzt integrirt werden. Setzt man

$$\operatorname{tg}\alpha = p = \frac{dy}{dx},$$

so erhält man

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{a}$$

oder

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

ferner gemäss einer bekannten Integralformel

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a} + \text{Const.}$$

Die Constante wird durch die Bedingung bestimmt, dass die Tangente der Curve im Anfangspunkte horizontal sein

muss, d. h. dass für $x = 0$ $p = 0$ folgen muss; die Constante ist also gleich Null, d. h. es ist

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a}.$$

Hieraus folgt

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}},$$

$$p - \sqrt{1 + p^2} = \frac{-1}{p + \sqrt{1 + p^2}} = -e^{-\frac{x}{a}}$$

und

$$p = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

oder

$$dy = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)dx. \tag{236}$$

Eine nochmalige Integration liefert die Gleichung der Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + \text{Const.}$$

Aus der Bedingung, dass die Curve durch den Anfangspunkt gehe, erhält man

$$y + a = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Gewöhnlich wählt man den Anfangspunkt in dem Abstande a unter dem tiefsten Punkte und findet dann in Bezug auf das neue Coordinatensystem als Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{237}$$

Directrix. *Parameter.* Die neue x-Axe heisst Directrix der Kettenlinie, die Constante a, welche den Abstand des Scheitels von der Directrix angiebt, wird der Parameter genannt (Fig. 273). Die Kettenlinie hat mehrere bemerkenswerte Eigenschaften, von denen einige hervorgehoben werden sollen.

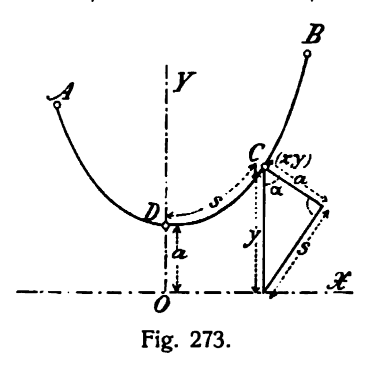


Fig. 273.

Die Gleichung der Kettenlinie bleibt unverändert, wenn x durch $-x$ ersetzt wird; die Kettenlinie ist folglich symmetrisch in Bezug auf die y-Axe.

Bogenlänge. Die Bogenlänge ergiebt sich aus der Gleichung

$$s = a \operatorname{tg} \alpha = a \frac{dy}{dx};$$

es ist also nach der Gl. (236)

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{238}$$

Aus den Gleichungen (237) und (238) findet man zwischen s und y die Relation

$$y^2 = s^2 + a^2. \tag{239}$$

Sie zeigt in Verbindung mit der Formel (235), dass die Ordinate y die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Catheten s und a ist; der Seite s liegt der Winkel α gegenüber. Dieses Dreieck ist in der Figur 273 gezeichnet; es dient zur Construction der Tangente und der Normalen der Kettenlinie und zur Rectification des Bogens. Man beachte auch die Formeln

$$\begin{aligned} s &= y \sin \alpha, \\ a &= y \cos \alpha, \end{aligned} \tag{240}$$

von welchen die letztere zeigt, dass die Projection der Ordinate auf die Normale der Kettenlinie constant und zwar gleich dem Parameter a ist.

Spannung.

Für die Spannung S in einem Punkte (x, y) findet man den Ausdruck:

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = \gamma\sqrt{a^2 + s^2} = \gamma y; \tag{241}$$

sie ist also gleich dem Gewichte eines Seilstückes von der Länge y. Hieraus folgt auch, dass das Gleichgewicht besteht, wenn man die beiden Enden, anstatt sie zu befestigen, über kleine Rollen führt und bis zur Directrix herunterhängen lässt (Fig. 274).

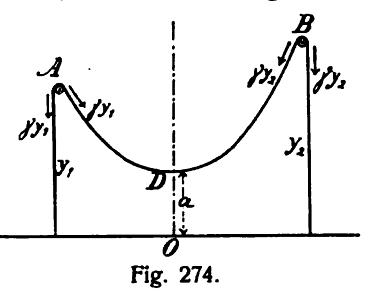


Fig. 274.

Kettenlinie durch zwei Punkte.

Durch zwei feste Punkte A und B, welche auf derselben Horizontalen liegen mögen (Fig. 275), können unendlich viele Kettenlinien geführt werden. Um eine bestimmte Kettenlinie zu erhalten, muss entweder die Länge $2l$ des Seiles oder die Horizontalspannung H oder die in den Endpunkten vorkommende grösste Spannung gegeben sein. Es bestehen die Gleichungen

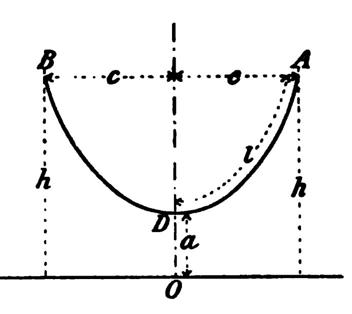


Fig. 275.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{237}$$

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{238}$$

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}} - e^{-\frac{c}{a}}\right), \tag{242}$$

(243) $$h = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}} + e^{-\frac{c}{a}}\right).$$

Wird die Länge $2l$ als gegeben betrachtet, so liefert die Gleichung (242) den Parameter a, obgleich sie transcendent und nicht explicite in Bezug auf a auflösbar ist. Der so erhaltene Wert von a ist dann in die Gleichung (237) der Kettenlinie einzusetzen.

Angenäherte Formeln.

In vielen Fällen genügt es Näherungswerte für die Ordinate y der Kettenlinie, die Bogenlänge und die Spannungen u. s. w. zu kennen. Man findet sie dadurch, dass man in den Formeln (237), (238), (242) und (243) die Exponentialfunctionen in Reihen entwickelt. Es ist bekanntlich:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Man erhält dann

$$y = a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{24}\frac{x^4}{a^4} + \dots\right),$$

$$s = x + \frac{1}{6}\frac{x^3}{a^2} + \frac{1}{120}\frac{x^5}{a^4} + \dots,$$

(244) $$l = c + \frac{1}{6}\frac{c^3}{a^2} + \frac{1}{120}\frac{c^5}{a^4} + \dots,$$

$$h = a + \frac{1}{2}\frac{c^2}{a} + \frac{1}{24}\frac{c^4}{a^3} + \dots.$$

Die Annäherungen sind um so genauer, je grösser a und H sind, d. h. je grösser die Spannung im tiefsten Punkte und je flacher die Kettenlinie oder auch je kleiner die Differenz $2(l-c)$ zwischen dem Bogen und der Sehne ist.

Parabolische Kettenlinie.

Vernachlässigt man für einen grossen Wert von a die Glieder mit $\frac{1}{a^3}$ und höheren Potenzen von $\frac{1}{a}$, so wird

$$l = c + \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{a^2},$$

(245)

$$y = a + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a}.$$

Nach der letzteren Gleichung ist die Kettenlinie mit einer grossen Annäherung eine gewöhnliche Parabel. Wählt man die Tangente im tiefsten Punkte zur x-Axe, so wird die Gleichung dieser Parabel

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a}.$$

Die Ordinate f an den Enden oder die Pfeilhöhe ist

(246) $$f = \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{a}.$$

Man kann also der Gleichung der Parabel auch die Form

(247) $$y = \frac{x^2}{c^2}f$$

geben. Die Horizontalspannung hat den Wert

(248) $$H = \gamma a = \frac{\gamma c^2}{2f}.$$

Für die halbe Bogenlänge liefert die erste Gleichung (245) den Ausdruck

(249) $$l = c + \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{a^2} = c + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{c},$$

den man einfach construirt (Fig. 276). Man nehme DC

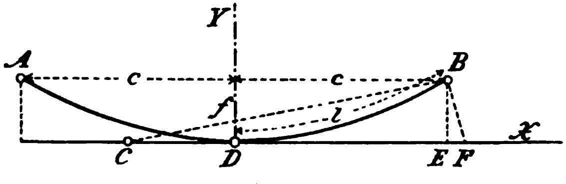


Fig. 276.

gleich $\frac{c}{2}$, ziehe die Gerade CB und die Senkrechte BF in B zu CB. Es folgt dann

$$EF \cdot \tfrac{3}{2} c = f^2,$$

$$EF = \tfrac{2}{3} \frac{f^2}{c},$$

$$DF = DE + EF = c + \tfrac{2}{3} \frac{f^2}{c} = l,$$

d. h. DF ist die Länge des halben Bogens zwischen A und B.

Anwendungen.

1) Eine Kette ist in einem Punkte A befestigt, ein Stück derselben von der Länge l_2 ruht auf einer horizontalen Unterlage (Fig 277).

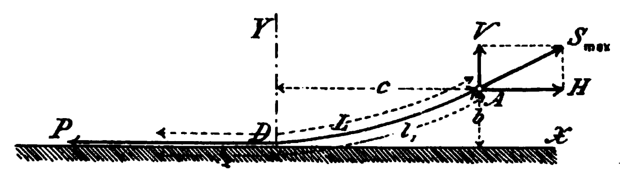


Fig. 277.

Man berechne für gegebene Werte von γ, der Kraft P, welche das horizontale Stück spannt, der ganzen Länge L und des Abstandes b die Grössen H, a, l_1, l_2, V, c und $S_{max.}$

Das frei hängende Stück bildet eine gewöhnliche Kettenlinie. Man findet also

$$H = P,$$

$$a = \frac{H}{\gamma} = \frac{P}{\gamma},$$

$$l_1 = \sqrt{(a+b)^2 - a^2} = \sqrt{b\,(2a+b)},$$

$$l_2 = L - l_1 = L - \sqrt{b\,(2a+b)},$$

$$V = \gamma l_1 = \gamma \sqrt{b\,(2a+b)},$$

$$S_{max} = \sqrt{H^2 + V^2} = \gamma\,(a+b).$$

Die Grösse c wird aus der transcendenten Gleichung

$$a + b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}} + e^{-\frac{c}{a}}\right)$$

berechnet, und zwar findet man

$$c = a \ln \frac{a + b + \sqrt{b(2a + b)}}{a}.$$

Für eine flache Kettenlinie ergiebt sich annähernd

$$c = \sqrt{2ab} = \sqrt{2b\frac{P}{\gamma}}.$$

2) Ein Telegraphendraht, dessen Durchmesser $d = 3.5$ mm und dessen spec. Gewicht 7.8 ist, ist an zwei gleich hohen Stangen in 80 m Entfernung von einander befestigt. Der tiefste Punkt liegt bei $+25°$ Cels. 1.8 m unterhalb der Aufhängepunkte. Man bestimme die Horizontalspannung, die maximale Spannung und die Bogenlänge sowohl bei $+25°$ Cels. als bei $-25°$ Cels. Der Ausdehnungscoefficient beträgt $\alpha = 0.000012$.

Die Mittellinie des Telegraphendrahtes kann als eine Parabel betrachtet werden. Für γ findet man

$$\gamma = \frac{\pi\, 0.0035^2}{4}\, 7.8 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = 0.07505 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Ferner folgt mit $c = 40$ m bei

$+25°$ Cels.

$$f = 1.8\text{ m};\ a = \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{f} = 444.4\text{ m},$$

$$H = a\gamma = 33.35\text{ kg}.$$

$$l = c + \tfrac{1}{6}\frac{c^3}{a^2} = 40.054\text{ m},$$

$$2l = 80.108\text{ m},$$

$$V = \gamma l = 3.006\text{ kg},$$

$$S_{max} = \gamma(a + f) = 33.49\text{ kg},$$

und bei

$-25°$ Cels.

die Länge $$l' = l(1 - 50\,\alpha) = 40.030\text{ m},$$

$$2l' = 80.060\text{ m},$$

sowie aus der Formel

$$l' = c + \tfrac{8}{3}\frac{f'^2}{c}$$

die Einsenkung $\quad f' = \sqrt{\tfrac{3}{8}\, c\,(l' - c)} = 1.341 \text{ m}.$

Ferner erhält man

$$a' = \tfrac{1}{8}\frac{c^2}{f'} = 596.6 \text{ m},$$

$$H' = \gamma a' = 44.77 \text{ kg},$$

$$S'_{\max} = \gamma\,(a' + f') = 44.87 \text{ kg}.$$

§ 78.

Allgemeine Theorie der Kettenlinie.

Belastungscurve und Fläche.

Es sei ein in zwei Punkten befestigtes Seil in irgend einer Weise continuirlich belastet. Man wähle ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit einer horizontalen x-Axe und einer verticalen, durch den tiefsten Punkt des Seiles oder der Curve gelegten y-Axe (Fig. 278). Es sei ds ein

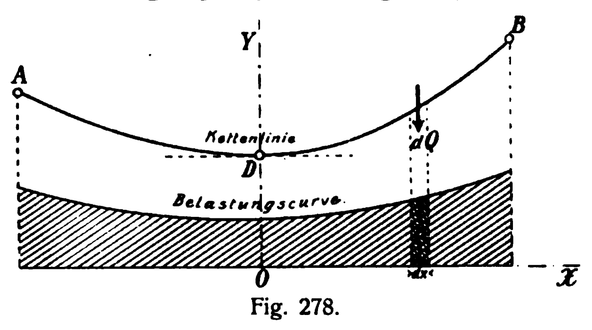


Fig. 278.

Bogenelement der Curve, dx seine Horizontalprojection, dQ die auf ds wirkende Belastung. Setzt man

$$dQ = p\,dx,$$

so erhält man dadurch p als eine Function von x

$$p = \varphi(x), \tag{250}$$

welche das Belastungsgesetz angiebt. Die Curve, deren Gleichung $p = \varphi(x)$ ist, heisst die Belastungscurve,

die Fläche, welche zwischen der Belastungscurve und der Abscissenaxe liegt, die **Belastungsfläche**. Der Inhalt eines zwischen zwei beliebigen Ordinaten liegenden Teiles dieser Fläche giebt die Belastung für das entsprechende Stück der Kettenlinie an.

Zusammenhang zwischen Kettenlinie und Belastungscurve.

Zwischen der allgemeinen Kettenlinie mit der Gleichung

$$y = f(x) \tag{251}$$

und der Belastungscurve mit der Gleichung

$$p = \varphi(x)$$

besteht ein einfacher Zusammenhang. Auf ein Bogenelement ds (Fig. 279) wirken die Belastung pdx, die Spannung S am einen Ende mit den Componenten H und V und die Spannung $S + dS$ mit den Componenten H und $V + dV$.

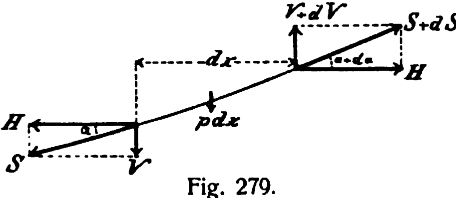


Fig. 279.

Diese Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Durch Projection auf eine verticale Richtung ergiebt sich

$$V + dV - V - pdx = 0,$$

oder

$$dV = pdx.$$

Ferner ist

$$V = H \operatorname{tg} \alpha = H \frac{dy}{dx},$$

somit

$$dV = H \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

und

$$p = H \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{252}$$

Die Ordinate der Belastungscurve ist also proportional der zweiten Ableitung der Ordinate der Kettenlinie in Bezug auf x. Wenn die Kettenlinie gegeben ist, so erhält man aus Gleichung (252) in einfacher Weise das Balastungsgesetz.

Ist umgekehrt das Belastungsgesetz durch die Gleichung

$$p = \varphi(x)$$

gegeben, so liefert die obige Formel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} = \frac{\varphi(x)}{H}.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\int \varphi(x)\, dx + C_1,$$

$$(253) \qquad y = \frac{1}{H}\int dx \int \varphi(x)\, dx + C_1 x + C_2.$$

Die Spannung H im untersten Punkte kann beliebig gewählt werden; die Constanten C_1 und C_2 werden gewöhnlich durch die specielle Wahl des Coordinatensystemes bestimmt. Nach Gleichung (253) gehören unendlich viele Kettenlinien zu derselben Belastungscurve.

Wenn die y-Axe durch den tiefsten Punkt D der Kettenlinie geht, so stellt das Integral

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx$$

den Inhalt der Belastungsfläche zwischen D und einem beliebigen Punkte dar und giebt also die auf das entsprechende Stück der Kettenlinie wirkende Belastung an. Diese Belastung hält der Spannung H in dem untersten Punkte und der Spannung S in dem anderen Endpunkte das Gleichgewicht. Man kann die Gleichung der Kettenlinie auch durch Anwendung der Gleichgewichtsbedin-

gungen auf dieses Kräftesystem ableiten, wie in einigen Beispielen weiter unten näher gezeigt wird.

Da die Function $\varphi(x)$ in der Formel (253) beliebig sein kann, so kann auch für y eine beliebige Function erhalten werden. D. h. *jede Curve kann als eine Kettenlinie aufgefasst werden, welche einem bestimmten Belastungsgesetze entspricht.* Wenn man nur verticale, abwärts gerichtete Belastungen zulässt, so ist $\varphi(x)$ für alle benützten Werte von x positiv und die Kettenlinie überall convex nach unten.

§ 79.

Specielle Kettenlinien.

A. Die parabolische Kettenlinie.

Parabolische Kettenlinie.

Wenn die Belastung gleichförmig über die Horizontalprojection verteilt ist, so ist p constant, die Belastungscurve ist eine Parallele zur x-Axe und die Belastungsfläche ein Rechteck (Fig. 280). Man erhält dann

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} = \text{const.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{H}x + C_1,$$

$$y = \frac{p}{2H}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Fig. 280.

Die Kettenlinie ist also eine Parabel mit verticaler Axe. Führt man die y-Axe durch den Scheitel der Parabel, so ist für $x=0$ auch $\frac{dy}{dx}=0$, und man findet $C_1=0$. Wird der Scheitel ausserdem als Coordinatenanfangspunkt gewählt, so ergiebt sich $C_2=0$ und die Gleichung der Parabel wird

$$(254) \qquad y=\frac{p}{2H}x^2.$$

Bezeichnet $2c$ die Sehne, f die Pfeilhöhe der Parabel, so ist

$$f=\frac{p}{2H}c^2,$$

$$(255) \qquad y=\frac{x^2}{c^2}f,$$

$$H=\frac{pc^2}{2f}$$

wie auf p. 403. Die Horizontalspannung ist also umgekehrt proportional zu f. In dem Punkte (x, y) ist die verticale Spannungscomponente

$$(256) \qquad V=px$$

und die Spannung S selbst

$$(257) \qquad S=\sqrt{H^2+V^2}=\frac{p}{2f}\sqrt{c^4+4f^2x^2}.$$

Die grösste Spannung kommt in den Aufhängepunkten vor und hat den Wert

$$(258) \qquad S_{\max}=\frac{pc}{2f}\sqrt{c^2+4f^2}.$$

Die Gleichung der parabolischen Kettenlinie wird ohne Integration in folgender Weise erhalten. Das Stück DM

in der Figur 281 muss unter dem Einflusse der Spannungen H und S und der in seiner Mitte wirkenden Resultirenden px der Belastungen im Gleichgewichte sein.

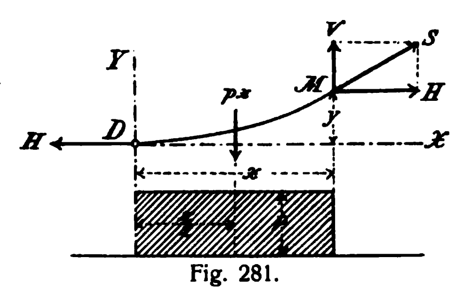


Fig. 281.

Es werde die Momentengleichung für M als Pol aufgestellt, d. h.

$$Hy - px\frac{x}{2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$y = \frac{px^2}{2H}$$

wie vorher.

Der betrachtete Fall kommt annähernd bei den Kettenhängebrücken (Fig. 282) vor, weshalb die para- *Hängebrücke.*

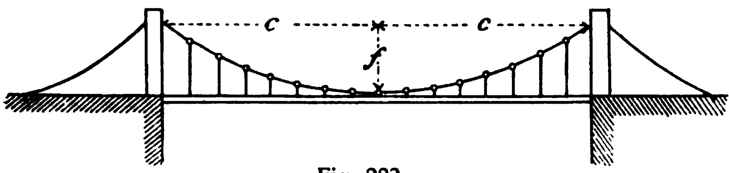


Fig. 282.

bolische Kettenlinie auch die Kettenlinie der Hängebrücken heisst. Die Belastung besteht aus dem Gewichte der Kette, dem Gewichte der Hängestangen, dem Gewichte der Brücke mit ihrer Fahrbahn und der zufälligen Belastung durch einen Eisenbahnzug, eine Menschenmenge u. s. w. Mit einer gewissen Annäherung kann die Belastung als gleichförmig über die Horizontalprojection verteilt und p constant angenommen werden.

Wenn z. B. die Spannweite der Hängebrücke $2c = 180$ m, die Höhe der Endpunkte der Kette über der Fahrbahn 15 m, die Länge

der Hängestange in der Mitte 2 m und die gesamte Belastung $6 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}}$ beträgt, so erhält man die Werte

$$f = 13 \text{ m},$$

$$H = \frac{pc^2}{2f} = 1869.2 \text{ t},$$

$$V = pc = 540 \text{ t},$$

$$S_{max} = \sqrt{H^2 + V^2} = 1945.7 \text{ t}.$$

Eine Hängestange in dem Abstande 30 m von der Mitte der Brücke hat die Länge

$$2 + \frac{30^2}{90^2} 13 = 3.444 \text{ m}.$$

An den Endpunkten gilt für den Neigungswinkel α der Kette mit der Horizontalen die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} \text{ und } \alpha = 16° 7'.$$

B. Die cubische Parabel.

Cubische Parabel als Kettenlinie.

Wenn die Belastung p von dem Werte Null in der Mitte gleichförmig bis zu dem Werte q an beiden Enden zunimmt (Fig. 283), so besteht die Belastungsfläche aus zwei rechtwinkligen, in Bezug auf die y-Axe symmetrisch liegenden Dreiecken. Für positive Werte von x ist

$$p = \varphi(x) = \frac{x}{c} q.$$

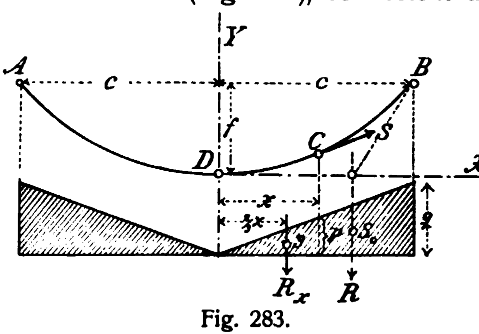


Fig. 283.

Man erhält also

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{c} \frac{q}{H}$$

und nach Integration

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2cH} x^2 + C_1.$$

Weil der Abcisse $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ entsprechen muss, so ergiebt sich $C_1 = 0$ und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2cH} x^2.$$

Eine nochmalige Integration liefert

$$y = \frac{q}{6cH} x^3 + C_2.$$

Wählt man den tiefsten Punkt D als Coordinatenanfangspunkt, so wird $C_2 = 0$ und

$$y = \frac{qx^3}{6cH}. \tag{259 a}$$

Für negative Werte von x hätte man

$$y = -\frac{qx^3}{6cH}. \tag{259 b}$$

Die Kettenlinie besteht also aus zwei in Bezug auf die y-Axe symmetrischen Stücken cubischer Parabeln.

Die Pfeilhöhe ist

$$f = \frac{qc^2}{6H}. \tag{260}$$

Hieraus findet man

$$H = \frac{qc^2}{6f} \tag{261}$$

und die Gleichung

$$y = \frac{x^3}{c^3} f \tag{262}$$

für die Parabel rechts.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man mit Hülfe der auf das Stück DC angewandten Gleichgewichtsbedingungen. Auf dieses Stück wirken eine Spannung H im Punkte D, eine Spannung S im Punkte C und eine resultirende Belastung

$$R_x = \frac{qx^2}{2c}$$

im Abstande $\frac{2}{3}x$ von dem Punkte D. Die Momentengleichung in Bezug auf den Pol C liefert

$$Hy - \frac{qx^2}{2c}\frac{x}{3} = 0,$$

d. h.

$$y = \frac{qx^3}{6cH}$$

wie oben.

§ 80.

Ubungsaufgaben zur Lehre vom Seilpolygon und von der Kettenlinie.

1) An einem Seilpolygon mit einer horizontalen Seite sind die Kräfte in den Knotenpunkten vertical, befinden sich in constanter Entfernung von einander und nehmen proportional ihrem Abstande von der Mitte der horizontalen Seite zu. Man bestimme eine Curve, auf welcher die Knotenpunkte liegen.

2) Eine schwere Kette von der Länge l ist in einem Punkte befestigt und ruht teilweise auf einer schiefen Ebene, welche den Winkel α mit der Horizontalen einschliesst. Man berechne die Länge des Stückes, welches auf der schiefen Ebene ruht *a*) wenn man den Winkel β kennt, den die Kette im Aufhängungspunkte mit der Horizontalebene einschliesst und *b*) wenn der Abstand des Aufhängepunktes von der schiefen Ebene gleich d ist.

3) Ein rechteckiges Segel ist mit zwei horizontalen Raaen versehen und wird durch einen Winddruck gespannt, welcher senkrecht zu der Ebene der beiden Raaen ist. Welche Form nimmt die Segelfläche unter den Voraussetzungen an, dass das Gewicht des Segels vernachlässigt werden kann und dass die zur Segelfläche senkrechte

Druckcomponente in jedem Punkte proportional dem Quadrate der Componente der Windgeschwindigkeit nach dieser Richtung ist?

4) Eine schwere Kette, deren Aufhängepunkte auf einer Horizontalen liegen, wird noch in ihrer Mitte in derselben Horizontalen befestigt, so dass zwei symmetrische Kettenlinien entstehen. Wie findet man die Horizontalspannung und die grösste Spannung in diesen Kettenlinien und zwar *a*) in angenäherter und *b*) in strenger Weise?

5) Welchem Belastungsgesetze entspricht ein Kreis als Kettenlinie?

6) Man bestimme analytisch und statisch eine Kettenlinie, deren Belastungsfläche aus zwei in Bezug auf die Mitte symmetrischen Paralleltrapezen besteht.

7) Wie gross ist die Belastung pro Längeneinheit an einer Hängebrücke von 130 m Spannweite und 10 m Höhenunterschied zwischen den höchsten und niedrigsten Punkten der Kette, wenn ihre grösste Spannung 1500 t beträgt? Man berechne auch die Horizontalspannung.

8) Mehrere gleichbeschaffene homogene Seile sind von einem Punkte A aus geradlinig nach Punkten einer verticalen Geraden L gespannt. A wird um ein Stück AB in horizontaler Richtung nach L hin verschoben. Sieht man die Seile als schwer an, so nehmen sie dann die Form von gewöhnlichen Kettenlinien in einer Verticalebene an. Man beweise:

a) dass diese Kettenlinien denselben Parameter a besitzen;

b) dass ihre Scheitel auf einer Kettenlinie mit dem Parameter a, dem Scheitel B und der convexen Seite nach oben gekehrt liegen.

9) Eine Kettenlinie besteht aus einem schweren homogenen Seile, dessen Querschnitt in jedem Punkte proportional der Spannung ist (Gleichstarke Kettenlinie). Man stelle die Gleichung der Kettenlinie auf und bestimme die Spannung in jedem Punkte.

Zehnter Abschnitt.

Princip der virtuellen Arbeit.

§ 81.

Princip der virtuellen Arbeit an einem freien Punkte und an einem freien starren Körper.

In den vorhin behandelten Abschnitten wurden die Gleichgewichtsbedingungen für einen materiellen Punkt, einen freien oder einen in irgend einer Weise in seiner Beweglichkeit beschränkten starren Körper u. s. w. aufgestellt. Jeder einzelne Fall wurde dazu besonders betrachtet. Es entsteht jetzt die Frage, ob es eine allgemeine Regel oder ein allgemeines Princip gebe, aus welchem alle diese Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden können. Diese Frage ist zu bejahen; das sog. Princip der virtuellen Arbeiten umfasst alle Gleichgewichtsbedingungen.

Virtuelle Verschiebung und virtuelle Arbeit.

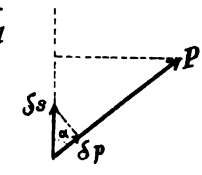


Fig. 284.

Wenn der Angriffspunkt einer Kraft P (Fig. 284) um ein kleines Stück δs in einer Richtung verschoben wird, welche mit der Kraft den Winkel α einschliesst, so ist die von der Kraft verrichtete Arbeit

$$P \cos \alpha \,.\, \delta s.$$

Sie heisst virtuelle Arbeit (auch virtuelles Moment) der Kraft. Der Grund für diese Benennung

liegt darin, dass die Verschiebung δs bei einem zunächst zu betrachtenden freien Punkte beliebig gewählt werden kann, unabhängig davon, ob der Punkt in Ruhe oder in Bewegung sich befindet, und somit eine virtuelle (gedachte oder mögliche) Verschiebung im Gegensatz zu der wirklichen (actuellen) Verschiebung während der Bewegung ist.[1]

Für die virtuelle Arbeit gelten dieselben Sätze wie für die mechanische Arbeit (§ 47). Bezeichnet man die Projection von δs auf die Richtung von P mit δp, so ist $P\delta p$ ein Ausdruck für die virtuelle Arbeit. Diese Grösse kann positiv oder negativ sein und wird gleich Null, wenn entweder $P=0$ ist, oder wenn $\delta p=0$ ist; im letzteren Falle ist die Verschiebung δs senkrecht zur Kraftrichtung oder es kommt gar keine Verschiebung vor. Bezeichnen X, Y und Z die Componenten von P nach drei zu einander senkrechten Axen, δx, δy, δz die Componenten von δs nach denselben Axen, so gilt nach p. 234 die Formel

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

für die virtuelle Arbeit der Kraft P.

Virtuelle Arbeit der Resultirenden.

Auf einen Punkt mögen die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ mit der Resultirenden R wirken. Sind ihre Winkel mit der Richtung der Verschiebung δs bez. $a_1, a_2 \ldots a_n$ und a, so besteht nach p. 234 die Gleichung

$$R \cos a \,.\, \delta s = P_1 \cos a_1 \,.\, \delta s + P_2 \cos a_2 \,.\, \delta s + \ldots . + P_n \cos a_n \,.\, \delta s \tag{263 a}$$

oder in etwas anderer Form

$$R \,.\, \delta r = \Sigma(P\,\delta p), \tag{263 b}$$

[1] Der Elementarweg oder die Verschiebung δs wird oft virtuelle Geschwindigkeit genannt. Das Princip wird deshalb auch sehr oft »Princip der virtuellen Geschwindigkeiten« genannt. Es mag bemerkt werden, dass der Begriff „virtuelle Geschwindigkeit" streng gefasst werden kann, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden soll.

wo δr die Projection der virtuellen Verschiebung δs auf die Richtung von R bedeutet. Diese Formeln enthalten den Satz:

Die virtuelle Arbeit der Resultirenden mehrerer Kräfte mit demselben Angriffspunkte ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten der Componenten, und zwar für jede beliebige Verschiebung des Angriffspunktes. (Man vergleiche den Satz von der Arbeit der Resultirenden auf p. 233).

Princip der virtuellen Arbeit an einem freien Punkte.

Wenn die Kräfte P sich das Gleichgewicht halten, so ist $R = 0$, und es ergiebt sich nach (263 b)

$$\Sigma(P\,\delta p) = 0, \tag{264}$$

d. h. *Die Summe der virtuellen Arbeiten eines im Gleichgewichte sich befindenden Systems von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte ist gleich Null bei jeder Verschiebung des Angriffspunktes.*

Auch der umgekehrte Satz gilt: *Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte für jede Verschiebung des Angriffspunktes gleich Null ist, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.*

Denn aus $$\Sigma(P\,\delta p) = 0$$

ergiebt sich nach (263 b) $R\,.\,\delta r = 0$ und somit entweder $R = 0$ oder $\delta r = 0$. Weil δr nur bei solchen virtuellen Verschiebungen gleich Null ist, welche senkrecht auf R stehen, und die Gleichung $R\,.\,\delta r = 0$ für beliebige Verschiebungen erfüllt ist, so muss $R = 0$ sein, d. h. die Kräfte halten sich das Gleichgewicht, w. z. b. w.

Die Bedingung, dass die Summe der virtuellen Arbeiten am freien Punkte gleich Null sei, wird auch durch die Formel

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0$$

ausgedrückt; sie giebt ferner

$$\delta x\,.\,\Sigma X + \delta y\,.\,\Sigma Y + \delta z\,.\,\Sigma Z = 0.$$

Weil δx, δy und δz von einander unabhängige Werte erhalten können, so kann dieser Gleichung nur dadurch genügt werden, dass die Bedingungen

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$$

erfüllt sind. Dies sind aber die drei Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte mit dem gleichen Angriffspunkt (vergl. p. 179).

Zwei Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten.

Zwei Kräfte, welche in den Endpunkten einer unveränderlichen Strecke AB wirken (Fig. 285), halten sich nur

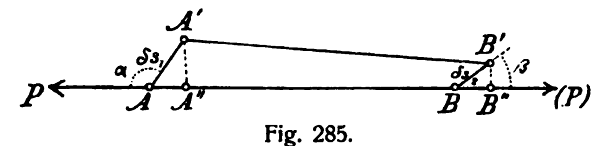


Fig. 285.

dann das Gleichgewicht, wenn sie gleich gross und längs der Strecke AB im entgegengesetzten Sinne gerichtet sind. Es soll eine virtuelle Verschiebung der Strecke AB in die Lage $A'B'$ ausgeführt werden, wobei vorausgesetzt wird, dass ihre Länge unverändert bleibe. Bezeichnet γ den Winkel zwischen AB und $A'B'$, so erhält man für die Projection $A''B''$ von $A'B'$ auf AB

$$A''B'' = A'B' \cos \gamma = AB \cos \gamma.$$

Bei der betrachteten unendlich kleinen oder elementaren Verrückung ist γ ein sehr kleiner Winkel, so dass

$$A''B'' = AB\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \ldots\right) = AB$$

genügend genau folgt. Es ist also auch

$$AA'' = BB''.$$

Für die Summe der virtuellen Arbeiten der Kraft P im Punkte A und (P) im Punkte B findet man nun

$$P\{\delta s_1 \cos \alpha + \delta s_2 \cos \beta\} = P\{- AA'' + BB''\} = 0,$$

d. h. die Summe der virtuellen Arbeiten der beiden sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte ist gleich Null.

Der umgekehrte Satz soll jetzt bewiesen werden. Er lautet: Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten zweier Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten bei einer beliebigen virtuellen Verrückung gleich Null ist, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Nach einem Satze der geometrischen Bewegungslehre kann jede virtuelle Verrückung der Strecke AB durch eine Translation und eine Drehung um einen beliebig zu wählenden Punkt ersetzt werden. Erteilt man der Strecke AB eine Drehung um den Punkt A (Fig. 286), so liefert nur die Kraft P_2 eine virtuelle Arbeit, welche nach unserer Annahme gleich Null sein muss, d. h. man erhält $P_2\, \delta s_2 \cos\beta = 0$.

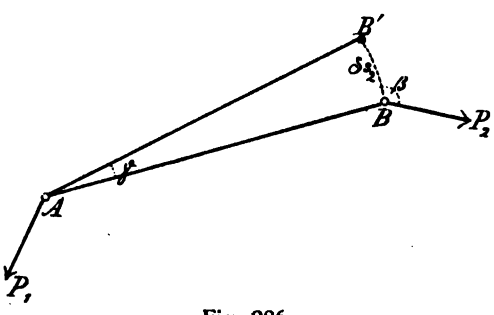


Fig. 286.

Von den drei Factoren der linken Seite kann nur $\cos\beta$ gleich Null sein. Es ergiebt sich somit

$$\beta = 90^\circ$$

und zwar für jede virtuelle Drehung um A, d. h. die Kraft P_2 wirkt längs der Geraden AB. In derselben Weise zeigt eine virtuelle Drehung um den Punkt B, dass auch P_1 längs AB wirkt. Erteilt man ferner AB eine Parallelverschiebung nach der Lage $A'B'$ (Fig. 287), so findet man $\delta p_1 = \delta p_2$ und mit Hülfe der Gleichung

$$P_1\, \delta p_1 + P_2\, \delta p_2 = 0$$

$$P_1 = -P_2.$$

Daraus folgt dass die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

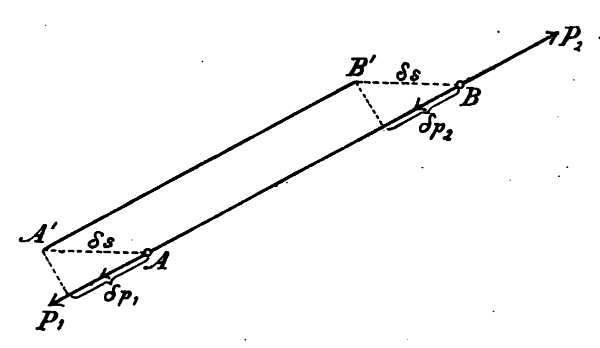


Fig. 287.

Die virtuelle Arbeit einer Kraft verändert sich nicht, wenn die Kraft längs ihrer Richtungslinie nach einem mit ihrem früheren Angriffspunkte unverrückbar verbundenen Angriffspunkte verschoben wird. Denn man findet wie vorher $AA'' = BB''$ (Fig. 288) und folglich $P . AA'' = P . BB''$.

Kräfte in einer Ebene.

Der Satz von der virtuellen Arbeit der Resultirenden, welcher auf p. 418 für Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte bewiesen wurde, gilt auch für Kräfte in einer Ebene.

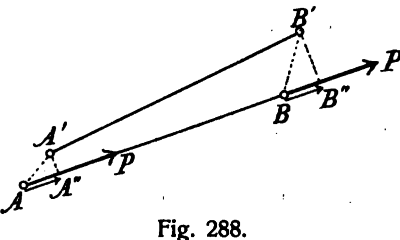


Fig. 288.

Zwei Kräfte P_1 und P_2 können nach ihrem gemeinsamen Schnittpunkte verschoben werden; für ihre Resultirende folgt dabei

$$R_{12}\,\delta r_{12} = P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 .$$

Diese Resultirende wird dann mit einer dritten Kraft P_3 zusammengesetzt u. s. w., bis man alle Kräfte vereinigt hat. Der analytische Ausdruck für den Satz ist

$$R\,\delta r = \Sigma(P\delta p)\,; \tag{265}$$

selbstverständlich müssen die Punkte der Ebene bei jeder virtuellen Verrückung unveränderliche gegenseitige Entfernungen beibehalten.

Kräfte an einem starren Körper.

Es mögen jetzt auf einen starren Körper wirkende Kräfte im Raume betrachtet werden. Nach p. 318 kann das Kräftesystem auf zwei Kräfte Q und S reducirt werden, von denen Q durch einen gegebenen Punkt O geht und S in einer gegebenen Ebene liegt. Eine Kraft P_i, welche in die Componenten Q_i und S_i zerlegt worden ist (Fig. 208), liefert bei einer virtuellen Verrückung des starren Körpers die virtuelle Arbeit

$$P_i\,\delta p_i = Q_i\,\delta q_i + S_i\,\delta s_i.$$

Addirt man diese Gleichungen für alle Kräfte, so erhält man mit Weglassen der Indices auf der linken Seite

$$\Sigma(P\delta p) = \Sigma(Q_i\,\delta q_i) + \Sigma(S_i\,\delta s_i).$$

Nach der Gleichung (263 b) ist

$$Q\delta q = \Sigma(Q_i\,\delta q_i),$$

wo δq die Projection der virtuellen Verschiebung des Punktes O auf die Richtung von Q bezeichnet. Ebenso ergiebt die Gleichung (265)

$$S\delta s = \Sigma(S_i\,\delta s_i),$$

und zwar bedeutet δs die Projection der virtuellen Verschiebung des Angriffspunktes von S auf die Richtung dieser Kraft. Man findet also

$$\Sigma(P\delta p) = Q\delta q + S\delta s. \tag{266}$$

Diese Gleichung liefert in einer bequemen Form die Summe der virtuellen Arbeiten des räumlichen Kräftesystemes.

Damit das Kräftesystem im Gleichgewichte sei, müssen $Q=0$ und $S=0$ sein. Nach (266) findet man dann

$$\Sigma(P\delta p) = 0,$$

d. h. die Summe der virtuellen Arbeiten sämtlicher Kräfte ist gleich Null.

Ist umgekehrt diese Summe gleich Null für alle möglichen virtuellen Verschiebungen des starren Körpers, so besteht Gleichgewicht. Denn nach der Gleichung (266) ist

$$Q\delta q + S\delta s = 0.$$

Die virtuelle Verrückung bestehe in einer Drehung um den Punkt O. Dann ist $\delta q = 0$ und die Gleichung $S\delta s = 0$ liefert im allgemeinen

$$S = 0.$$

Um $Q\delta q$ jetzt für eine beliebige virtuelle Verrückung, welche keine Drehung um O ist, zu Null zu machen, muss man

$$Q = 0$$

setzen. Die Behauptung ist hiermit bewiesen.

Anwendung.

Gleichgewicht eines räumlichen Kräftesystems.

Mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten kann man die Bedingungen des Gleichgewichtes für ein Kräftesystem im Raume ableiten und zwar in folgender Weise.

Es sei P eine Kraft mit den Componenten X, Y, Z in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume, der Angriffspunkt habe die Coordinaten x, y, z in Bezug auf dasselbe System. Die virtuelle Arbeit der Kraft ist

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Im Falle des Gleichgewichts ist also

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \tag{267}$$

Wenn n Kräfte gegeben sind, so enthält die linke Seite dieser Gleichung $3n$ Glieder und ebenso viele Verschiebungscomponenten. Diese sind aber nicht von einander

unabhängig, sondern können durch sechs Grössen ausgedrückt werden, wie man aus dem folgenden ersieht. Eine beliebige virtuelle Verrückung des starren Körpers kann aus einer Drehung um eine durch den Coordinatenanfangspunkt O (Fig. 289) gehende Axe und einer translatorischen Verschiebung zusammengesetzt werden. Die Translation wird durch ihre drei Componenten δu, δv und δw parallel den Coordinatenaxen bestimmt; die Drehung um eine durch O gehende Axe kann durch Drehungen um die Winkel $\delta\varphi$, $\delta\psi$ und $\delta\chi$ um die drei Coordinatenaxen ersetzt werden (§ 31). Zu dem Ausdrucke für δx tragen nur die Translation δu und die Drehungen $\delta\psi$ und $\delta\chi$ bei,

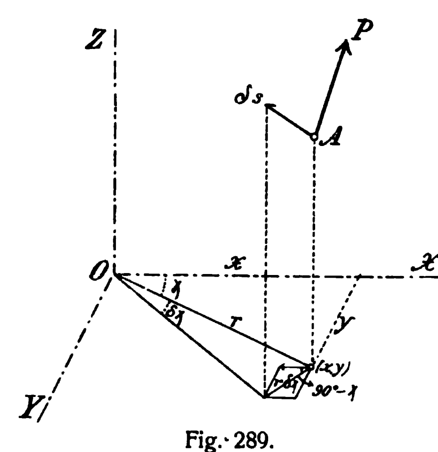


Fig. 289.

während die Translationen in den Richtungen der y- oder z-Axe und die Drehung um die x-Axe auf δx keinen Einfluss haben. Durch die unendlich kleine Drehung $\delta\chi$ im positiven Sinne um die z-Axe bewegt sich die Projection des Punktes A auf die xy-Ebene um die Strecke $r\delta\chi$ (siehe die Figur); die Projection dieser Strecke auf die x-Axe ist

$$-r\delta\chi \sin\chi = -y\delta\chi.$$

In derselben Weise findet man den von der Drehung $\delta\psi$ herrührenden Anteil $z\delta\psi$ an δx. Ebenso können δy und δz berechnet werden, und zwar findet man

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta u + z\delta\psi - y\delta\chi, \\ \delta y &= \delta v + x\delta\chi - z\delta\varphi, \\ \delta z &= \delta w + y\delta\varphi - x\delta\psi. \end{aligned} \tag{268}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (267) ein und ordnet die Glieder zweckmässig, so erhält man

$$(269)\quad \Sigma X \,.\, \delta u + \Sigma Y \,.\, \delta v + \Sigma Z \,.\, \delta w + \Sigma(yZ - zY) \,.\, \delta\varphi + \\ + \Sigma(zX - xZ) \,.\, \delta\psi + \Sigma(xY - yX) \,.\, \delta\chi = 0 \,.$$

Weil die sechs Grössen δu, δv, δw, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\chi$ von einander unabhängig sind, so kann dieser Gleichung nur dadurch genügt werden, dass der erste Factor jedes Gliedes gleich Null ist. Dabei ergeben sich die bekannten sechs Gleichgewichtsbedingungen (176) am starren Körper, d. h.

$$\Sigma X = 0 \,, \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0 \,,$$
$$\Sigma Y = 0 \,, \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0 \,,$$
$$\Sigma Z = 0 \,, \qquad \Sigma(xY - yX) = 0 \,.$$

Um zu zeigen, dass der erste Factor jedes Gliedes von (269) gleich Null sein muss, nehme man z. B. an, dass alle diese Factoren ausser $\Sigma(yZ - zY)$ gleich Null seien. Wählt man dann als virtuelle Verschiebung eine Drehung um die x-Axe, so ist

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \,,$$

$$\delta\psi = \delta\chi = 0 \,,$$

aber $\delta\varphi$ nicht gleich Null, somit auch die linke Seite der Gleichung (269), welche sich auf

$$\Sigma(zY - zY) \,.\, \delta\varphi$$

reducirt, nicht Null. Dies ist unmöglich; folglich muss der Factor in jedem Gliede für sich gleich Null sein.

§ 82.

Princip der virtuellen Arbeit an nicht freien Körpern und an veränderlichen Systemen.

Bedingungen und Widerstandskräfte.

Es werde jetzt eine Anzahl von Fällen betrachtet, in welchen eine Beschränkung der freien Beweglichkeit des von äusseren Kräften angegriffenen Systemes besteht. Es wird vorausgesetzt, dass die sie beschränkenden Bedingungen durch Widerstandskräfte, welche keine tangentialen oder Reibungskräfte sind, ersetzt werden können. Ist das System ein starrer Körper, so erhält man den Satz:

Nicht freier starrer Körper.

Beim Gleichgewichte eines starren Körpers, auf welchen die Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$ wirken und dessen freie Beweglichkeit durch gewisse Bedingungen beschränkt ist, die man durch die Kräfte N_1, $N_2 \ldots N_m$ ersetzen kann, ist die Summe sämtlicher virtueller Arbeiten der Kräfte P und N gleich Null, d. h.

$$\Sigma(P\delta p) + \Sigma(N\delta n) = 0, \tag{270}$$

und zwar für beliebige virtuelle Verschiebungen.

Beispiele für diesen Fall sind: Der starre Körper mit einem festen Punkte, der starre Körper mit einer festen Axe, ein starrer Körper, bei welchem ein oder mehrere Punkte gezwungen sind sich auf gegebenen Curven oder auf gegebenen Flächen zu befinden u. s. w. In dem festen Punkte ist eine durch ihn gehende Reaction (§ 71) vorhanden; an der festen Axe können Widerstandskräfte in zwei beliebigen Punkten der Axe angebracht gedacht werden (§ 72), in Punkten, die auf vorgeschriebenen Curven oder Flächen liegen müssen, treten zu denselben normale Drücke auf, dagegen keine tangentialen Reibungskräfte.

Unter allen möglichen virtuellen Bewegungen eines Systemes mit beschränkter Beweglichkeit scheidet man diejenigen aus, für welche die Gleichung

$$(271) \qquad \Sigma(N\delta n) = 0$$

besteht, d. h. die Summe der virtuellen Arbeiten der Bedingungskräfte verschwindet. Sie werden mit den Bedingungen des Systemes verträgliche virtuelle Bewegungen genannt. Beispielsweise ist bei einem Körper mit einem festen Punkte O bei einer Drehung um O die virtuelle Arbeit $N\delta n$ der Widerstandskraft gleich Null, weil O sich nicht bewegt; ebenso bei einem Körper mit einer festen Axe; in Punkten, welche längs gegebener glatter Curven oder auf gegebenen glatten Flächen gleiten, sind die Widerstandskräfte senkrecht zu den virtuellen Verschiebungen längs der Curven oder Flächen, somit die virtuelle Arbeit gleich Null u. s. w.

Wenn die Aufgabe nur auf die Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen für die gegebenen Kräfte an dem in seiner Beweglichkeit beschränkten Systeme hinausläuft, so genügt es mit den Bedingungen des Systemes verträgliche virtuelle Bewegungen vorzunehmen; sollen dagegen auch die Widerstandskräfte bestimmt werden, so muss man auch andere virtuelle Verschiebungen in Betracht ziehen.

Der Satz von der virtuellen Arbeit an einem in seiner Beweglichkeit beschränkten System kann jetzt so formulirt werden:

Für alle mit den Bedingungen des Systemes verträgliche virtuelle Bewegungen ist im Gleichgewichtszustande die Summe der virtuellen Arbeiten der gegebenen Kräfte gleich Null, und umgekehrt: *Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten von Kräften, welche auf ein in seiner Beweglichkeit beschränktes System wirken, für alle mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Bewegungen verschwindet, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.*

Der letztere Teil des Satzes muss noch bewiesen werden. Würde man annehmen, dass $\Sigma(P\delta p)$ gleich Null wäre, ohne dass Gleichgewicht bestehen würde, so müsste

eine Bewegung zu Stande kommen, in welcher wenigstens einige der Punkte des Systemes Beschleunigungen erlangen würden. Das Entstehen einer solchen Beschleunigung eines Punktes mit bekannter Masse könnte durch das Anbringen einer Kraft Q verhindert werden, welche dem Punkte für sich allein die gleiche und entgegengesetzte Beschleunigung erteilen würde. Die Kräfte P und Q würden dann (zusammen mit den Widerstandskräften) ein System von Kräften im Gleichgewichte bilden, und man erhielte nach dem ersten Teile des Satzes

$$\Sigma(P\delta p) + \Sigma(Q\delta q) = 0. \tag{272}$$

Weil die Richtungen von Q und δq nach dem obigen entgegengesetzt sind, so wären $Q\delta q$ und $\Sigma(Q\delta q)$ negativ, und es müsste $\Sigma(P\delta p)$ positiv sein, im Widerspruch mit der getroffenen Annahme. Folglich bleibt nur die Möglichkeit übrig, dass Gleichgewicht vorhanden sei.

Veränderliche Systeme.

An einem veränderlichen System, welches aus starren Körpern besteht, deren Beweglichkeit beschränkt ist, z. B. so dass sich die Körper in gewissen Punkten mit glatten Flächen gegen einander stützen oder auf gewissen glatten Flächen ruhen u. s. w., kann das Princip der virtuellen Arbeit auf das System als ein Ganzes angewandt werden. Man kann aber auch einen Körper für sich herausgreifen, die von den übrigen Körpern herrührenden Widerstandskräfte anbringen und auf das so erhaltene System der äusseren Kräfte und der Widerstandskräfte das Princip anwenden.

Für veränderliche Systeme kann das Princip der virtuellen Arbeit, welches das Grundprincip der Statik ist, so formulirt werden:

Zum Gleichgewichte eines Kräftesystemes an einem beliebigen, veränderlichen System, dessen Punkte gewissen Bedingungen unterworfen sind, ist die erforderliche und notwendige Bedingung, dass die Summe der virtuellen Ar-

beiten sämtlicher Kräfte für jede mit den Bedingungen verträgliche Verschiebung gleich Null sei.

Dabei ist vorausgesetzt, dass alle Hindernisse einer freien Bewegung der einzelnen Teile eines Systems sog. doppelseitige Hindernisse seien (siehe p. 201). So darf z. B. ein Punkt, welcher genötigt ist in einer gegebenen Fläche zu bleiben, sich weder nach der einen noch nach der anderen Richtung der Normalen von der Fläche entfernen können; einem auf einer Curve befindlichen Punkte muss man in jeder Lage eine virtuelle Bewegung sowohl nach der einen wie nach der anderen Seite längs der Curve erteilen können; eine virtuelle Drehung um eine Axe muss in beiden Richtungen ausführbar sein u. s. w.

§ 83.

Anwendungen des Princips der virtuellen Arbeit.

1) Der gewöhnliche und der Winkelhebel.

Gleichgewicht am Hebel.

Bei dem zweiarmigen Hebel in der Figur 290 a seien P und Q beliebige Belastungen und G das in dem Schwerpunkte S wirkende eigene Gewicht. Der Hebel ist horizontal, die Kräfte P, Q und G sind vertical und befinden sich in den Abständen p, q und c von dem Stützpunkte C.

Fig. 290 a.

Fig. 290 b.

Die einzige mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Bewegung ist eine Drehung um einen kleinen Winkel $\delta\varphi$ um den Punkt C. Dabei liefern P, Q und G der Reihe nach die virtuellen Arbeiten $Pp\delta\varphi$, $-Qq\delta\varphi$ und $Gc\delta\varphi$. Es muss also

$$Pp\delta\varphi - Qq\delta\varphi + Gc\delta\varphi = 0$$

sein; die Gleichgewichtsbedingung ist somit

$$Pp = Qq - Gc.$$

Für den einarmigen Hebel (Fig. 290 b) erhält man in derselben Weise

$$Pp = Qq + Gc.$$

Aus den gefundenen Gleichungen kann die zur Hebung der Last Q erforderliche Kraft P berechnet werden. Um die Reaction im Drehpunkte C zu bestimmen, erteilt man dem Hebel eine mit den Bedingungen nicht verträgliche virtuelle Bewegung, am einfachsten eine verticale und eine horizontale Translation. Es ergiebt sich in dieser Weise, dass die Reaction vertical ist und im Falle *a*) die Grösse $Q + G + P$, in dem Falle *b*) die Grösse $Q + G - P$ hat.

Gleichgewicht am Winkelhebel.

Am Winkelhebel in der Figur 291 sind die Kraft P und die Last Q senkrecht zu den Hebelarmen. Benützt man die in der Figur eingeführten Bezeichnungen, so liefern bei einer virtuellen Drehung von der Grösse $\delta\varphi$ um den Stützpunkt die

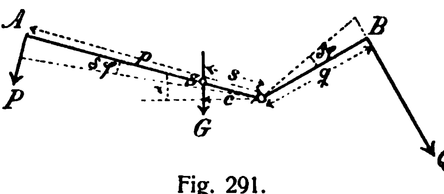


Fig. 291.

Kraft P die virtuelle Arbeit $Pp\delta\varphi$, die Last Q die Arbeit $-Qq\delta\varphi$ und das eigene Gewicht die Arbeit $Gs\delta\varphi \,.\, \cos\alpha = Gc\delta\varphi$. Man findet also die Gleichgewichtsbedingung

$$Pp = Qq - Gc.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Hebel können in den bekannten Satz zusammengefasst werden: *Es muss die Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt des Hebels gleich Null sein.*

2) Ein homogener Stab von constanter Dicke von der Länge l und dem Gewichte G ruht mit seinem unteren Ende auf einer glatten horizontalen Ebene und stützt sich mit dem oberen Ende gegen eine glatte verticale Wand (Fig. 292). Die durch den Stab geführte Verticalebene steht senkrecht zur Schnittlinie k der beiden Ebenen. Am unteren Ende des Stabes ist ein Seil befestigt, das über eine Rolle bei k geführt wird und ein Gewicht P trägt. Die Gleichgewichtslage und die Reactionen am Stabe sollen bestimmt werden.

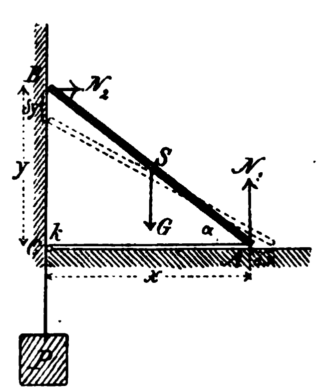


Fig. 292.

Man erteile dem Stabe eine solche virtuelle Verschiebung, dass die Endpunkte in den Unterstützungsebenen um unendlich kleine Stücke gleiten, und zwar um das Stück δx in der horizontalen und um das Stück $-\delta y$ abwärts in der verticalen Ebene. Dabei wird das Gewicht P um δx gehoben, und der Schwerpunkt des Stabes senkt sich in verticaler Richtung um $-\frac{1}{2}\,\delta y$. Aus dem Princip der virtuellen Arbeit ergiebt sich jetzt

$$-P\delta x - \tfrac{1}{2}\,G\delta y = 0,$$

also

$$\frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{G}{2P}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$x^2 + y^2 = l^2$$

erhält man

$$x\delta x + y\delta y = 0,$$

oder

$$\frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{y}{x}.$$

Schliesslich findet man die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{y}{x} = \frac{G}{2P} = \operatorname{tg} \alpha,$$

wo α der Neigungswinkel des Stabes gegen die Horizontalebene ist.

Die Reaction N_1 ergiebt sich bei einer kleinen translatorischen Verschiebung im verticalen Sinne um den Betrag δy. Es ist nämlich

$$N_1 \, \delta y - G \, \delta y = 0,$$

also

$$N_1 = G.$$

Durch eine kleine Translation δx im horizontalen Sinne folgt ebenso

$$N_2 \, \delta x - P \delta x = 0$$

und

$$N_2 = P.$$

In der Gleichgewichtslage bilden N_1 und G einerseits, N_2 und die Spannung P im Seile andererseits zwei Kräftepaare mit gleich grossen Momenten von entgegengesetzten Vorzeichen.

3) Die Brückenwage.

Die Anordnung der Brückenwage ist in der Figur 293 schematisch angegeben. An dem um C drehbaren

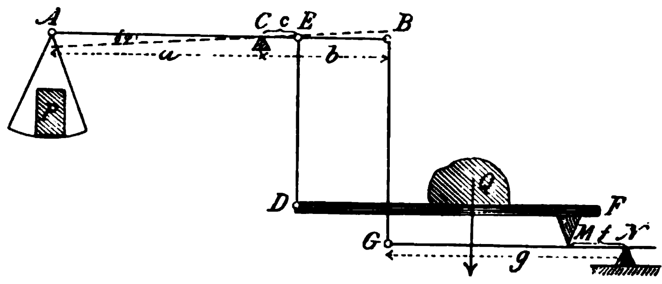


Fig. 293.

Hebel AB sind durch Gelenke die Stangen ED und BG angehängt, von welchen die erstere mit der Brücke DF, die letztere mit dem Hebel GN gelenkartig verbunden ist. DF ist in M, GN in N unterstützt.

Die Belastung Q kann irgendwo auf der Brücke angebracht werden. Das Gewicht P, durch das sie gemessen wird, kann man sich im Punkte A wirkend denken.

Es werde eine kleine Drehung des Hebels AB im Betrage $\delta\varphi$ um C vorgenommen. Dabei erfahren A eine Senkung $\delta p = a\delta\varphi$, E und D die Hebung $c\delta\varphi$, B und G die Hebung $b\delta\varphi$ und M die Hebung $\frac{f}{g} b\delta\varphi$. Bezeichnet $-\delta q$ die verticale Verschiebung von Q, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$P\delta p + Q\delta q = 0.$$

Damit die Wage brauchbar sei, muss δq unabhängig von der Lage von Q auf der Brücke sein, d. h. die Brücke, welche ursprünglig horizontal war, muss auch nach der virtuellen Bewegung horizontal bleiben. Dazu ist erforderlich, dass die Erhöhungen von D und M gleich gross seien, d. h. dass

$$c\delta\varphi = \frac{f}{g} b\delta\varphi,$$

oder

$$\frac{c}{b} = \frac{f}{g}$$

sei. Dies ist also eine geometrische Bedingung, welche bei der Construction der Wage möglichst genau erfüllt werden muss. Man erhält dann

$$\delta q = -\, c\delta\varphi$$

und

$$Pa\delta\varphi - Qc\delta\varphi = 0,$$

oder

$$P = \frac{c}{a} Q.$$

Decimal- und Centesimal-wage.

Bei einer Decimalwage ist $\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$; die Last ist zehn Mal so gross als das Gewicht.

Bei der Wägung sehr grosser Lasten, wie z. B. von Eisenbahnwagen, macht man häufig das Verhältnis $\frac{c}{a} = \frac{1}{100}$, und die Wage ist eine sog. Centesimal-wage.

4) Vier gleich lange, mit einander durch Gelenke verbundene Stangen bilden ein System, dessen Endpunkte in einer horizontalen Geraden befestigt sind (Fig. 294). In den Knotenpunkten wirken gleich grosse verticale Belastungen. Die eigenen Gewichte der Stangen werden ausser Betracht gelassen. Man bestimme die Gleichgewichtslage. In der Gleichgewichtslage muss

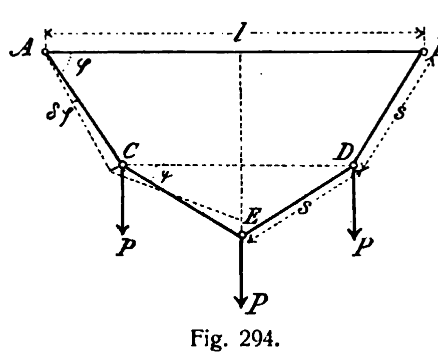


Fig. 294.

$$\Sigma(P\delta y) = 0$$

sein, wobei δy die verticale Senkung des Angriffspunktes einer Kraft P ist. Wenn der Winkel φ um $\delta\varphi$ wächst, so beschreibt der Endpunkt C des Stabes AC den Bogen $s\delta\varphi$, dessen verticale Projection

$$s\delta\varphi \cos\varphi$$

ist. Die verticale Verschiebung des Knotenpunktes E ist die Summe der verticalen Verschiebung des Punktes C

und eines zweiten von der Veränderung des Winkels ψ herrührenden Betrages

$$s\delta\psi \cos\psi .$$

Für die drei Kräfte P folgt also die Gleichung

$$2\,Ps\delta\varphi \cos\varphi + P(s\delta\varphi \cos\varphi + s\delta\psi \cos\psi) = 0$$

oder

$$3\,\delta\varphi \cos\varphi + \delta\psi \cos\psi = 0 .$$

Man hat ferner

$$2s\,(\cos\varphi + \cos\psi) = l$$

und erhält hieraus durch Differentiation zwischen $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ die Beziehung

$$\sin\varphi\,\delta\varphi + \sin\psi\,\delta\psi = 0 .$$

Als Gleichgewichtsbedingung ergiebt sich also

$$3\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi},$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\psi .$$

Die Winkel φ und ψ können aus dieser Gleichung in Verbindung mit

$$\frac{l}{2s} = \cos\varphi + \cos\psi$$

berechnet werden.

Mit der speciellen Annahme

$$l = 2s$$

ergiebt die Elimination von ψ zwischen den beiden letzten Gleichungen für $\cos\varphi$ die Gleichung vierten Grades

$$8\cos^4\varphi - 16\cos^3\varphi - 2\cos\varphi + 1 = 0 .$$

Man findet hieraus $\varphi = 72^\circ 11' 6''$.

Zugbrücke. 5) Eine Zugbrücke (Fig. 295) sei um das eine Ende drehbar. Am anderen Ende sei eine Kette befestigt, die über eine Rolle geführt wird und ein Gewicht Q trägt. Dieses Gewicht sei längs einer gewissen Curve verschiebbar. Welche Form muss diese Curve haben, damit die Brücke in jeder Lage im Gleichgewichte sei?

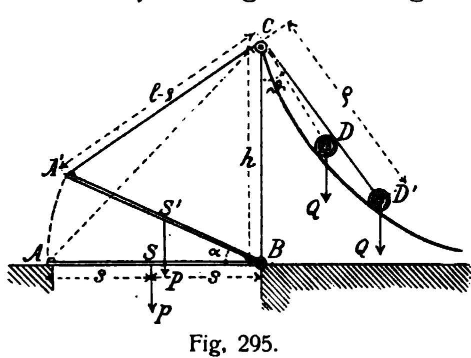


Fig. 295.

Es sei P das Gewicht der Brücke, $2s$ ihre Länge, h die Höhe der Rolle über dem Brückenende B, l die ganze Länge der Kette und Q das Gegengewicht. In einem polaren Coordinatensystem mit C als Pol und CB als Axe seien ϱ und ϑ die Coordinaten eines Punktes der gesuchten Curve. Vergrössert man den Neigungswinkel α der Brücke um den unendlich kleinen Betrag $\delta\alpha$, so hebt sich der Schwerpunkt um $s\delta\alpha\cos\alpha$, während Q um $\delta(\varrho\cos\vartheta)$ sinkt. Das Princip der virtuellen Arbeit liefert also die Gleichung

$$Q\delta\,(\varrho\cos\vartheta) - Ps\,\delta\alpha\cos\alpha = 0.$$

Aus der Bedingung, dass die Länge der Kette unverändert bleibe, ergiebt sich die Gleichung

$$(l-\varrho)^2 = 4s^2 + h^2 - 4s\,h\sin\alpha.$$

Durch Differentiation findet man

$$2sh\cos\alpha\,\delta\alpha - (l-\varrho)\,\delta\varrho = 0.$$

Wenn man zwischen den beiden Gleichungen $\delta\alpha$ eliminirt, so folgt

$$2\,Qh\,\delta\,(\varrho\cos\vartheta) - P\,(l-\varrho)\,\delta\varrho = 0.$$

Da bei einer virtuellen Verrückung das Gewicht Q längs einer bestimmten Curve geleitet wird, so kann δ durch das Differentiationszeichen ersetzt werden; man erhält

$$2\,Qh\,d\,(\varrho \cos \vartheta) - P\,(l - \varrho)\,d\varrho = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$4\,Qh\varrho \cos \vartheta - 2\,Pl\varrho + P\varrho^2 = C.$$

Wenn die Curve durch den Punkt C gehen soll, so muss $\varrho = 0$ der letzten Gleichung genügen, es ist also $C = 0$; mit der Bezeichnung

$$m = 2\frac{Q}{P}h$$

wird

$$\varrho = 2l - 2m \cos \vartheta;$$

dies ist die Polargleichung der gesuchten Curve.

Die Curve ist eine Fusspunktcurve des Kreises und wird in folgender Weise construirt (Fig. 296). Vom dem Punkte C aus trägt man vertical nach oben das Stück $2m$ ab und construirt um den so erhaltenen Punkt M als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $2l$. An diesen Kreis ziehe man eine beliebige Tangente GD. Es ist dann der Fusspunkt D der Senkrechten von C auf GD ein Punkt der Curve, denn man hat

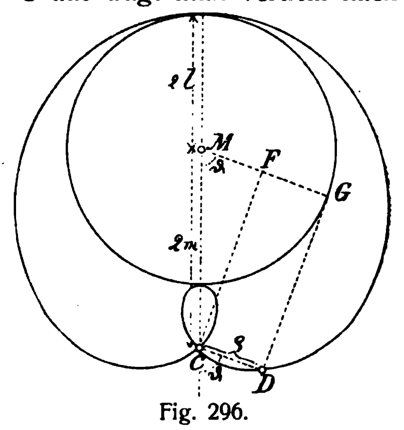


Fig. 296.

$$MF = 2m \cos \vartheta,$$
$$CD = FG = 2l - 2m \cos \vartheta = \varrho.$$

Bifilarpendel. 6) Welches in einer horizontalen Ebene liegende Kräftepaar muss an einem Bifilarpendel angebracht werden, damit Gleichgewicht bei einer bestimmten Ablenkung vorhanden sei?

Das Bifilarpendel besteht aus einem homogenen, cylindrischen Stabe von der Länge 2λ und dem Gewichte G (Fig. 297), welches an seinen Enden vermittelst zweier gewichtsloser Fäden von der Länge l aufgehängt ist. Die oberen Enden der Fäden befinden sich in einer Horizontalebene in dem Abstande 2λ von einander.

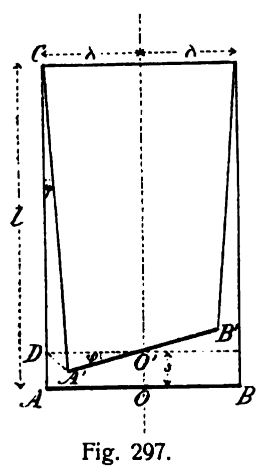


Fig. 297.

Durch eine Drehung um den Winkel φ in der Horizontalebene hebt sich der Stab um ein Stück s, die beiden Fäden bilden einen gewissen Winkel ψ mit der Verticalen. Es ist

$$s = l(1 - \cos\psi).$$

Durch eine zweite Drehung um einen unendlich kleinen Winkel $\delta\psi$ wächst die Hebung um

$$\delta s = l \sin\psi\, \delta\psi.$$

Die virtuelle Arbeit des Gewichtes G des Stabes hat den Wert

$$-G\,\delta s = -Gl \sin\psi\, \delta\psi.$$

Der Punkt A' bewegt sich um ein Stück, dessen Projection auf eine in der Horizontalebene liegende Senkrechte zu $O'A'$ gleich $\lambda\delta\varphi$ ist. Das Kräftepaar, dessen Moment mit M bezeichnet werde, führt die virtuelle Arbeit $M\delta\varphi$ aus. Aus dem Principe der virtuellen Arbeit ergiebt sich jetzt

$$M\delta\varphi - Gl \sin\psi\, \delta\psi = 0.$$

Zwischen $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ besteht eine Beziehung, welche man durch Differentiation der Gleichung

$$l \sin\psi = 2\lambda \sin\frac{\varphi}{2}$$

erhält, deren beide Seiten die aus den Dreiecken DCA' und $A'DO'$ abzuleitenden Werte von $A'D$ darstellen. Man findet

$$l \cos\psi\, \delta\psi = \lambda \cos\frac{\varphi}{2}\, \delta\varphi .$$

Aus den beiden $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ enthaltenden Gleichungen berechnet man die Gleichgewichtsbedingung

$$M \cos\psi = G\lambda \sin\psi \cos\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$M = G\frac{\lambda^2}{l}\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = \frac{\lambda^2 \sin\varphi}{\sqrt{l^2 - 2\lambda^2(1-\cos\varphi)}}\, G .$$

Wenn λ klein ist im Verhältnis zu l und auch der Ausschlag φ kleine Werte besitzt, so erhält man die Näherungsformel

$$M = \frac{\lambda^2\varphi}{l}\, G .$$

§ 84.

Übungsaufgaben betreffend das Gleichgewicht der Körper.

1) Man leite jede der sechs Gleichgewichtsbedingungen eines freien starren Körpers für sich in der Weise ab, dass man dem Körper eine zweckmässige virtuelle Verschiebung erteilt.

2) Auf eine Schraube, welche sich ohne Reibung in der Schraubenmutter bewegt, wirken eine Kraft in der Längsrichtung und ein Kräftepaar in einer zur Axe senkrechten Ebene. Die Gleichgewichtsbedingung soll aufgestellt werden.

Welches ist die Gleichgewichtsbedingung, wenn die Kraft und das Kräftepaar durch ein beliebiges Kräftesystem ersetzt werden?

3) Man löse die Anwendungen in § 72 mit Hülfe des Principes der virtuellen Arbeit.

4) Eine Fallthür besteht aus einer rechteckigen, überall gleichdicken Platte vom Gewichte G, welche um eine horizontale Seite drehbar ist. Von dem Mittelpunkte der gegenüber liegenden Seite läuft ein Seil über eine Rolle, die sich senkrecht über dem Mittelpunkte der ersten Seite befindet. Welches Gewicht muss am freien Ende des Seiles angebracht werden, damit die Fallthür in einer bestimmten geneigten Lage im Gleichgewichte sei?

5) Man berechne die Spannung der Kette und den normalen Druck des Gewichtes Q auf die Gleitcurve bei der im Beispiele 5), § 83 betrachteten Zugbrücke.

6) Man bestimme die Spannung der Fäden am Bifilarpendel (Beispiel 6), § 83).

7) Der Pfosten einer Thür ist ein wenig gegen die Verticale geneigt. Welches Moment in Bezug auf eine Axe durch die Charniere ist erforderlich um die Thür in einer bestimmten Lage offen zu halten?

8) Zwei schwere, in einer Verticalebene sich befindende Stangen sind durch Gelenke an einer verticalen Wand befestigt sowie durch ein Gelenk an den entgegengesetzten Enden mit einander verbunden. Man berechne die horizontale und die verticale Componente des Druckes in dem letzteren Gelenke.

9) Ein schwerer Ring wird von n gleich langen, gewichtslosen Fäden getragen, welche von einem Punkte O ausgehen und auf den Umkreis des Ringes gleichförmig verteilt sind. Ein anderer Ring mit kleinerem Radius werde über diese Fäden geschoben. Man bestimme die Gleichgewichtslage und die Spannung der Fäden. Besonders zeige man, dass das Verhältnis der Abstände des Punktes O von den Ebenen des kleineren und des grösseren Ringes gleich $2:3$ ist, wenn der kleinere Ring in den Halbirungspunkten der Fäden unterstützt ist.

10) Auf einer glatten horizontalen Ebene ist eine cylindrische Welle befestigt. Ein schwerer Stab wird von der Ebene und der Welle unterstützt. Welche horizontale Kraft muss man am unteren Ende des Stabes anbringen, um ihn in einer bestimmten Lage im Gleichgewichte zu halten?

11) Ein schwerer homogener Stab sei an eine glatte verticale Wand angelehnt und ruhe auf einer horizontalen Kante, über welche der Stab in einer Normalebene zur Wand gleiten kann. Welches ist die Gleichgewichtslage, und welche Bedingung muss immer erfüllt sein? Man berechne auch die Drücke in den Stützpunkten.

12) Ein schwerer Stab stützt sich auf eine horizontale Kante und kann in einer Verticalebene gleiten. Von dem unteren Ende aus führt eine Schnur von unveränderlicher Länge zu einem senkrecht oberhalb der Gleitkante liegenden Punkte. Man bestimme die Gleichgewichtslage.

13) Zwei schwere, gleich lange Stäbe AB und AC sind durch ein Gelenk bei A verbunden. Sie ruhen in einer verticalen Ebene auf einer auf der Kante stehenden glatten Kreisscheibe, und zwar liegt A lotrecht über dem Mittelpunkte der Scheibe. Man bestimme die Gleichgewichtslage.

14) Eine Seite eines ebenen Gelenkviereckes sei fest. In einem Punkte der Gegenseite greife eine in der Ebene des Viereckes liegende Kraft an. Welche Richtung hat diese Kraft in der Gleichgewichtslage?

15) An einem ebenen Gelenkvierecke wirken in der Ebene des Viereckes zwei Kräfte mit gegebenen Angriffspunkten, die auf zwei sich gegenüberstehenden Seiten liegen. Wann befindet sich das System im Gleichgewichte?

Elfter Abschnitt.

Die Lehre von der Reibung.

§ 85.

Allgemeines.

Gleitende Reibung.

Auf einen Körper, welcher auf einer ebenen horizontalen Unterlage ruht, wirken in allen Punkten der Berührungsfläche elementare Kräfte, welche zusammen eine Resultirende geben, die der Schwere des Körpers das Gleichgewicht hält. Wenn die Unterlage und die Berührungsfläche des Körpers vollkommen glatt wären, so hätten alle diese Elementarkräfte die Richtung vertical nach oben (Fig. 298); dasselbe würde noch der Fall sein, wenn der Körper ausser durch seine Schwere durch eine andere verticale Kraft gegen die Unterlage gepresst werden würde. Eine beliebig kleine horizontale Kraft P würde genügen, um den Körper in Bewegung längs der Unterlage zu versetzen. Absolut glatte und starre Körper sind aber in der Natur nicht vorhanden, sondern die Oberflächen aller Körper sind mehr oder weniger uneben. Die Unebenheiten des auf der horizontalen Unterlage ruhenden Körpers sinken in diejenigen der Unterlage hinein und die elementaren Drücke sind nicht mehr

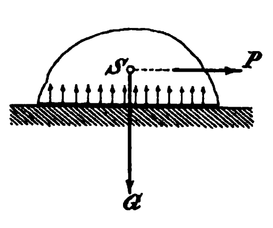


Fig. 298.

vertical, sondern können verschiedene, von der Verticalen abweichende Richtungen besitzen (Fig. 299). Dadurch entsteht ein tangentialer Widerstand bei der Verschiebung des Körpers längs der Unterlage, welcher ausserdem durch andere Ursachen wie die Moleculararadhäsion vermehrt werden kann. Zum Überwinden dieses Widerstandes ist eine Kraft von einer gewissen Grösse erforderlich. Der Widerstand heisst gleitende Reibung oder nur Reibung und wirkt, wie die Erfahrung zeigt, in der entgegengesetzten Richtung zu derjenigen, in welcher eine Bewegung vorhanden ist oder in welcher der Körper das Bestreben hat, sich zu bewegen. Um den ruhenden Körper in Bewegung zu versetzen, ist eine horizontale Kraft erforderlich, welche gleich gross oder grösser wie die gleitende Reibung ist.

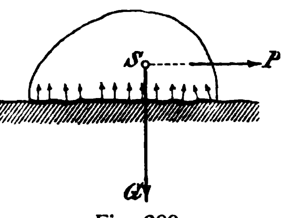


Fig. 299.

Wenn die horizontale ebene Unterlage, auf welcher ein Körper vom Gewichte G ruht, so geneigt wird, dass der Neigungswinkel allmählich wächst, so bleibt der Körper anfangs in Ruhe, und zwar infolge des tangentialen Reibungswiderstandes. Erst wenn der Neigungswinkel eine gewisse Grösse φ erreicht, gerät der Körper in Bewegung (Fig. 300). Die der schiefen Ebene parallele Componente der Schwere ist dann $G \sin \varphi$ und giebt ein Mass für die Reibung ab.

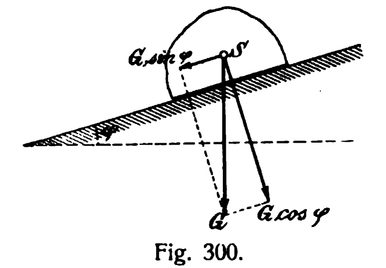


Fig. 300.

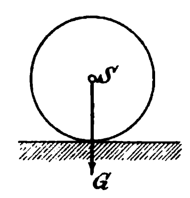
Reibung an Trag- und Stützzapfen.

Als besondere Arten der gleitenden Reibung können die Tragzapfenreibung und die Stützzapfenreibung angesehen werden. Wenn ein Zapfen sich in seinem Lager dreht, so entsteht in den Be-

rührungspunkten ein tangentialer Widerstand, die sog. Zapfenreibung, welche in § 95 genauer untersucht werden soll. Ein Stützzapfen ruht mit seiner Endfläche im Lager; bei der Drehung des Zapfens entstehen in den Stützpunkten tangentiale Kräfte, welche der Bewegung entgegenwirken und zusammen die sog. Stützzapfenreibung bilden (§ 97).

Rollende Reibung.

Wenn ein runder Körper längs einer Unterlage rollt, wie z. B. eine Walze längs einer horizontalen Ebene, so entsteht ein Bewegungswiderstand, welcher w ä l z e n d e oder r o l l e n d e R e i b u n g heisst. Wären die Walze und die Ebene absolut starr und glatt, so würden die verticalen Elementarkräfte an der Stützlinie dem Gewichte G der Walze das Gleichgewicht halten (Fig. 301); ein beliebig kleines Kräftepaar in der Ebene senkrecht zur Berührungslinie würde genügen, um das Rollen, d. h. die momentane Drehung um die Berührungslinie zu erzeugen.



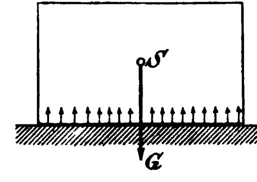


Fig. 301.

In Wirklichkeit verhält sich die Sache etwas anders. Die Walze sinkt ein wenig in die ebene Unterlage hinein, und statt der Stützlinie entsteht ein schmale Stützfläche, längs welcher die Unebenheiten der Körper in einander greifen (Fig. 302). Die Axe der augenblicklichen Drehung wird etwas vorwärts in der Richtung der Bewegung verschoben, so dass die Walze, wenn auch sehr wenig aus ihrer Lage gehoben werden muss, ehe sie zu rollen beginnt. Durch diese Ursachen entsteht die rollende Reibung. Sie ist im allgemeinen weit geringer als die gleitende Reibung, kann aber, wenn sich die Unterlage erheblich deformirt, bedeutende Werte

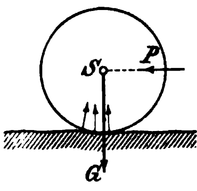


Fig. 302.

erreichen. Die rollende Reibung wird in § 104 behandelt.

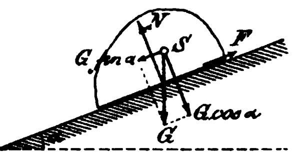
Bohrende Reibung.

Es giebt noch eine andere Art der Reibung. Man stelle sich einen gewichtslosen starren Körper vor, welcher sich in einem Punkte A auf eine Unterlage stützt und bringe an ihm eine längs der Normalen zur Stützfläche im Punkte A wirkende Druckkraft P an. Diese Kraft P kann auch das Gewicht des Körpers sein. Das Gleichgewicht kommt dadurch zu Stande, dass die Unterlage eine zu P entgegengesetzte Kraft auf derselben Richtungslinie erzeugt. Statt des einzigen Stützpunktes A entsteht in Wirklichkeit durch die Formänderung des Körpers und der Unterlage eine kleine Stützfläche, welche sehr nahe die Form einer Ellipsenfläche oder specieller einer Kreisfläche hat. Wenn der Körper in Drehung um die Normale im Punkte A versetzt wird, so entstehen in der elliptischen Stützfläche, welche sich im allgemeinen während der Bewegung verändert, tangentiale Widerstandskräfte, welche die Drehung zu verhindern suchen. Diese Art der Reibung kommt z. B. beim gewöhnlichen Kreisel vor und heisst deshalb Kreiselreibung oder bohrende Reibung. Auf eine nähere Behandlung derselben wird wegen ihrer relativ geringen Bedeutung hier nicht eingegangen.

Abtragen des Reibungswiderstandes.

Um die Lehre von der Reibung am bequemsten zu behandeln, stellt man sich jede ebene Berührungsfläche am Körper als absolut glatt vor und bringt in ihr eine normale Druckkraft N und eine tangentiale Kraft F an, welche die Reibung darstellt und die entgegengesetzte Richtung zu derjenigen hat, in welcher der berührende Körper sich relativ zum berührten Körper bewegt oder sich zu bewegen strebt (Fig. 303). Die Kräfte N und F sind zusammen dem ganzen Systeme der Elementarkräfte äquivalent, welche in Wirklichkeit an der Berührungsfläche vorhanden sind. Über allgemeinere Annahmen betreffend die Kräfte in der Berührugsfläche vergleiche man § 105.

Reibung der Ruhe und der Bewegung.


Fig. 303.

Wenn der Neigungswinkel α einer ebenen Unterlage, auf welcher ein Körper vom Gewichte G ruht, vom Werte Null an allmählich vergrössert wird, so wächst die der Ebene parallele Componente $G \sin \alpha$ der Schwere des Körpers (Fig. 303). Solange das Gleichgewicht fortbesteht, ist die Kraft F der Reibung in jedem Augenblicke gleich jener Componente der Schwere und wächst also. Wie die Erfahrung zeigt, kann sie eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Bei einem gewissen Werte φ des Winkels α beginnt der Körper sich zu bewegen. Die Reibung hat dabei ihren grössten Wert $G \sin \varphi$. Sie heisst völlig entwickelte Reibung der Ruhe oder Reibung beim Übergange aus Ruhe in Bewegung. Die Reibung der Ruhe ist eine veränderliche Kraft, welche alle Werte zwischen Null und dem genannten Grenzwerte annehmen kann.

Nachdem der Körper in Bewegung geraten ist, besitzt die Reibung einen besonderen Wert, welcher Reibung der Bewegung heisst; sie ist etwas kleiner als die völlig entwickelte Reibung der Ruhe. Man erklärt sich diese Thatsache durch die Annahme, dass die Unebenheiten während der Bewegung nicht so vollständig in einander eingreifen wie während der Ruhe. Auch die Reibung der Bewegung kann mit Hülfe der schiefen Ebene bestimmt werden. Behält man nämlich den Neigungswinkel φ, bei welchem der Körper aus der Ruhe in Bewegung überging, unverändert bei, so wird die Bewegung erfahrungsgemäss eine beschleunigte. Um sie in eine gleichförmige zu verwandeln, muss man nach dem Beginn der Bewegung den Neigungswinkel ein wenig verkleinern. Während der gleichförmigen Bewegung besteht Gleichgewicht der Kräfte; die Reibung der Be-

wegung ist demnach gleich der zur schiefen Ebene parallelen Componente der Schwere.

Im folgenden bezeichnet das Wort Reibung im allgemeinen die völlig entwickelte Reibung der Ruhe oder die Reibung der Bewegung und nur dann die unvollständig entwickelte Reibung der Ruhe, wenn es besonders hervorgehoben wird.

Reibungsflächen.

Die Reibung hängt in hohem Grade von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab. Je rauher dieselben sind, desto grösser ist die Reibung, je glatter und härter die Flächen sind, deste kleiner wird die Reibung. Weil aber der Grad der Glätte und Härte nicht mathematisch definirt werden kann, erhält man in der Lehre von der Reibung immer nur annähernd richtige Resultate, welche jedoch in den meisten Fällen für die praktischen Zwecke genügen. .Die Reibung zwischen zwei Flächen wird gewöhnlich im bedeutenden Grade durch Anwendung eines geeigneten Schmiermittels vermindert. Man nimmt an, dass das Schmiermittel mehr oder weniger das Eingreifen der Unebenheiten der Körper in einander verhindert; statt des directen Reibungswiderstandes der Körper tritt wenigstens zum Teil ein von einer inneren Reibung im Schmiermittel herrührender Widerstand.

Die Reibung ist verschieden zwischen verschiedenen Körpern; auch die Temperatur der Berührungsflächen übt einen Einfluss aus und zwar so, dass die Reibung im allgemeinen mit wachsender Temperatur zunimmt. Auch die relative Geschwindigkeit der Körper hat, wenn auch im geringen Grade, Einfluss auf die Reibung der Bewegung. Die Gesetze hierfür sind aber nur unvollständig bekannt.

Reibungscoefficient.

Durch Versuche, welche Coulomb, Morin u. a. über die gleitende Reibung ausgeführt haben, hat sich als Hauptresultat ergeben, dass *unter sonst gleichen Umständen die Reibung zwischen zwei sich berührenden Flächen direct proportional dem normalen Drucke N zwischen den*

Flächen und unabhängig von der Grösse der Flächen ist. Nach diesem Gesetze, welches jedoch kein völlig strenges ist, erhält man für die Reibungskraft F beim Übergange aus Ruhe in Bewegung oder während der Bewegung den Ausdruck

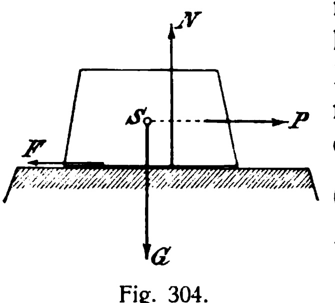


Fig. 304.

$$F = fN, \tag{273}$$

worin f den sog. Reibungscoefficienten bezeichnet (Fig. 304). Der Reibungscoefficient für den Übergang aus Ruhe in Bewegung ist etwas grösser als der Reibungscoefficient während der Bewegung; beide müssen übrigens experimentell bestimmt werden. Es sollen keine besonderen Bezeichnungen der Reibungscoefficienten beim Übergange aus Ruhe in Bewegung und während der Bewegung benützt werden, weil die dafür aufzustellenden Formeln oft für beide Fälle gelten und eine Verwechselung in dieser Beziehung ohne Schwierigkeit zu vermeiden ist. Die Formel (273) enthält den Satz:

Man erhält die Grösse der Reibung in der Weise, dass man den normalen Druck zwischen den Berührungsflächen mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt.

Die unvollständig entwickelte Reibung der Ruhe erfüllt die Ungleichheit

$$F < fN, \tag{274}$$

worin f den Reibungscoefficienten beim Übergange aus Ruhe in Bewegung bezeichnet.

Wenn ein ruhender Körper mehrere Stützpunkte oder Stützflächen besitzt, so braucht die Reibung nicht an allen im gleichen Masse entwickelt zu sein; man muss in einem solchen Falle für die einzelnen Stützpunkte besondere Untersuchungen anstellen.

Der oben angeführte Satz, dass die Reibung unabhängig von der Grösse der Berührungsflächen ist, steht in Übereinstimmung mit der Gleichung (273). Denkt man sich die normale Kraft N, welche an einer Fläche von der Grösse A wirkt, gleichförmig auf die ganze Fläche verteilt, so kommt auf die Flächeneinheit der Druck $p = \frac{N}{A}$ und der Reibungswiderstand $fp = f\frac{N}{A}$, somit auf die ganze Fläche A der Reibungswiderstand $fpA = fN$. Die Reibung pro Flächeneinheit verändert sich dagegen, wenn die Grösse der Berührungsfläche variirt, umgekehrt proportional dem Flächeninhalte.

Reibungswinkel.

Die Reibung kann wie auf p. 446 erwähnt wurde, mit Hülfe der schiefen Ebene bestimmt werden. Man beobachtet den Neigungswinkel φ, bei welchem der Körper längs der Ebene zu gleiten anfängt, und den Winkel φ, bei welchem die Gleitung gleichförmig erfolgt. Hieraus berechnet man die beiden Reibungscoefficienten. In der That ist der normale Druck

$$N = G \cos \varphi.$$

Nach der Gleichung (273) muss

$$F = fN = fG \cos \varphi$$

sein, während andererseits

$$F = G \sin \varphi$$

ist. Also ergiebt sich

$$G \sin \varphi = fG \cos \varphi$$

und

$$f = \operatorname{tg} \varphi, \tag{275}$$

d. h. *der Reibungscoefficient ist gleich der Tangente des Neigungswinkels der Ebene.* Der Winkel φ, welcher für einen gegebenen Wert von f der Gleichung (275) genügt, heisst R e i b u n g s w i n k e l. Der Neigungswinkel muss also gleich dem Reibungswinkel sein.

Reibungskegel.

Auf einen Körper, welcher auf einer horizontalen Unterlage ruht (Fig. 305) und entweder längs der Unterlage verschoben wird oder im Begriffe steht in Bewegung überzugehen, wirken als Widerstandskräfte in der Berührungsfläche ein normaler Druck N und eine Reibung $F = fN$. Die Resultirende dieser beiden Kräfte ist eine Kraft K, welche mit der Verticalen den Reibungswinkel φ einschliesst. Stellt man sich alle möglichen Bewegungsrichtungen vor, so bilden die entsprechenden Kräfte K die Erzeugenden eines geraden Kegels, welcher die Normale zur Berührungsfläche als Axe hat. Dieser Kegel heisst Reibungskegel. Wenn der Körper sich in Ruhe befindet und die Reibung nur unvollständig entwickelt ist, so liefern der normale Druck und die Reibung eine durch die Spitze des Reibungskegels gehende, innerhalb des Kegels liegende Resultirende. Ausserhalb des Kegels fallende nicht normale Widerstandskräfte sind überhaupt nicht möglich.

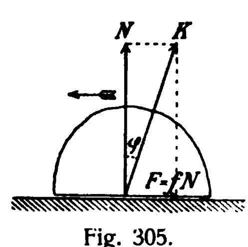


Fig. 305.

In der nachfolgenden Tabelle sind einige, meistens dem Handbuch „Hütte“ entnommene Werte des Reibungscoefficienten und des Reibungswinkels während der Bewegung und beim Übergange aus Ruhe in Bewegung unter der Voraussetzung zusammengestellt, dass die Berührungsflächen glatt bearbeitet worden sind.

	Bewegung		Ruhe	
	$f = \mathrm{tg}\,\varphi$	φ	$f = \mathrm{tg}\,\varphi$	φ
Bronze auf Bronze, trockene Flächen	0.20	11°.3	—	—
Gusseisen auf Gusseisen oder Bronze, wenig fettige Flächen	0.15	8°.5	—	—
Schweisseisen auf Schweisseisen, trockene Flächen	0.44	23°.8	—	—
Gusseisen auf Eiche, trockene Flächen	0.49	26°.1	—	—
„ „ „ , mit trock. Seife	0.19	10°.7	—	—
Eiche auf Eiche, parallele Fasern, trock. Fl.	0.48	25°.6	0.62	31°.8
„ „ „ „ mit Seife	0.16	9°.1	0.44	23°.8
„ „ „ Fasern quer, trock. Fl.	0.34	18°.8	0.54	28°.6
„ „ „ Hirnholz auf Langholz, trock. Fl	0.19	10°.7	0.43	23°.3
Lederriemen auf Eichentrommel, trock. Fl.	0.27	15°.1	0.47	25°.8
„ „ Gusseisen, „ „	—	—	0.28	15°.6
„ „ „ mit Wasser	0.36	19°.8	0.38	20°.8
Steine auf Schweisseisen, trock. Fl.	—	—	0.45	24°.2
Steine oder Ziegel auf Ziegel, trock. Fl.	—	—	0.50—0.75	26°.6 – 36°.9
Steine auf Holz, im Mittel, trock. Fl.	—	—	0.60	31°.0
Stahl auf Eis	0.014	0°.8	—	—

Über die Bedeutung der Reibung.

Oben ist gezeigt worden, wie die Reibung oft eine Bewegung zu verhindern sucht. Sie wirkt dabei, wie z. B. an den meisten Maschinen, als ein schädlicher Widerstand. Durch passende Anordnungen versucht man den schädlichen Widerstand möglichst klein zu machen.

In einer grossen Anzahl von Fällen wirkt die Reibung als eine nützliche Kraft; sie verhindert entweder das Zustandekommen einer Bewegung oder ermöglicht ihr Entstehen.

So z. B. bildet die Reibung das hauptsächliche zusammenhaltende Element an den meisten Bauconstructionen, besonders bei Gewölben und Kuppeln; sie verhindert die Verschiebung und das Kippen der Mauern unserer Gebäude; ein Nagel oder eine Schraube würde ohne sie

keine zusammenhaltende Kraft besitzen; eine Menge Erzeugnisse der Industrie, wie Kleider, Fäden, Seile u. s. w. würden zerfallen, kein Knoten würde halten; ein Schiff könnte nur mit grösster Schwierigkeit ankern oder am Quai landen; sogar die Form der Erdoberfläche wäre eine andere.

Die Reibung kommt uns aber nicht nur wie in den obigen Beispielen als ein passiver Widerstand zu nutze, sondern oft auch als active Kraft. Nur durch die Reibung wird das Gehen in einer horizontalen Ebene, bergauf und bergab ermöglicht; auf das Vorhandensein der Reibung gründet sich das ganze Transportwesen mit seiner grossartigen Anwendung in den Eisenbahnen der Jetztzeit. Das Zugvermögen einer Locomotive beruht zum Teil auf der in ihr entwickelten oder ihr beispielsweise durch eine elektrische Leitung zugeführten Triebkraft, zum Teil auf der zwischen den Triebrädern und den Geleisen entstehenden Reibung.

Wollte man sich die Folgen davon denken, dass die Reibung aufhörte zu wirken, so müsste man sich die gegenwärtige Ordnung der Natur stückweise aufgelöst vorstellen.

Obgleich die Lehre von der Reibung hier innerhalb der Statik der starren Körper aufgenommen worden ist, werden auch einige Probleme, welche eigentlich zur Dynamik gehören, in demselben Zusammenhange behandelt. Andere Bewegungsprobleme, bei welchen die Reibung eine Rolle spielt, werden in der Dynamik betrachtet.

Es möge mit Anwendungen der gleitenden Reibung angefangen werden.

§ 86.

Die Reibung an der schiefen Ebene.

Ein Körper vom Gewichte G befinde sich auf einer Ebene, deren Neigung gegen die Horizontalebene α ist

($0 < \alpha < 90°$), und werde ausser durch sein Gewicht G von einer Kraft P angegriffen, welche durch den Schwerpunkt S gehe und in einer zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene sich befinde (Fig. 306). Die Kraft P bilde mit der Normalen zur schiefen Ebene einen Winkel β, welcher in der in der Figur angegebenen Weise gerechnet werde. Es werde ausserdem angenommen, dass der Körper keine Gefahr läuft um eine Kante in der Stützfläche zu kippen, sondern nur in Ruhe oder in gleitender Bewegung auf der schiefen Ebene sein kann.

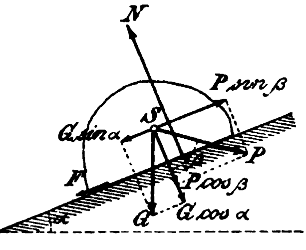


Fig. 306.

Bewegung nach aufwärts längs einer schiefen Ebene.

a) *Der Körper werde mit constanter Geschwindigkeit bergauf gezogen.*

Es besteht Gleichgewicht zwischen den Kräften G und P und den Widerstandskräften, d. h. dem normalen Drucke N und der längs der Ebene nach abwärts gerichteten Reibung F. Wenn man die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Richtungen der Bewegung und der Normalen der Ebene gleich Null setzt, so findet man

$$P \sin \beta = F + G \sin \alpha,$$

$$P \cos \beta + G \cos \alpha = N.$$

Auf Grund der Gleichung (273) ist

$$F = fN.$$

Hieraus folgt

$$P \sin \beta - G \sin \alpha = f(P \cos \beta + G \cos \alpha)$$

und

$$P = \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\sin \beta - f \cos \beta} G.$$

Setzt man hier $f = \operatorname{tg} \varphi$, so findet man nach einer einfachen Transformation

(276) $$P = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} G.$$

Diese Gleichung giebt für einen vorgeschriebenen Winkel β die erforderliche Zugkraft P. Damit die Aufgabe ihre Bedeutung nicht verliere, muss P positiv und endlich sein, und darf der Körper nicht von der Ebene abgehoben werden. Die Bedingungen hierfür sind

$$\varphi < \beta \leqq 180^\circ - \alpha.$$

Mit $\beta = \varphi$ ergiebt sich $P = \infty$. Dann liegt P auf dem Reibungskegel, welcher mit S als Spitze und der Normalen aus S zur schiefen Ebene construirt wird. Mit $\beta = 180^\circ - \alpha$ wird P vertical nach oben gerichtet und gleich G. Dann sind N und F gleich Null.

Wählt man speciell $\beta = 90^\circ$ (Fig. 307), so wird P parallel der schiefen Ebene und erhält die Grösse

(277) $$P = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi} G.$$

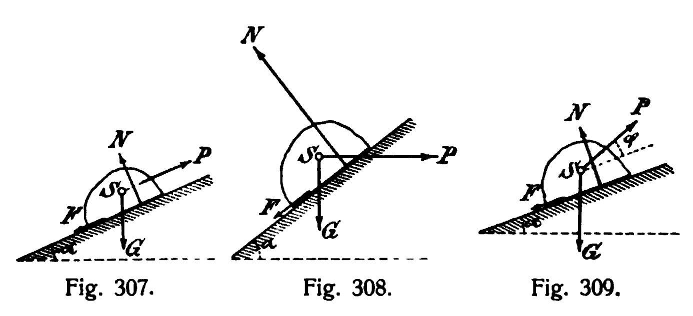


Fig. 307. Fig. 308. Fig. 309.

Ist P horizontal, wozu die Bedingung $\alpha < 90^\circ - \varphi$ erfüllt sein muss (Fig. 308), so folgt

(278) $$P = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) . G.$$

Wie die Gleichung (276) zeigt, wird P am kleinsten für $\beta = 90^\circ + \varphi$ (Fig. 309), und zwar findet man

(279) $$P = \sin(\alpha + \varphi) . G.$$

Die notwendige Bedingung für diese Möglichkeit ist $\alpha \leqq 90° - \varphi$.

b) ***Der Körper gleite bergab mit constanter Geschwindigkeit.***

Bewegung nach abwärts längs einer schiefen Ebene.

In diesem Falle ist die Reibung nach aufwärts längs der Ebene gerichtet (Fig. 310). Man erhält den Wert von P aus der Gleichung (276) dadurch, dass man φ durch $-\varphi$ ersetzt, was in der That der Umkehrung des Sinnes der Reibungswiderstandes F gleichkommt. Es ergiebt sich also

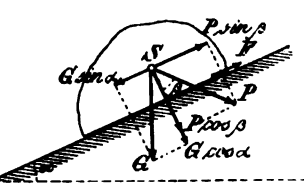


Fig. 310.

$$P = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} G. \tag{280}$$

Die Kraft P darf weder negativ noch unendlich gross werden, noch den Körper von der Ebene abheben. Bei der Discussion unterscheidet man am besten die drei Fälle

$$\alpha > \varphi\,;\ \alpha = \varphi\,;\ \alpha < \varphi$$

von einander.

Wenn $\alpha > \varphi$ wäre, so würde der Körper infolge seiner Schwere allein eine beschleunigte Bewegung nach abwärts längs der Ebene annehmen. Um diese Bewegung in eine gleichförmige zu verwandeln, müsste eine hindernde oder bremsende Kraft P angebracht werden, und zwar wäre hierzu erforderlich, dass der Winkel β die Bedingungen

$$-\varphi < \beta \leqq 180° - \alpha$$

erfüllte. Die Gleichung (280) liefert die Grösse von P. Mit $\beta = -\varphi$ folgt $P = \infty$, für $\beta = 180° - \alpha$ halten sich P und G das Gleichgewicht. P wird am kleinsten für $\beta = 90° - \varphi$; und zwar ist dabei $P = \sin(\alpha - \varphi) \,.\, G$.

Wenn $\alpha = \varphi$ wäre, so wäre $P = 0$ und der Körper würde infolge seiner Schwere allein gleichförmig nach abwärts längs der Ebene gleiten. Dieser Fall wurde auf p. 449 als ein Mittel zur Bestimmung des Reibungscoefficienten angeführt.

Wäre $\alpha < \varphi$, so würde der Körper, nachdem man ihm eine Anfangsgeschwindigkeit nach abwärts längs der Ebene erteilt hat, eine verzögerte Bewegung annehmen. Um die Bewegung gleichförmig zu machen, braucht man eine Kraft P, welche den Körper längs der Ebene nach abwärts zieht. Diese Kraft wird aus der Gleichung (280) berechnet; und zwar muss β jetzt den Bedingungen

$$180^\circ - \alpha \leqq \beta < 360^\circ - \varphi$$

genügen.

c) *Ruhe auf der schiefen Ebene.*

Ruhe auf der schiefen Ebene.

Um zu untersuchen, ob ein auf einer schiefen Ebene befindlicher Körper, auf welchen seine Schwere G und eine durch den Schwerpunkt S gehende Kraft P wirken, in Ruhe verharren kann, werden G und P zu einer Resultirenden R zusammengesetzt. Diese Resultirende muss der an der Ebene entwickelten, aus Normaldruck und Reibung zusammengesetzten Widerstandskraft das Gleichgewicht halten. Die Bedingung hierfür ist offenbar, dass R im Innern oder auf der Oberfläche des Reibungskegels liege, welcher mit S als Spitze construirt wird, und die Richtung von S nach der Ebene hin habe.

Wenn der Neigungswinkel α kleiner als der Reibungswinkel φ beim Übergange aus Ruhe in Bewegung ist, so erfüllt G allein immer die angeführte Bedingung. Der Körper verharrt somit in Ruhe unter dem Einflusse der Schwere allein. Wie aus den auf den jetzt betrachteten Fall anzuwendenden Gleichungen (276) und (280) hervorgeht, bleibt der Körper noch in Ruhe, wenn man ausser G eine in der zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene liegende und durch S gehende Kraft P anbringt, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$P \text{ beliebig} \quad \text{für } -\varphi \leqq \beta \gtreqqless \varphi,$$

$$P < \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} G \text{ für } \varphi < \beta \leqq 180^\circ - \alpha,$$

$$P < \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} G \text{ für } 180^\circ - \alpha \gtreqqless \beta < 360^\circ - \varphi.$$

Der Winkel β ist hier in derselben Weise wie früher gerechnet worden (Fig. 311).

Wenn der Neigungswinkel gleich dem Reibungswinkel ist, so befindet sich der Körper unter dem Einflusse der eigenen Schwere an der Grenze des Gleichgewichts der Ruhe. Das Gleichgewicht besteht fort, falls eine Kraft P angebracht wird, welche den Bedingungen genügt:

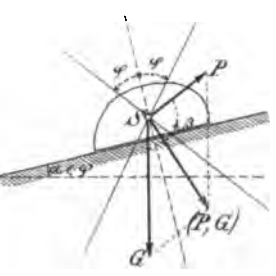


Fig. 311.

$$P \text{ beliebig} \quad \text{für } -\varphi \leqq \beta \gtreqqless \varphi,$$

$$P < \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\beta - \varphi)} G \text{ für } \varphi < \beta \leqq 180^\circ - \varphi.$$

Wenn schliesslich $\alpha > \varphi$ ist, so genügt die Schwere allein nicht um den Körper in Ruhe zu erhalten, sondern man muss eine Kraft P anbringen (Fig. 312), welche folgenden Bedingungen genügt:

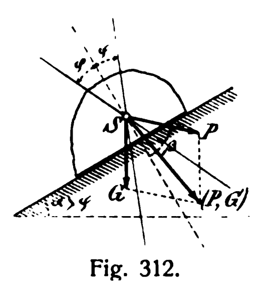


Fig. 312.

$$P > \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} G \text{ für } -\varphi < \beta \leqq \varphi,$$

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} G < P < \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} G \text{ für } \varphi < \beta < 180^\circ - \alpha.$$

d) *Gleichgewicht auf der Horizontalebene.*

Ruhe auf der Horizontalebene.

Man erhält die Formeln für das Gleichgewicht der Ruhe oder der Bewegung eines auf einer horizontalen

Unterlage sich befindenden Körpers dadurch, dass man in den für die schiefe Ebene geltenden Formeln $\alpha = 0$ setzt. Es genügt offenbar β zwischen 0 und 180° zu wählen, einschliesslich der Grenzwerte.

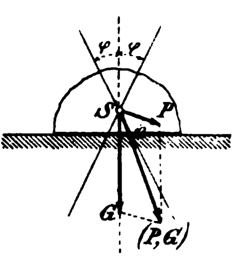


Fig. 313.

Ein auf der Horizontalebene ruhender Körper vom Gewichte G (Fig. 313) bleibt noch in Ruhe, wenn man eine Kraft P hinzufügt, welche beliebig sein darf, falls sie in der unteren Hälfte des Reibungskegels liegt, und die Grösse $\frac{\sin \varphi}{\sin(\beta - \varphi)} G$ nicht überschreiten darf, falls sie ausserhalb des Reibungskegels liegt.

Gleichförmige Bewegung längs der Horizontalebene.

Zum Unterhalten einer gleichförmigen Bewegung längs der Ebene braucht man für einen gegebenen Winkel $\beta > \varphi$ eine Kraft

$$P = \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta - \varphi)} G. \tag{281}$$

Wenn die Kraft P parallel der Ebene ist, so hat sie die Grösse

$$P = \operatorname{tg} \varphi \, . \, G. \tag{282}$$

Am kleinsten wird sie, wenn $\sin(\beta - \varphi) = 1$, d. h. $\beta = 90° + \varphi$ ist, und zwar ergiebt sich dann

$$P = \sin \varphi \, . \, G. \tag{283}$$

Anwendungen.

1) Ein schwerer Körper stützt sich gegen die untere Seite einer schiefen Ebene. Wie muss eine Kraft P am Körper angebracht werden, damit er entweder in Ruhe verharre oder eine gleichförmige Bewegung bergauf oder bergab besitze?

2) Welche Arbeit ist erforderlich, um mit Anwendung der kleinsten möglichen Zugkraft einen 15 kg schweren Schlitten mit gleichförmiger Bewegung längs einer 20 m langen Eisebene hinauf zu ziehen, welche

den Winkel 30° mit der Horizontalebene bildet, wenn der Reibungscoefficient den Wert 0.024 hat?

Mit den früheren allgemeinen Bezeichnungen ist die Kraft P am kleinsten für $\beta = 90° + \varphi$ und hat dann den Wert

$$P = \sin(\alpha + \varphi) \,.\, G.$$

Bezeichnet l die Länge des Weges, so ist die Arbeit A der Kraft P

$$A = Pl \cos\varphi = \sin(\alpha + \varphi) \cos\varphi \,.\, Gl.$$

Mit den numerischen Werten findet man $\varphi = 1° 23'$ und

$$A = \sin 31° 23' \times \cos 1° 23' \times 15 \times 20 = 156.2 \text{ kgm}.$$

3) Welchen Wert hat der Reibungscoefficient an einer unter 30° geneigten Eisebene von 29.0 m Länge, wenn ein Schlitten in 3.5 Sec. längs der Ebene abwärts läuft, und wie weit setzt der Schlitten längs einer horizontalen Eisfläche seine Bewegung fort? Der Widerstand der Luft wird vernachlässigt und der Reibungscoefficient als unabhängig von der Geschwindigkeit angesehen.

Weil die Schwere G die einzige äussere Kraft ist, so ist die constante beschleunigende Kraft

$$P = G \sin\alpha - fG \cos\alpha.$$

Die Bewegung ist also für $\alpha > \varphi$ gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung

$$a = \frac{P}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Bezeichnet t die Zeit, welche beim Bergabfahren vergeht, so folgt also

$$l = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} gt^2;$$

aus dieser Gleichung kann φ berechnet werden. Mit den numerischen Werten findet man $\varphi = 1° 10'$ und $f = \operatorname{tg}\varphi = 0.021$.

Der Schlitten hat unten am Abhange die Geschwindigkeit

$$u = at = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} gt$$

erreicht, welche zugleich die Anfangsgeschwindigkeit der nachfolgenden Bewegung in der Horizontalebene darstellt. Diese letztere Bewegung ist gleichförmig abnehmend mit der Verzögerung

$$r = \operatorname{tg}\varphi \,.\, g,$$

Der Schlitten bleibt nach der Zeit

$$t' = \frac{a}{r} t = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} t$$

stehen und hat dann die Weglänge

$$l' = \frac{1}{2} r t'^2 = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} l$$

zurückgelegt. Mit den numerischen Werten findet man

$$t' = 1 \text{ Min. } 22 \text{ Sec. und } l' = 680 \text{ m.}$$

4) Ein Schiff, welches vom Stapel läuft, legt auf einem unter 4° 30′ gegen die Horizontalebene geneigten Helling 21.5 m in 10 Sec. zurück. Man berechne den Reibungscoefficienten.

Man findet $f = 0.035$.

5) Welche Neigung muss einem Dache gegeben werden, damit das Regenwasser möglichst schnell ablaufe?

Nimmt man an, dass ein Wasserteilchen den Reibungsgesetzen folgt, so ist seine Bewegung abwärts auf dem unter dem Winkel α geneigten Dache eine gleichförmig veränderliche mit der Beschleunigung (Anw. 3)

$$a = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} g.$$

Es sei b die horizontale Breite des Daches. Das Wasserteilchen muss den Weg $\frac{b}{\cos \alpha}$ zurücklegen und braucht dazu die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2b \cos \varphi}{g \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi)}}.$$

Damit t ein Minimum werde, muss

$$f(\alpha) = \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi)$$

ein Maximum werden. Man erhält

$$f'(\alpha) = \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha - \varphi) = \cos(2\alpha - \varphi)$$

und die Ableitung wird Null für

$$\alpha = 45° + \frac{\varphi}{2}.$$

Weil φ ein sehr kleiner Winkel ist, so muss also die Neigung des Daches unbedeutend grösser als 45° sein. Aus dem Werte

$$f''(\alpha) = -2 \sin(2\alpha - \varphi) = -2$$

ersieht man, dass dem gefundenen Werte α wirklich ein Maximum von $f(\alpha)$ entspricht.

§ 87.

Körper, welcher von zwei schiefen Ebenen gestützt wird.

Man nehme an, dass der Körper beide Ebenen nur in je einem Punkte berühre, und dass die Verticalebene durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte die beiden schiefen Ebenen unter rechtem Winkel schneide. Auf diesen Fall kann derjenige zurückgeführt werden, in welchem der Körper eine cylindrische Form hat und sich auf jede Ebene längs einer Erzeugenden des Cylinders stützt. Es werde weiter vorausgesetzt, dass der Reibungscoefficient an den beiden Berührungsstellen derselbe sei. Man stelle die Bedingungen des Gleichgewichts der Ruhe auf.

Gleichgewicht ohne Reibung.

Auf den Körper wirken drei Kräfte, nämlich seine Schwere G und die beiden Reactionen in den Stützpunkten. Wenn der Körper und die Stützflächen absolut fest und glatt wären, so würde jede der Reactionen N_1 und N_2 senkrecht zu der betreffenden Ebene sein (Fig. 314). Im Falle des Gleichgewichtes müssen deshalb G, N_1 und N_2 durch denselben Punkt D gehen. Man erhält N_1 und N_2 vermittelst eines Kräftedreieckes. Sie müssen Drücke zwischen dem Körper und den Ebenen darstellen. Man beachte, dass der Punkt D, die Stützpunkte A und B und der auf der Schnittlinie der beiden Ebenen liegende Punkt C auf einem Kreise sich befinden.

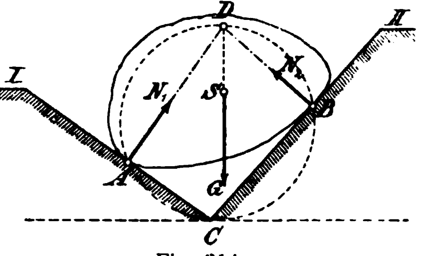


Fig. 314.

Gleichgewicht mit Reibung.

Beim Vorhandensein einer Reibung an den Stützflächen kann Gleichgewicht bestehen, ohne dass die Normalen durch die Stützpunkte sich auf der Verticalen

des Schwerpunktes schneiden. An jedem Stützpunkte kann eine im allgemeinen nicht normale Reaction entwickelt werden, welche im Innern des Reibungskegels oder auf demselben liegt. Liegt sie auf dem Kegel selbst, so ist sie die Resultirende eines Normaldruckes und einer völlig entwickelten Reibung der Ruhe und bildet den Reibungswinkel φ mit der Normalen zur Stützebene; wenn die Reaction dagegen innerhalb des Kegels liegt und somit einen kleineren Winkel als φ mit der Normalen einschliesst, so ist die Reibung nur unvollständig entwickelt. Es werde zuerst angenommen, dass der Körper sich in einer solchen Grenzlage befindet, dass eine vollständig entwickelte, nach oben gerichtete Reibung fN_1 am Punkte A und eine eben solche, nach unten gerichtete Reibung am Punkte B (Fig. 315) zur Erhaltung des Gleichgewichts notwendig wäre. Der normale Druck N_1 und die Reibung fN_1 am Punkte A liefern zusammen die Reaction K_1; ebenso entsteht die Reaction K_2 am Punkte B aus N_2 und fN_2. Die Richtungslinien von K_1 und K_2 schneiden sich in dem Punkte D_1. Damit der betrachtete Grenzfall zu Stande komme, muss der Schwerpunkt auf der Verticalen des Punktes D_1 liegen. Würde der Schwerpunkt nur sehr wenig links von der Verticalen durch D_1 liegen, so könnte das Gleichgewicht nicht bestehen, sondern der Körper würde sich so in Bewegung setzen, dass er bei A nach abwärts, bei B nach aufwärts längs der Stützebenen gleitet. Einen zweiten Grenzfall erhält man, wenn man die entgegengesetzten Richtungen des Gleitens in's Auge fasst. Die Richtungslinien der Reactionen AD_2 und BD_2, welche beide mit der betreffenden Normalen zur Stützfläche den Winkel φ bilden, schneiden

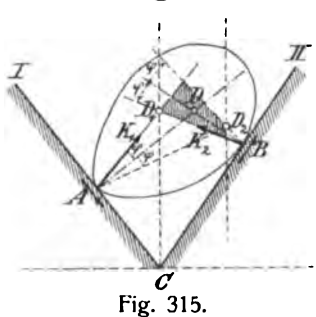


Fig. 315.

sich dann in dem Punkte D_2. Es müsste dann der Schwerpunkt auf der Verticalen durch D_2 liegen. Würde der Schwerpunkt rechts von dieser Verticalen sich befinden, so würde der Körper in's Gleiten geraten. Die Ruhe kann nur fortbestehen, wenn der Schwerpunkt sich zwischen den beiden Verticalen durch D_1 und D_2 befindet; oder was dasselbe ist, wenn die Verticale des Schwerpunktes das von AD_1, AD_2, BD_1 und BD_2 gebildete (in der Figur schraffirte) Viereck trifft. Im allgemeinen ist die Reibung an den Stützpunkten nur unvollständig entwickelt; die Richtungslinien der Reactionen sind dann unbekannt und folglich eine Berechnung ihrer Grösse auf Grund der statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht möglich. Nur in den Grenzfällen können die Reactionen erhalten werden (siehe p. 467 unten).

Bestimmung des Belastungsintervalles.

Statt des schweren Körpers betrachtet man zweckmässig einen gewichtslosen Stab, welcher sich an den Enden auf die schiefen Ebenen stützt und in einem beliebigen Punkte mit einem Gewichte G belastet werden kann. Die durch die Punkte D_1 und D_2 geführten Verticalen schneiden den Stab in zwei Punkten E_1 und E_2. Das Gleichgewicht besteht, wenn die Belastung G irgendwo zwischen den Grenzpunkten E_1 und E_2 angebracht wird. Es soll die Lage dieser Punkte näher bestimmt werden und zwar mit Hülfe der Verhältnisse

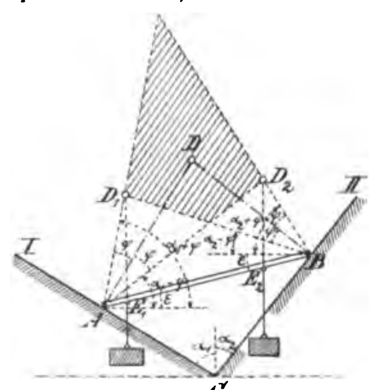


Fig. 316.

$$n_1 = \frac{AE_1}{BE_1} \text{ und } n_2 = \frac{AE_2}{BE_2}$$

oder

$$m_1 = \frac{AE_1}{AB} \text{ und } m_2 = \frac{AE_2}{AB}.$$

Die Neigungen der beiden schiefen Ebenen seien durch ihre Winkel α_1 und α_2 mit der Verticalebene bestimmt, und zwar seien $0 \lesseqgtr \alpha_1 \leqq 90^\circ$ und $0 \lesseqgtr \alpha_2 \leqq 90^\circ$. Der Winkel des Stabes mit einer Horizontalebene sei ε und werde positiv gerechnet, wenn A tiefer als B liegt. Damit der Stab sich innerhalb des Winkels ACB befinde, muss der Wert von ε zwischen $-(90^\circ - \alpha_1)$ und $90^\circ - \alpha_2$ enthalten sein; damit ferner der Punkt D innerhalb des Winkels ACB liege, müssen die Bedingungen $-\alpha_2 < \varepsilon < \alpha_1$ erfüllt sein. Wäre z. B. $\varepsilon = 90^\circ - \alpha_2$, so würde sich der Stab in seiner ganzen Länge an die Ebene II anlehnen; hätte man z. B. $\varepsilon = \alpha_1$, so würde der Punkt D mit dem Endpunkte B des Stabes zusammenfallen.

Aus den Dreiecken AE_1D_1 und BE_1D_1 erhält man

$$\frac{AE_1}{D_1E_1} = \frac{\cos(\alpha_1 + \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \varphi - \varepsilon)}; \quad \frac{BE_1}{D_1E_1} = \frac{\cos(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - \varphi + \varepsilon)}.$$

Somit ergiebt sich

$$n_1 = \frac{AE_1}{BE_1} = \frac{\cos(\alpha_1 + \varphi)\sin(\alpha_2 - \varphi + \varepsilon)}{\cos(\alpha_2 - \varphi)\sin(\alpha_1 + \varphi - \varepsilon)} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha_1 + \varphi)\sin(\alpha_2 - \varphi)\cos\varepsilon + \cos(\alpha_2 - \varphi)\sin\varepsilon}{\cos(\alpha_2 - \varphi)\sin(\alpha_1 + \varphi)\cos\varepsilon - \cos(\alpha_1 + \varphi)\sin\varepsilon},$$

und nach Division des Zählers und Nenners mit

$$\cos(\alpha_1 + \varphi)\cos(\alpha_2 - \varphi)\cos\varepsilon$$

folgt

$$n_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) - \operatorname{tg}\varepsilon}. \tag{284}$$

Durch Umkehrung des Zeichens von φ findet man

$$n_2 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 + \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) - \operatorname{tg}\varepsilon}. \tag{285}$$

Die beiden Formeln (284) und (285) oder die mit ihnen gleichbedeutenden

$$(286)\qquad m_1 = \frac{n_1}{1+n_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2-\varphi)+\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1+\varphi)+\operatorname{tg}(\alpha_2-\varphi)},$$

$$(287)\qquad m_2 = \frac{n_2}{1+n_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2+\varphi)+\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1-\varphi)+\operatorname{tg}(\alpha_2+\varphi)}$$

dienen zur Bestimmung des Belastungsintervalles E_1E_2, wenn die Neigung des Stabes gegeben ist.

Aus den obigen Gleichungen oder noch einfacher aus der Figur findet man als Bedingungen, damit E_1 innerhalb des Stabes AB liege, dass entweder zugleich $\varphi < 90^\circ - \alpha_1$ und $\varphi < \alpha_2 + \varepsilon$ oder auch zugleich $\varphi > 90^\circ - \alpha_1$ und $\varphi > \alpha_2 + \varepsilon$ sei. Es liegt E_2 innerhalb AB, wenn gleichzeitig entweder $\varphi < 90^\circ - \alpha_2$ und $\varphi < \alpha_1 - \varepsilon$ oder auch $\varphi > 90^\circ - \alpha_2$ und $\varphi > \alpha_1 - \varepsilon$ sind.

Der Grenzpunkt E_1 fällt mit dem Endpunkte A des Stabes zusammen, wenn entweder $\varphi = 90^\circ - \alpha_1$ oder $\varphi = \alpha_2 + \varepsilon$ ist. Ebenso fällt E_2 mit B zusammen, wenn $\varphi = 90^\circ - \alpha_2$ oder $\varphi = \alpha_1 - \varepsilon$ ist. Sind beide Bedingungen erfüllt, so kann der Stab in einem beliebigen Punkte belastet werden. Die Fig. 317 stellt den Fall $\varphi = \alpha_1 - \varepsilon = \alpha_2 + \varepsilon$ dar.

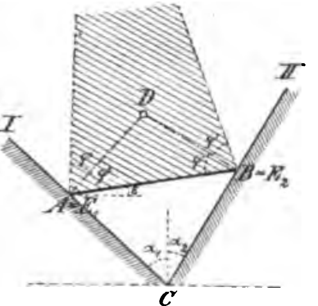


Fig. 317.

Es kann ferner E_1 links von A rücken; und zwar sind die Bedingungen hierfür

(288 a) entweder $\alpha_2 + \varepsilon < \varphi < 90^\circ - \alpha_1$ oder $\alpha_2 + \varepsilon > \varphi > 90^\circ - \alpha_1$.

Ebenso liegt E_2 rechts von B, wenn

(288 b) entweder $\alpha_1 - \varepsilon < \varphi < 90^\circ - \alpha_2$ oder $\alpha_1 - \varepsilon > \varphi > 90^\circ - \alpha_2$

ist. Umfasst das Belastungsintervall E_1E_2 den ganzen Stab AB, so kann er in beliebiger Weise belastet werden.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass das Gleichgewicht für jede Belastung und jeden Neigungswinkel des Stabes besteht, wenn die beiden schiefen Ebenen mit der Horizontalebene Winkel bilden, welche kleiner oder gleich dem Reibungswinkel sind.

Ist der Stab in mehreren Punkten belastet, so ist die Bedingung des Gleichgewichts, dass die Resultirende aller Belastungen sich innerhalb des Intervalles E_1E_2 befinde.

Für den Fall, dass es keine Reibung giebt, liefern die Formeln (284) und (285) mit $\varphi = 0$

$$n_1 = n_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \varepsilon}. \tag{289}$$

Die beiden Punkte E_1 und E_2 fallen dann mit dem Schnittpunkte zwischen der Verticalen durch D und dem Stabe zusammen.

Das Belastungsintervall ist gegeben.

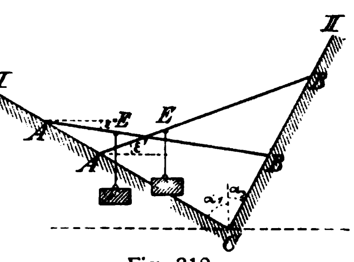


Fig. 318 a.

Die jetzt aufgestellten Formeln erlauben in erster Linie zu entscheiden, wie die Belastungen auf den Stab für eine bestimmte Ruhelage angebracht werden können. Umgekehrt kann man diejenigen Neigungswinkel berechnen, für welche die Ruhe möglich ist, wenn der Stab in einem bestimmten Punkte E belastet ist (Fig. 318 a). Dieser Punkt sei durch den Wert des Verhältnisses

$$m = \frac{AE}{AB}$$

Fig. 318 b.

gegeben, und zwar so, dass $0 < m < 1$ ist. Ersetzt man m_1 in der Formel (286) durch m und löst die Gleichung nach $\operatorname{tg} \varepsilon$ auf, so findet man

(290) $\operatorname{tg} \varepsilon' = m \operatorname{tg} (\alpha_1 + \varphi) - (1 - m) \operatorname{tg} (\alpha_2 - \varphi)$.

Ebenso folgt aus der Gleichung (287)

(291) $\operatorname{tg} \varepsilon'' = m \operatorname{tg} (\alpha_1 - \varphi) - (1 - m) \operatorname{tg} (\alpha_2 + \varphi)$.

Der Neigungswinkel ε kann einen beliebigen Wert zwischen diesen beiden Grenzwerten ε' und ε'' besitzen.

In den Grenzlagen sind die Reactionen K_1 und K_2 in den Stützpunkten A und B bestimmbar, weil man ihre Richtungen kennt. Für $\varepsilon = \varepsilon'$ erhält man nach der Figur 318 b, welche mit der Figur 316 verglichen werde,

$$K_1' = \frac{\cos(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G,$$

$$K_2' = \frac{\cos(\alpha_1 + \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G.$$

Für $\varepsilon = \varepsilon''$ wird

$$K_1'' = \frac{\cos(\alpha_2 + \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G,$$

$$K_2'' = \frac{\cos(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G.$$

Die Lage ist gegeben; der Reibungswinkel wird gesucht.

Das Problem des Gleichgewichts eines von zwei schiefen Ebenen unterstützten starren Körpers unter der Mitwirkung der Reibung kann noch von einem anderen Gesichtspunkte aus aufgefasst werden. Es kann die Frage gestellt werden, wie gross der Reibungscoefficient mindestens sein muss, damit eine bestimmte Lage des Körpers eine Gleichgewichtslage sei. Die Aufgabe wird in einfacher Weise geometrisch gelöst, wenn man bemerkt, dass die Punkte D_1 und D_2 der Figur 315 sich auf demselben Kreise wie die Punkte A, B, C und D befinden. Denn die Strecke AB wird von D_1 und D_2 aus unter demselben Winkel $180° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ wie von D aus gesehen Der Kreis hängt nur von der Lage des Körpers auf den schiefen Ebenen ab. Man ziehe durch den Schwer-

punkt S eine Verticale (Fig. 319) und betrachte ihren oberen Schnittpunkt mit dem Kreise als einen Grenzpunkt D_1 oder D_2, je nachdem er links oder rechts von D liegt. Dieser Punkt (D_1 in der Figur) werde mit A und B verbunden, so dass die beiden gleich grossen Peripheriewinkel D_1AD und D_1BD entstehen. Der Reibungswinkel φ muss dann wenigstens ebenso gross wie diese Winkel sein, damit das Gleichgewicht bestehe. Ist φ genau gleich D_1AD, so handelt es sich um einen Grenzfall des Gleichgewichts; ist φ grösser als D_1AD, so ist das Gleichgewicht um so sicherer.

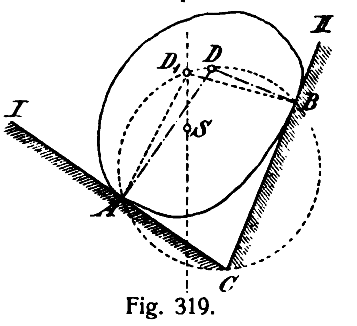


Fig. 319.

Anwendungen.

1) Eine Leiter stützt sich auf den horizontalen Fussboden und auf eine verticale Wand. Eine Person steigt hinauf. Man frägt, unter welchen Bedingungen die Leiter unabhängig von der Lage der Person in Ruhe bleibt (Fig. 320)?

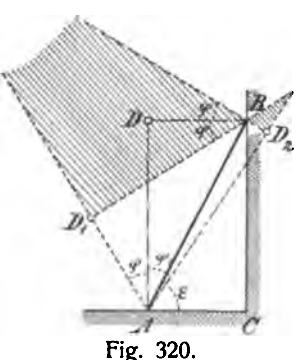


Fig. 320.

Es werde vorausgesetzt, dass die Mittellinie der Leiter sich in einer zur Wand senkrechten Verticalebene befinde und dass der Reibungscoefficient an beiden Stellen derselbe sei. Die Belastung besteht aus dem Gewichte G der Leiter und dem Gewichte P der Person in einem beliebigen Punkte der Leiter. Es genügt, nur positive Werte des Neigungswinkels ε zu betrachten. Die Winkel α_1 und α_2 sind hier

$$\alpha_1 = 90^\circ; \ \alpha_2 = 0.$$

Das auf p. 463 erwähnte Viereck ist jetzt ein überschlagenes Viereck. Die Bedingungen (288) liefern

$$90^\circ - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varepsilon,$$

d. h. die Leiter bleibt sicher in Ruhe, wenn der Neigungswinkel ε grösser als $90° - \varphi$ ist. Aber auch für $\varepsilon < 90° - \varphi$ ist das Stehenbleiben der Leiter nicht ausgeschlossen. Offenbar ist die Bedingung hierfür die, dass die Resultirende R von G und P innerhalb des zulässigen Belastungsintervalles liege, d h. hier zwischen A und E_2 (Fig. 321). Bezeichnet man die Länge der Leiter mit l, so findet man aus der Gleichung (287)

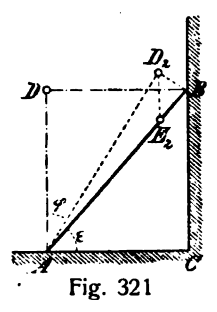


Fig. 321

$$AE_2 = \frac{f^2 + f \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + f^2} l.$$

Nachdem die Person um das Stück x längs der Leiter hinaufgestiegen ist, ist der Abstand des gemeinsamen Schwerpunktes der Leiter und der Person vom Punkte A

$$\frac{G \frac{1}{2} l + Px}{G + P}.$$

Es muss also für jeden Wert von x die Ungleichheit

$$\frac{G \frac{1}{2} l + Px}{G + P} < \frac{f^2 + f \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + f^2} l$$

erfüllt bleiben. Die linke Seite ist am grössten für $x = l$, d. h. nachdem die Person oben angelangt ist. Damit das Gleichgewicht immer bestehe, ist die Bedingung also

$$\frac{G \frac{1}{2} l + Pl}{G + P} < \frac{f^2 + f \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + f^2} l$$

d. h.

$$\operatorname{tg} \varepsilon > \frac{G(1 - f^2) + 2P}{2f(G + P)}.$$

Wäre z. B. $f = 0.4$, $P = 80$ kg, $G = 150$ kg, so würde man $\varepsilon > 57°$ finden.

2) Ein schwerer Körper berührt drei schiefe Ebenen in je einem Punkte. Wann bleibt der Körper in Ruhe, a) wenn keine Reibung vorhanden ist und b) wenn die Reibung in Betracht gezogen wird?

a) Wenn die Ebenen absolut glatt sind, so müssen die Normalen in den drei Berührungspunkten und die Verticale durch den Schwerpunkt des Körpers alle durch e i n e n Punkt gehen. Die Schwere des Körpers muss ausserdem drei Componenten auf die Richtungen dieser Normalen liefern, welche den Körper gegen die Ebenen drücken.

b) Auch in dem allgemeineren Falle, in welchem die Reibung in Betracht gezogen wird, ist die Aufgabe in einfacher Weise geometrisch lösbar. Man construire den Reibungskegel in jedem der Berührungspunkte. Diese drei Kegel müssen sich so schneiden, dass sie einen gemeinsamen Raum einschliessen. Ferner muss die Verticale durch den Schwerpunkt des Körpers diesen Raum treffen. Im allgemeinen genügen die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte im Raume nicht zur Ermittelung der Reactionen in den Stützpunkten.

Die Stützebenen schneidender Stab.

Das Problem des Gleichgewichts eines belasteten Stabes, welcher sich an zwei schiefe Ebenen anlehnt, kann dadurch verallgemeinert werden, dass man den Stab die eine oder beide Ebenen durchdringen lässt. Zu diesem Zwecke könnten die Ebenen mit Falten und der Stab mit kurzen Querstücken versehen werden, welche sich

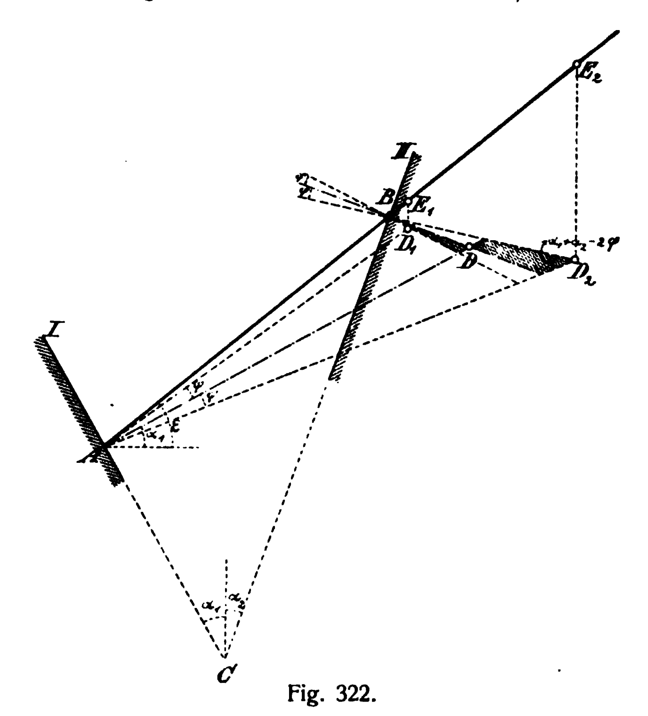


Fig. 322.

auf die Kanten der Falten stützen. Die Belastung kann dann auch ausserhalb des Winkels ACB angebracht wer-

den. Der Kürze wegen werde nur ein Fall hier betrachtet; die für die übrigen Fälle geltenden Formeln können ohne Schwierigkeit durch passende Zeichenänderungen erhalten werden.

Der Stab möge sich mit dem linken Ende auf die Ebene I stützen und die Ebene II durchdringen (Fig. 322). Die Belastung sei auf der Verlängerung ausserhalb II angebracht. Liegt B höher als A und ist ausserdem $a_1 < \varepsilon > 0$, wie in der Figur, so schneiden sich die Normalen der Stützpunkte in dem Punkte D rechts von der Ebene II. Giebt es keine Reibung, so muss die Belastung in der Verticalen von D angebracht werden. Ist Reibung vorhanden, so findet man ein zwischen den Verticalen D_1E_1 und D_2E_2 liegendes mögliches Belastungsintervall. Wird die Belastung links von E_1 oder rechts von E_2 angebracht, so wird das Gleichgewicht gestört. Die beginnende Bewegung ist in beiden Fällen eine Drehung um den Pol D (§ 22), und zwar in dem ersten Falle so, dass die beiden Punkte A und B des Stabes längs der Ebenen abwärts gleiten, in dem zweiten Falle so, dass sie beide aufwärts gleiten.

Zur analytischen Bestimmung der Punkte E_1 und E_2 braucht man nur in den Formeln (286) und (287) das Zeichen desjenigen Winkels φ zu ändern, welcher dem Stützpunkte B angehört. Man findet dabei

$$(292) \qquad m_1 = \frac{AE_1}{AB} = \frac{\operatorname{tg}(a_2 + \varphi) + \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg}(a_1 + \varphi) + \operatorname{tg}(a_2 + \varphi)},$$

$$(293) \qquad m_2 = \frac{AE_2}{AB} = \frac{\operatorname{tg}(a_2 - \varphi) + \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg}(a_1 - \varphi) + \operatorname{tg}(a_2 - \varphi)}.$$

Die Bedingungen dafür, dass E_1 auf der Verlängerung des Stabes über B hinaus liege und dass der Abstand BE_2 endlich sei, sind entweder

$$\varepsilon - a_1 > \varphi < 90^\circ - a_2$$

oder auch

$$\varepsilon - a_1 < \varphi > 90^\circ - a_2,$$

zusammen mit

$$a_1 + a_2 > 2\,\varphi.$$

Wäre $\varepsilon - a_1 = \varphi$ oder $\varphi = 90^\circ - a_2$, so würde E_1 mit B zusammenfallen. Hätte man $a_1 + a_2 = 2\varphi$, so würde der Punkt E_2 in's Unendliche rücken, und jeder Punkt rechts von E_1 würde ein zulässiger Belastungspunkt sein.

Wenn die Ungleichheit $a_1 + a_2 < 2\varphi$ erfüllt ist, so verliert der Punkt E_2 seine Bedeutung (Fig. 323). Eine

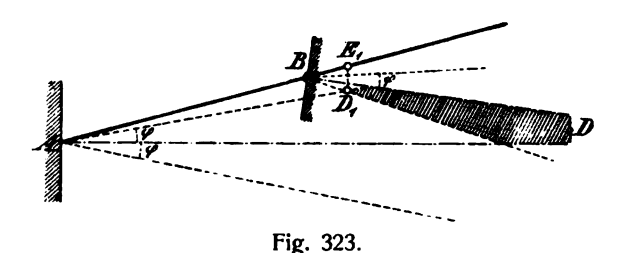


Fig. 323.

völlig entwickelte, nach unten gerichtete Reibung an den beiden Punkten A und B ist jetzt nicht möglich. Der Stab kann in einem beliebigen Punkte rechts von E_1 belastet werden; die Richtungslinien der Reactionen in A und B schneiden sich innerhalb des in der Figur schraffirten Gebietes.

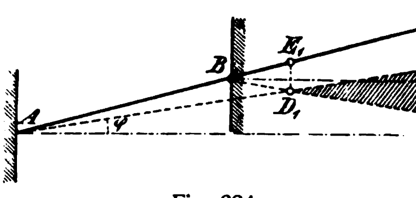


Fig. 324.

Wenn die beiden Ebenen parallel und vertical sind, so liegt der Punkt D unendlich fern, und es können nur nach oben gerichtete Reibungswiderstände vorkommen (Fig. 324). Der Stab kann auch jetzt in jedem Punkte rechts von E_1 belastet werden.

Ein diesem analoger Fall kommt bei einer längs eines verticalen Lineals beweglichen Hülse vor, die mit einem horizontalen Arm versehen ist, an dessen Ende die Belastung P wirkt (Fig. 325). Die Hülse lehne sich an das Lineal in den Punkten A und B. Damit sie nicht abwärts gleite, muss die Belastung P ausserhalb des Punktes D_1 angebracht sein. Der Abstand x zwischen dem Punkte D_1 und der Mitte des Lineals ist

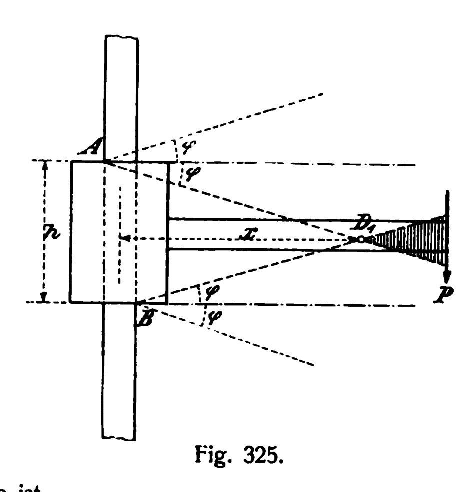


Fig. 325.

$$x = \frac{h}{2f}.$$

Wollte man auch die eigenen Gewichte der Hülse und des Armes in Betracht ziehen, so müsste man statt P die Resultirende aus P und den Gewichten setzen.

§ 88.

Reibung am Keile.

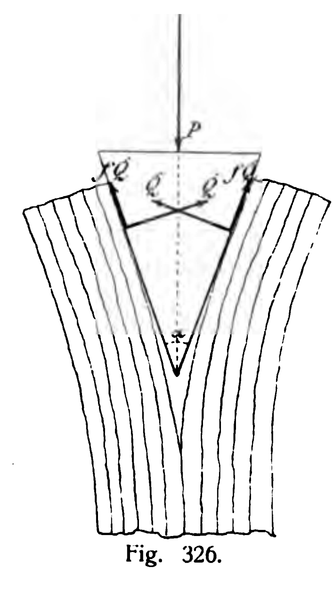
Der Keil hat hauptsächlich dreierlei Anwendungen: als Arbeitswerkzeug, als Bauconstructionselement und als Verbindungsglied bei Frictions-Verbindungen.

Der Keil als Arbeitswerkzeug.

Es werde die Anwendung des Keiles als Werkzeug zuerst betrachtet. Er diene zum Spalten; wenn dann eine Kraft am Keilkopf angebracht wird, so wirken auf die Seitenflächen Druckkräfte (Fig. 326). Es werde angenommen, dass die Kraft P den Winkel α des Keiles halbire.

Der Keil wird hineingetrieben.

Beim Hineintreiben wirken die Kraft P, die beiden Seitendrücke Q und die nach oben gerichteten Reibungswiderstände fQ auf den Keil. Zum Gleichgewicht der


Fig. 326.

fünf Kräfte ist es notwendig, dass die Summe ihrer Projectionen auf die Richtung von P gleich Null sei. Man erhält somit die Gleichung

$$P - 2\,Q \sin\frac{\alpha}{2} - 2 f Q \cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Ersetzt man f durch $\operatorname{tg}\varphi$, so ergiebt sich nach einer einfachen Transformation

$$(294)\quad Q = \frac{\cos\varphi}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)} P.$$

Der normale Druck Q an den Keilseiten ist am kleinsten, wenn $\frac{1}{2}\alpha + \varphi = 90^\circ$, also $\alpha = 180^\circ - 2\varphi$ ist. Dieser Wert entspricht einem sehr abgestumpften Keile; der Druck ist um so grösser, je schärfer der Keil ist. Der Quotient

$$\frac{Q}{P} = \frac{\cos\varphi}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}$$

kann als ein Mass für den Kraftgewinn angesehen werden.

Die Gleichung

$$(295)\qquad P = \frac{2\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}{\cos\varphi} Q$$

liefert die Kraft P, welche zum Hervorbringen des normalen Druckes Q an den Keilseiten erforderlich ist.

Bedingungen, dass ein eingeslagener Keil festgeklemmt bleibe.

Die aufgestellten Gleichungen gelten für die gleichförmige Bewegung des Keiles nach innen. Ersetzt man φ durch $-\varphi$, wobei die Reibungswiderstände ihre Rich-

tung umkehren, so erhält man für das Zurückweichen des Keiles die Formel

$$(296) \qquad P = \frac{2 \sin (\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} Q.$$

Dieselbe Gleichung liefert auch die Bedingungen dafür, dass der Keil nach dem Schlage festgeklemmt bleibe oder nicht, nur muss man dann unter φ den Reibungswinkel beim Übergange aus Ruhe in Bewegung verstehen. Es sind drei Fälle möglich, je nachdem

$$\tfrac{1}{2}\alpha \gtreqless \varphi$$

ist. Wenn $\frac{1}{2}\alpha > \varphi$ ist, so wird P nach der Gleichung (296) positiv, d. h. es braucht eine Kraft am Kopfende des Keiles um das Zurückweichen zu verhindern. Wenn $\frac{1}{2}\alpha = \varphi$ ist, so wird $P = 0$. Ist endlich $\frac{1}{2}\alpha < \varphi$, so ergiebt sich für P ein negativer Wert, d. h. es ist eine Kraft von der Grösse

$$(297) \qquad -P = \frac{2 \sin (\varphi - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos \varphi} Q$$

erforderlich um den Keil hinauszuziehen.

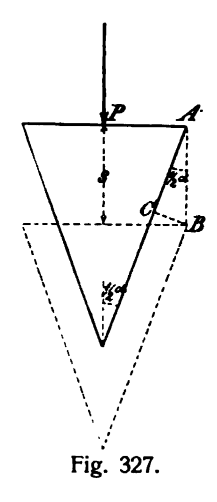
Der Keil bleibt also nach dem Schlage festgeklemmt, wenn sein Winkel kleiner als der doppelte Reibungswinkel ist und weicht zurück, wenn der Keilwinkel grösser als der doppelte Reibungswinkel ist.

Beispiel. Dem Reibungscoefficienten $f = 0.2$ entspricht der Reibungswinkel $\varphi = 11°.3$. Ein Keil mit dem Keilwinkel $\alpha = 20°$ bleibt nach dem Schlage festgeklemmt. Wenn der Druck auf die Seiten des Keiles $Q = 100$ kg ist, so ist die Zugkraft 4.66 kg erforderlich um den Keil loszulösen.

Totale, nützliche und schädliche Arbeit.

Wenn der Keil um das Stück s hineingetrieben wird (Fig. 327), so verrichtet die Triebkraft P die Arbeit Ps; sie werde mit A bezeichnet. Die Angriffspunkte der normalen Drücke Q an den Keilseiten werden um das Stück

$$CB = s \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$


Fig. 327.

in der Richtung entgegengesetzt zur Kraft verschoben. Ihre Arbeit ist also für beide zusammen

(298) $\quad -A_n = -2\,Qs \sin \tfrac{1}{2}\,a.$

Die Arbeit der Reibungswiderstände beträgt

(299) $\quad -A_f = -2 f\, Qs \cos \tfrac{1}{2}\,a.$

Da das System aller dieser Kräfte im Gleichgewicht ist, ist die Summe sämtlicher Arbeiten gleich Null, d. h. man erhält

$$A - A_n - A_f = 0$$

und

(300) $\quad A = A_n + A_f = 2\,Qs\,(\sin \tfrac{1}{2}\,a + f \cos \tfrac{1}{2}\,a) =$

$$= 2\,Qs \frac{\sin(\tfrac{1}{2}\,a + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Dieselbe Formel hätte auch auf Grund der Gleichungen

$$A = Ps$$

und (296) abgeleitet werden können. Die Arbeit A_n, welche dem Spalten zu nutze kommt, heisst Nutzarbeit, die Arbeit A_f, welche von den Reibungswiderständen verzehrt wird, nennt man schädliche Arbeit. Folglich gilt der Satz:

Die Arbeit der Triebkraft ist gleich der Summe aus der Nutzarbeit und der schädlichen Arbeit.

Wirkungsgrad.

Dieser Lehrsatz gilt nicht nur für den Keil, sondern für alle Mechanismen und Maschinen. Die schädliche Arbeit kann auch von anderen Widerständen als der Reibung herrühren; jedoch spielt die Reibung hierbei die Hauptrolle. Eine Maschine ist um so vollkommener, je grösser derjenige Teil der Arbeit der Triebkraft ist,

welcher in Nutzleistung verwandelt wird. Man nennt den Quotienten aus der Nutzleistung und der Arbeit der Triebkraft Wirkungsgrad an der Maschine; er wird in der Maschinenlehre gewöhnlich mit η bezeichnet, so dass

(301) $$\eta = \frac{A_n}{A}$$

ist. Die Zahl η liegt zwischen 0 und 1; je mehr sie sich der Grenze 1 nähert, um so vollkommener ist die Maschine. In vielen Fällen stellen sich jedoch praktische Schwierigkeiten dem Bestreben entgegen, η so gross als möglich zu machen. Die Maschine muss auch andere Forderungen erfüllen; sie muss leicht zu handhaben sein, darf nicht zu teuer sein und nicht allzu viel Platz einnehmen u. s. w.

Die Differenz

(302) $$1 - \eta = 1 - \frac{A_n}{A} = \frac{A_f}{A}$$

liefert das Verhältnis zwischen der schädlichen Arbeit und der Arbeit der Triebkraft. Sie bildet ein Mass für den relativen Arbeitsverlust.

Andere Berechnung von η.

Der Wirkungsgrad ist oben als der Quotient aus zwei Arbeiten definirt worden; oft kann er mit Vorteil als ein Verhältnis von zwei Kräften berechnet werden. Es sei

$$A = Ps$$

die Arbeit der Triebkraft. Würde es keine schädlichen Widerstände in der Maschine geben, so wäre $\eta = 1$ und $A = A_n$ und man erhielte die zum Hervorbringen der gleichen Nutzarbeit erforderliche Triebkraft P_n mit Hülfe der Gleichung

$$A_n = P_n\, s.$$

Wenn die Reibung der einzige schädliche Widerstand

ist, so ergiebt sich P_n aus P so, dass man $\varphi = 0$ setzt. Die obigen Gleichungen liefern jetzt

$$\eta = \frac{P_n}{P}, \tag{303}$$

d. h. *der Wirkungsgrad ist gleich dem Quotienten aus einer ideellen Triebkraft P_n, welche der Annahme entsprechen würde, dass keine schädlichen Widerstände vorhanden seien, und der thatsächlichen Triebkraft P.*

Wirkungsgrad des Keiles.

Nach den Gleichungen (298) und (300) hat man am Keile

$$A_n = 2\, Qs \sin \tfrac{1}{2}\, \alpha$$

und

$$A = 2\, Qs \frac{\sin(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Die Gleichung (301) liefert also den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{A_n}{A} = \frac{\sin \frac{1}{2}\,\alpha \,.\, \cos \varphi}{\sin(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)}$$

oder auch

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\alpha}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\alpha + \operatorname{tg} \varphi}. \tag{304}$$

Die Gleichung (303) führt noch einfacher zu demselben Ergebnis. Nach der Gleichung (295) ist

$$P = \frac{2 \sin(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}\, Q.$$

Setzt man hier $\varphi = 0$, so ergiebt sich

$$P_n = 2 \sin \tfrac{1}{2}\,\alpha \,.\, Q;$$

ferner folgt

$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{\sin \frac{1}{2}\,\alpha \,.\, \cos \varphi}{\sin(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)}$$

wie oben.

Der Wirkungsgrad des Keiles nimmt mit dem Keilwinkel α ab. Zugleich wachsen der Kraftgewinn und der Arbeitsverlust. Es ist

$$\frac{A_f}{A} = 1 - \eta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}. \tag{305}$$

Beispiel. Mit dem Reibungscoefficienten 0.3 ergiebt sich an einem Keile mit dem Keilwinkel $\alpha = 5^\circ$

$$\eta = 0.13; \frac{A_f}{A} = 0.87; \frac{Q}{P} = 1.46$$

und an einem Keile mit dem Keilwinkel $\alpha = 20^\circ$

$$\eta = 0.37; \frac{A_f}{A} = 0.63; \frac{Q}{P} = 1.07.$$

§ 89.

Reibung in Keilnuten.

Bewegung in Keilnuten.

An den Seitenflächen eines Körpers, welcher längs einer keilförmigen Rinne (Fig. 328) bewegt wird, entstehen Reibungswiderstände, welche zusammen ein grösseres Hindernis bilden, als wenn der Körper unter sonst gleichen Umständen längs einer Ebene fortbewegt würde. Die Figur zeigt einen Durchschnitt senkrecht zur Keilnut. Die pressende Kraft G liege in der Halbirungsebene durch die Kante der Nut und sei zu dieser Kante senkrecht. Der Keilwinkel habe die Grösse β. Man bestimme die der Nut parallele Kraft P, welche für die gleichförmige Bewegung des Körpers erforderlich ist.

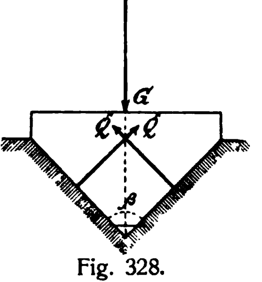


Fig. 328.

An den beiden Seitenflächen entsteht eine normale Druckkraft Q von der Grösse $\frac{G}{2 \sin \frac{1}{2} \beta}$ und ein Reibungswiderstand von der Grösse

$$F = fQ = \frac{f}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} G.$$

Es muss also

$$P = 2F = \frac{f}{\sin \frac{1}{2}\beta} G$$

sein. Hätte man $\beta = 180°$, so würde die Keilnut in eine Ebene übergehen, und der Bewegungswiderstand wäre fG. An der Keilnut ist er somit in dem Verhältnis $1 : \sin \frac{1}{2}\beta$ grösser. Man macht bisweilen von dem sog. Reibungscoefficienten für die Keilnut

Reibungscoefficient für eine Keilnut.

$$f_1 = \frac{f}{\sin \frac{1}{2}\beta}$$

und dem entsprechenden Reibungswinkel ψ für die Keilnut, welcher durch die Gleichung

$$f_1 = \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \frac{1}{2}\beta} \tag{306}$$

bestimmt ist, Gebrauch. Dabei ist

$$P = f_1 G,$$

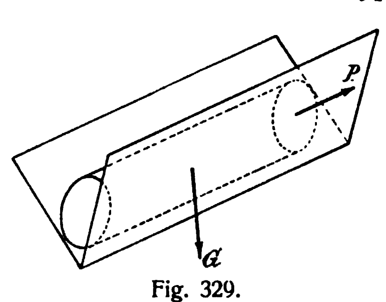


Fig. 329.

und die Untersuchungen über die Reibung an einer Ebene gelten überhaupt für die Keilnut, wenn der eigentliche Reibungswinkel φ durch ψ ersetzt wird. Um z. B. einen Körper vom Gewichte G längs einer geneigten keilförmigen Rinne hinaufzuziehen (Fig. 329), ist die der Rinne parallele Kraft (siehe die Gl. 277)

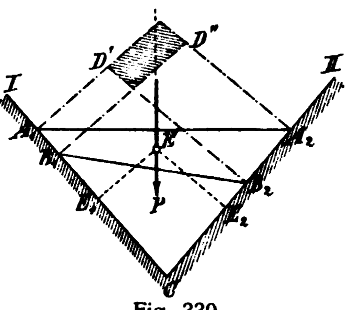
$$P = \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\cos \psi} G$$

erforderlich.

§ 90.

Gleichgewicht des Keiles.

Ein keilförmiger Körper möge sich auf zwei feste ebene Flächen stützen (Fig. 330); auf den Körper wirke eine Kraft P in einer Normalebene zur Schnittlinie der beiden Ebenen. Es sollen die Bedingungen des statischen Gleichgewichts aufgestellt werden. Die Aufgabe umfasst als einen Specialfall die in § 87 behandelte Aufgabe des Gleichgewichts eines Körpers, welcher von zwei schiefen Ebenen in je einem Punkte unterstützt wird.


Fig. 330.

Glatte Stützflächen.

Wenn es keine Reibung giebt, so entstehen die normalen Drücke N_1 und N_2 an den Berührungsflächen, welche der Kraft P das Gleichgewicht halten müssen. N_1 kann nur in einem zwischen A_1 und B_1 liegenden Punkte der Stützfläche I, N_2 nur in einem zwischen A_2 und B_2 sich befindenden Punkte der Stützfläche II entwickelt werden. Die in den Punkten A_1, B_1, A_2 und B_2 construirten Normalen zu den Stützebenen schliessen die Fläche eines Parallelogramms ein. Dieses Parallelogramm $D'D''$ muss von der Kraft P getroffen werden. Ausserdem muss die Kraft P eine solche Richtung besitzen, dass der Körper gegen die beiden Ebenen gedrückt wird, d. h. dass N_1 und N_2 von den Stützflächen nach dem Keile hin gerichtet sind und nicht umgekehrt. Bei der Anordnung in der Figur 331 schneidet zwar die Kraft P das Parallelogramm $D'D''$, aber nur an der Ebene II ist die Reaction ein Druck, an der Ebene I dagegen eine Kraft, welche den Körper von der Ebene weg zu heben

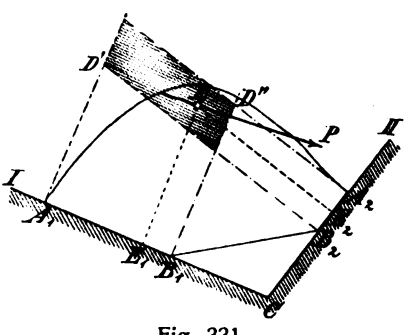


Fig. 331.

sucht. Es besteht folglich kein Gleichgewicht. Fällt man von einem beliebigen Punkte E auf der Richtungslinie von P die Senkrechten EE_1 und EE_2 zu den Ebenen I und II, so muss die Richtung von P zwischen den beiden Richtungen EE_1 und EE_2 eingeschlossen sein, damit das Gleichgewicht bestehe.

Reibung an den Stützflächen.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass Reibung vorhanden sei, und zwar soll wie in § 87 nur der Fall betrachtet werden, dass der Reibungscoefficient an beiden Ebenen derselbe ist (Fig. 332). Die Reaction an der Stützfläche I kann in irgend einem Punkte zwischen A_1 und B_1 angreifen und mit der Normalen des Punktes höchstens den Winkel φ einschliessen. Die äussersten Lagen dieser Reaction sind A_1D_1 und B_1D_2, wobei A_1D_1 mit der Normalen A_1D' und B_1D_2 mit der Normalen B_1D'' den Winkel φ bildet und zwar nach aussen von dem zwischen diesen beiden Normalen liegenden Streifen. In derselben

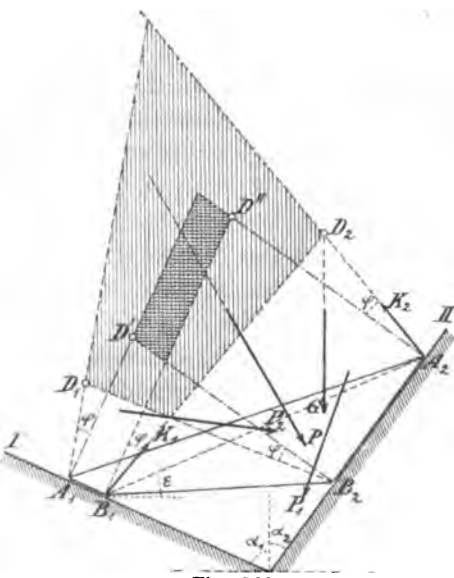


Fig. 332.

Weise erhält man an der Stützebene II zwei äusserste Richtungslinien A_2D_2 und B_2D_1 der Reaction. Die Bedingungen des Gleichgewichts sind, dass die Kraft P das Viereck D_1D_2 schneide und eine solche Richtung besitze, dass der Keil gegen die beiden Stützebenen gedrückt wird.

Das Viereck D_1D_2 schliesst das Parallelogramm $D'D''$ in sich ein, welches unter der Voraussetzung glatter Stützflächen erhalten wurde.

Kippen und Gleiten.

Wenn die Kraft P die obigen Bedingungen nicht erfüllt, so beginnt der Keil längs der einen Stützfläche oder längs beider zu gleiten, und zwar kann dies in verschiedener Weise geschehen. Beispielsweise würde die Kraft P_1 der Fig. 332 ein Gleiten veranlassen, wobei B_1 und A_2 die Stützpunkte sind und B_1 sich nach oben, A_2 nach unten bewegt. Die Kraft P_2 allein würde ein Gleiten nach aufwärts mit A_2B_2 als Stützfläche zu Stande bringen. Man kann diese beiden Fälle dadurch von einander unterscheiden, dass man den ersten Fall ein Kippen, den zweiten ein Gleiten nennt. Das Kippen besteht im ersten Augenblicke in einer Drehung um den Pol D_2, das Gleiten ist eine translatorische Bewegung.

Die Reactionen an den Stützflächen.

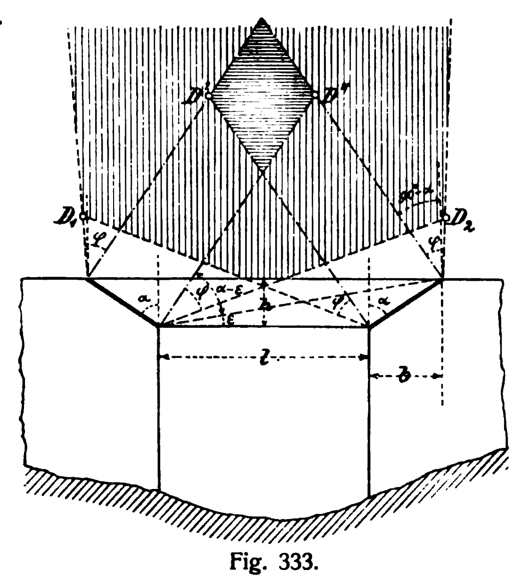
Nur in gewissen Grenzfällen genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Angriffspunkte und der Richtungen der Reactionen. Ein solcher Grenzfall ist der, dass die Richtungslinie der Kraft P durch einen Eckpunkt des Viereckes D_1D_2 geht ohne es zu schneiden. Beispielsweise findet man unter der Annahme der verticalen Belastung G in dem Punkte D_2 mit Anwendung derselben Bezeichnungen wie in § 87 die Reactionen

$$K_1 = \frac{\cos(\alpha_2 + \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G,$$

$$K_2 = \frac{\cos(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} G$$

auf den Richtungslinien B_1D_2 und A_2D_2.

Anwendung.


Fig. 333.

Als Anwendung zu dem obigen werde ein keilförmiger Körper betrachtet, durch welchen eine Öffnung überbrückt worden ist (Fig. 333). Es wird vorausgesetzt, dass die Widerlager unbeweglich sind und dass die Anordnung symmetrisch in Bezug auf die mittlere Verticale ist. Damit die Construction in einem beliebigen Punkte durch eine verticale Kraft belastet werden könne, müssen nach den Gleichungen (288 b) entweder die Bedingungen

$$\alpha - \varepsilon < \varphi < 90^\circ - \alpha$$

oder die Bedingungen

$$\alpha - \varepsilon > \varphi > 90^\circ - \alpha$$

erfüllt sein. Mit Anwendung der Bezeichnungen in der Figur erhält man

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{l + b}.$$

Sind φ und ε gegeben, so kann man zweckmässig den Bedingungen auch die Form

$$90^\circ - \varphi > \alpha < \varphi + \varepsilon$$

oder

$$90^\circ - \varphi < \alpha > \varphi + \varepsilon$$

geben. Die Gleichungen $\alpha = 90^\circ - \varphi$ oder $\alpha = \varphi + \varepsilon$ liefern Grenzfälle. Mit $\alpha = 90^\circ$ sind die Stützflächen horizontal und das Gleichgewicht immer vorhanden, indem die Bedingungen $0 < \varphi < 90^\circ$ dann erfüllt sind.

Als Bauconstructionselement kommt der Keil selten einzeln vor, sondern meistens als Element eines Keilsystems, besonders in Gewölbeconstructionen. Es sollen zuerst Systeme behandelt werden, welche aus nur zwei oder drei Keilen zusammengesetzt sind.

§ 91.

Aus zwei oder drei Keilen gebildetes Keilsystem.

Bei den folgenden Untersuchungen über das Gleichgewicht von Keilsystemen werde vorausgesetzt, dass sämtliche Kräfte, welche auf die Keile wirken, in einer Ebene enthalten seien und dass die Seitenflächen der Keile auf dieser Ebene senkrecht stehen.

Bedingungen des Gleichgewichts.

Für das statische Gleichgewicht eines Systems von zwei oder mehreren sich an einander anlehnenden Keilen, welches von zwei festen Ebenen unterstützt wird, ist es erforderlich, dass die beiden Reactionen an einem Keile, welche der auf diesem Keile angebrachten Kraft P das Gleichgewicht halten, innerhalb der beiden Seitenflächen des Keiles angreifen und mit den Normalen dieser Flächen Winkel einschliessen, welche nicht grösser als der Reibungswinkel φ sind. Ausserdem müssen die Reactionen an jeder Stützfläche zwischen zwei Keilen Kräfte darstellen, welche die Keile gegen einander drücken, nicht von einander zu entfernen suchen. Nur in gewissen Grenzfällen genügen die statischen Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Reactionen; in den meisten Fällen aber ist das Problem statisch unbestimmt.

Wir wollen uns hier auf die Untersuchung des dynamischen Gleichgewichts eines Systems von zwei oder drei Keilen beschränken. Die Keile besitzen dann gleichförmige translatorische Bewegungen; die Richtung und Grösse jeder Reaction wird völlig bestimmt; nur die Lagen der Angriffspunkte bleiben unbestimmt.

System von zwei Keilen.

Es stelle die Figur 334 ein System von zwei Keilen mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 dar, welche von den Kräf-

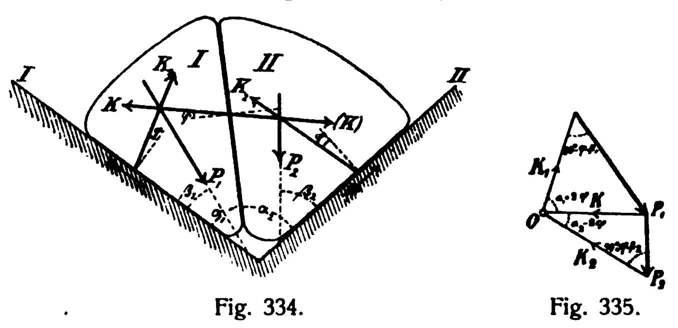


Fig. 334. Fig. 335.

ten P_1 und P_2 angegriffen werden. Diese Kräfte bilden die Winkel β_1 und β_2 mit den äusseren Keilseiten; ihr Grössenverhältnis soll so bestimmt werden, dass der Keil I gleichförmig nach innen, der Keil II gleichförmig nach aussen gleitet. An dem Keile I entstehen die Reactionen K_1 und K, welche mit den Normalen den nach aussen gerechneten Winkel φ bilden; sie halten der Kraft P_1 das Gleichgewicht. An dem Keile II sind die Reactionen (K) und K_2; sie bilden mit den Normalen den Winkel φ nach innen und halten der Kraft P_2 das Gleichgewicht. Man sieht ohne weiteres, dass P_1 und P_2 als Kräfte, K_1, K und K_2 als Polstrahlen eines Kräftepolygons aufgefasst werden können (Fig 335); an den Keilen selbst befindet sich das entsprechende Seilpolygon, welches jetzt auch Drucklinie oder Stützlinie heisst. Aus den beiden Kräftedreiecken im Kräftepolygon leitet man die Gleichungen

$$\frac{P_1}{K} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)}{\cos(\beta_1 + \varphi)},$$

$$\frac{P_2}{K} = \frac{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)}{\cos(\beta_2 - \varphi)}$$

ab, und erhält hieraus durch Division das gesuchte Verhältnis

$$(307) \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)\cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)\cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Als Bedingungen, dass die Reactionen Druckkräfte seien, findet man

$$\alpha_1 + \varphi - 90^\circ < \beta_1 < 90^\circ - \varphi,$$

$$\alpha_2 - \varphi - 90^\circ < \beta_2 < 90^\circ + \varphi.$$

Damit eine Bewegung überhaupt möglich sei, muss $\alpha_2 > 2\varphi$ sein, d. h. der getriebene Keil darf nicht zu scharf sein, sonst wird er festgeklemmt. Der treibende Keil würde festgeklemmt werden, wenn β_1 zwischen $90^\circ - \varphi$ und $90^\circ + \varphi$ enthalten wäre.

Anwendung.

Ein schwerer Körper, welcher längs einer verticalen Wand gleiten kann, wird durch Eintreiben eines auf einer horizontalen Grundfläche ruhenden Keiles gehoben (Fig. 336). Es soll der Wirkungsgrad dieser Anordnung bestimmt werden.

Nimmt man an, dass der Reibungscoefficient an sämtlichen gleitenden Flächen derselbe ist, und dass die treibende Kraft P horizontal ist, so findet man mit Hülfe der Gleichung (307), wo $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = 0$ einzusetzen sind,

$$(308) \qquad \frac{P}{Q} = \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi).$$

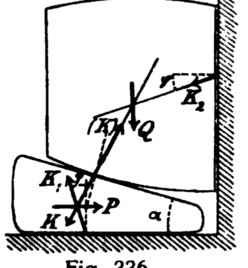


Fig. 336.

Die notwendige Bedingung, dass der zu hebende Körper nicht gegen die verticale Wand festgeklemmt werde, ist $90^\circ - \alpha > 2\varphi$, d. h. der treibende Keil darf nicht zu stumpf sein.

Die Formel (308) liefert für $\varphi = 0$

$$P_n = \operatorname{tg}\alpha \, . \, Q.$$

Nach der Gleichung (303) wird also der Wirkungsgrad

$$(309) \qquad \eta = \frac{P_n}{P} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)}.$$

Es mag noch das Maximum von η berechnet werden. Wenn man die Ableitung $\frac{d\eta}{d\alpha}$ gleich Null setzt, so findet man

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\varphi)\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{d\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\frac{d\operatorname{tg}(\alpha+2\varphi)}{d\alpha}=0,$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+2\varphi)}{\cos^2\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2(\alpha+2\varphi)}=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos^2\alpha\cos^2(\alpha+2\varphi)$, so folgt

$$\sin(\alpha+2\varphi)\cos(\alpha+2\varphi)-\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

d. h.

$$\sin 2(\alpha+2\varphi)=\sin 2\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich ferner

$$2(\alpha+2\varphi)=180^\circ-2\alpha,$$

oder (310)
$$\alpha=45^\circ-\varphi.$$

Man überzeugt sich, dass dieser Wert von α wirklich ein Maximum von η liefert, und zwar findet man

(311)
$$\max\eta=\frac{\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\varphi)}=\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2.$$

Übung. Man discutiere das Sinken der Last.

System von drei Keilen. Die Figur 337 stellt ein von drei Keilen gebildetes System dar, bei welchem der mittlere Keil nach innen, die beiden Seitenkeile nach aussen gleiten, und zwar gleich-

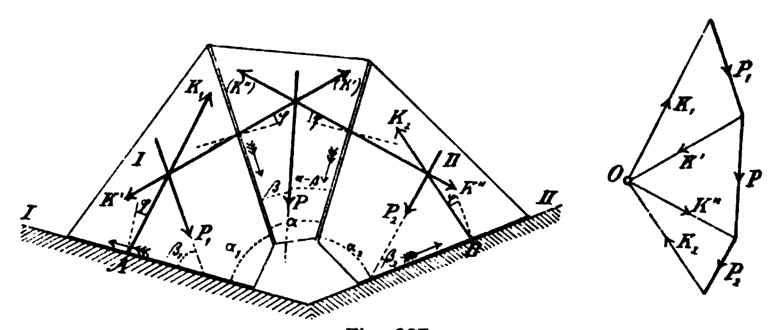


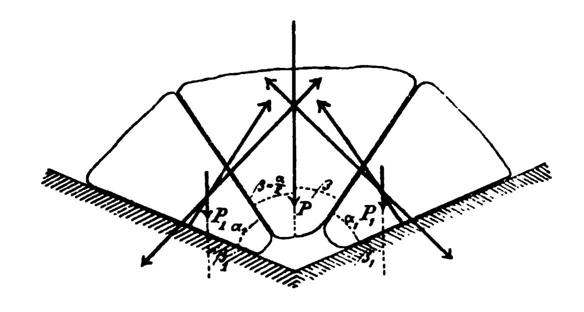
Fig. 337.

förmig. Die Richtungslinien der Kräfte P_1, P und P_2 sind gegeben; ihre gegenseitigen Verhältnisse sollen bestimmt werden. Auch die Richtungen sämtlicher Reactionen sind bekannt; sie bilden eine zu den Kräften P gehörende Drucklinie. Die Nebenfigur stellt das entsprechende Kräftepolygon dar. Wenn man in der Gleichung (307) α_1 durch α, α_2 durch α_1, β_1 durch $\alpha-\beta$ und β_2 durch β_1 ersetzt, so erhält man das Verhältnis der Kraft P zu P_1:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\beta_1 - \varphi)}{\cos(\alpha - \beta + \varphi)}. \tag{312}$$

Vertauscht man hier den Index 1 mit 2 und ersetzt $\alpha-\beta$ durch β, so ergiebt sich

$$\frac{P}{P_2} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\beta_2 - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}. \tag{313}$$



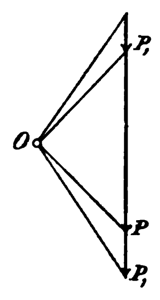


Fig. 338.

Für die entgegengesetzten Bewegungen der Keile, d. h. des mittleren Keiles nach aussen und der Seitenkeile nach innen, gelten ganz ähnliche Formeln, nur muss man φ durch $-\varphi$ ersetzen.

Symmetrische Anordnung des Keilsystems.

Es soll jetzt eine in Bezug auf die mittlere Verticalebene symmetrische Anordnung des Keilsystems und der Kräfte betrachtet werden (Fig. 338). Die Kräfte P mögen vertical sein. Man erhält mit den Bezeichnungen der Figur

$$\alpha = 2\beta,$$

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta,$$

und die Gleichungen (312) und (313) liefern übereinstimmend

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\sin 2(\beta + \varphi)}{\sin(\beta_1 - \beta - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\beta_1 - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} =$$

$$= \frac{2\sin(\beta + \varphi)\cos(\beta_1 - \varphi)}{\sin\{(\beta_1 - \varphi) - (\beta + \varphi)\}} = \frac{2\,\mathrm{tg}(\beta + \varphi)}{\mathrm{tg}(\beta_1 - \varphi) - \mathrm{tg}(\beta + \varphi)}.$$

Man berechnet ferner hieraus

$$\frac{P}{P + 2P_1} = \frac{\mathrm{tg}(\beta + \varphi)}{\mathrm{tg}(\beta_1 - \varphi)};$$

bezeichnet man $P + 2P_1$ mit G, so ergiebt sich

$$\frac{P}{G} = \frac{\mathrm{tg}(\beta + \varphi)}{\mathrm{tg}(\beta_1 - \varphi)}. \tag{314}$$

Diese Formel soll jetzt zur Beurteilung der Stabilität von Gewölben benützt werden.

Anwendungen.

1) *Stabilität in Bezug auf Gleiten am scheitrechten Gewölbe.*

Am scheitrechten Gewölbe sind beide Begrenzungsflächen des Gewölbes horizontale Ebenen (Fig. 339). Wir nehmen an, dass das Gewölbe unbelastet sei, und dass die ebenen Fugen durch dieselbe horizontale Gerade O gehen, welche in der verticalen Symmetrieebene liegt, ferner dass das Material des Gewölbes homogen sei. Um zu

untersuchen, ob das Gewölbe stabil in Bezug auf Gleiten in den Fugen ist, wird es als aus drei Keilen, einem mittleren Keile und zwei symmetrischen Seitenkeilen bestehend gedacht. Man stellt sich dann

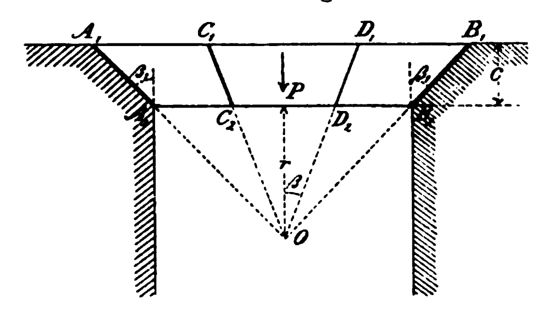


Fig. 339.

den Mittelkeil als veränderlich vor, d. h. von der Grösse Null allmählig bis zu dem ganzen Gewölbe wachsend. Es sei P das Gewicht des Mittelkeiles, G das Gewicht des ganzen Gewölbes, bezogen auf eine Längeneinheit in der Längsrichtung. Damit der mittlere Keil weder nach aussen noch nach innen gleite, müssen die Ungleichungen (vergl. die Formel (314))

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta-\varphi)}{\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi)}<\frac{P}{G}<\frac{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}{\operatorname{tg}(\beta_1-\varphi)} \tag{315}$$

erfüllt sein, und zwar bezeichnet φ hierin den Reibungswinkel beim Übergange aus Ruhe in Bewegung. Andererseits berechnet man

$$\frac{P}{G}=\frac{\frac{1}{2}c(C_1D_1+C_2D_2)}{\frac{1}{2}c(A_1B_1+A_2B_2)}=\frac{(r+c)\operatorname{tg}\beta+r\operatorname{tg}\beta}{(r+c)\operatorname{tg}\beta_1+r\operatorname{tg}\beta_1},$$

d. h.

$$\frac{P}{G}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_1}.$$

Die Ungleichungen (315) gehen hiermit in

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta-\varphi)}{\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi)}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_1}<\frac{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}{\operatorname{tg}(\beta_1-\varphi)} \tag{316}$$

über. Sie sind für jeden Wert von φ erfüllt. ***Das unbelastete scheitrechte Gewölbe ist also immer stabil in Bezug auf Gleiten in den Fugen.*** Für $\beta_1<\varphi$ sind die Ungleichungen (315) jedoch nicht mehr verwendbar; das Gewölbe verhält sich dann wie ein einziger festgeklemmter Keil und ist sicher stabil.

Die Stabilität des Gewölbes könnte ausser durch Gleiten in den Fugen durch Kippen um einzelne Fugenkanten gestört werden. In der Anwendung 1 in § 92 unten wird gezeigt werden, dass die Stabilität in Bezug auf Kippen eine gewisse geringste Dicke des Gewölbes bedingt.

2) ***Wo befindet sich die in Bezug auf Gleiten gefährlichste Fuge an einem unbelasteten halbkreisförmigen Gewölbe; und welche Grösse muss der Reibungscoefficient mindestens haben, damit keine Gefahr des Gleitens vorhanden sei?***

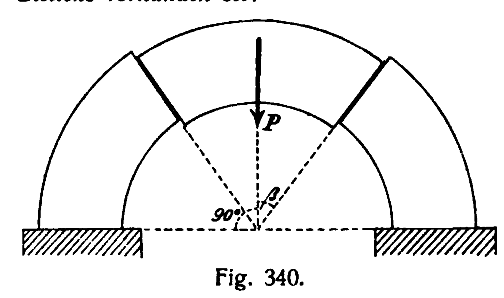


Fig. 340.

Die Gewölbeflächen sind zwei coaxiale halbcylindrische Flächen (Fig. 340); die Ebenen sämtlicher Fugen gehen durch die Cylinderaxe. Abgesehen vom Kippen, ist nur die Gefahr vorhanden, dass der mittlere Keil nach innen, die beiden Seitenkeile nach aussen zu gleiten anfangen, und zwar tritt dies ein, wenn der Gleichung

$$\frac{P}{G} = \frac{\operatorname{tg}(\beta + \varphi)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} = \operatorname{tg}\varphi \, . \operatorname{tg}(\beta + \varphi).$$

genügt wird. Das Verhältnis der Gewichte P und G ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Centriwinkel, d. h.

$$\frac{P}{G} = \frac{2\beta}{180} = \frac{\beta}{90},$$

wo β in Graden gerechnet werden muss. Die Gleichung

$$\frac{\beta}{90} = \operatorname{tg}\varphi \, . \operatorname{tg}(\beta + \varphi) \tag{317}$$

liefert für einen gegebenen Wert von φ einen entsprechenden Wert von β, vorausgesetzt dass es einen solchen zwischen 0 und 90° liegenden Wert β überhaupt giebt. Wir wollen jedoch jetzt φ als eine Function von β betrachten, welche durch die Gleichung (317) definirt wird, und den grössten Wert von φ aufsuchen, welcher einem zwischen 0 und 90° liegenden Werte von β entspricht. Dieser Wert β definirt die in Bezug auf Gleiten gefährlichste Fuge. Damit kein Gleiten zu Stande komme, muss der wirkliche Reibungswinkel grösser als der so

gefundene Maximalwert von φ sein. Die Gleichung (317) kann folgendermassen transformirt werden:
Es ist

$$\frac{90}{\beta}=\frac{\cot\varphi}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)},$$

$$\frac{90-\beta}{90+\beta}=\frac{\cot\varphi-\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}{\cot\varphi+\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}=\frac{\cos(\beta+\varphi)\cos\varphi-\sin(\beta+\varphi)\sin\varphi}{\cos(\beta+\varphi)\cos\varphi+\sin(\beta+\varphi)\sin\varphi}=$$

$$=\frac{\cos(\beta+2\varphi)}{\cos\beta},$$

$$\cos(\beta+2\varphi)=\frac{90-\beta}{90+\beta}\cos\beta. \tag{318}$$

Auf Grund dieser Gleichung ist die folgende Tabelle berechnet worden, welche die Abhängigkeit zwischen φ und β veranschaulicht.

β	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
φ	0°	14°.01	16°.64	17°.17	16°.43	14°.71	12°.13	8°.77	4°.71	0°

Der Winkel φ erreicht sein Maximum für einen zwischen 20° und 30° liegenden Wert von β. Um die Lage der gefährlichsten Gleitfuge genau zu bestimmen, werde die Gleichung (318) differentiirt und $\frac{d\varphi}{d\beta}=0$ gesetzt. Auf die Winkeleinheiten Bezug nehmend findet man

$$-\sin(\beta+2\varphi)=\cos\beta\,\frac{180}{\pi}\,\frac{d}{d\beta}\left(\frac{90-\beta}{90+\beta}\right)-\sin\beta\,\frac{90-\beta}{90+\beta}$$

oder

$$(90+\beta)^2\sin(\beta+2\varphi)=\frac{180^2}{\pi}\cos\beta+(90^2-\beta^2)\sin\beta.$$

Da ferner

$$\sin(\beta+2\varphi)=\sqrt{1-\cos^2(\beta+2\varphi)}=\frac{\sqrt{360\,\beta+(90-\beta)^2\sin^2\beta}}{90+\beta}$$

ist, folgt

$$\frac{180^2}{\pi}\cos\beta+(90^2-\beta^2)\sin\beta=(90+\beta)\sqrt{360\,\beta+(90-\beta)^2\sin^2\beta}$$

und endlich nach Erhebung in's Quadrat und Vereinfachung

$$\frac{180^3}{2\pi^2}\cos^2\beta+\frac{180}{\pi}(90^2-\beta^2)\sin\beta\cos\beta-\beta\,(90+\beta)^2=0. \tag{319}$$

Durch zweckmässige Auflösung dieser transcendenten Gleichung findet man

$$\beta = 28^\circ.64.$$

Der entsprechende Maximalwert von φ ist

$$\varphi = 17^\circ.18.$$

Diesem Werte entspricht der Reibungscoefficient $f = \text{tg}\, 17^\circ.18 = 0.309$. In Wirklichkeit ist gewöhnlich $f = 0.40$—0.75. Es geht hieraus hervor, dass die Gefahr des Gleitens in den Fugen nur ausnahmsweise eine Bedeutung erlangt. Wenn ein Gewölbe einstürzt, so geschieht es meistens durch Kippen um die Kanten der Fugen.

§ 92.

Stützlinien in Gewölben.

Stützlinien von Gewölben.

Die Untersuchung der Stabilität eines Tonnengewölbes in Bezug auf Gleiten und Kippen wird am besten mit Hülfe der Druck- oder Stützlinie ausgeführt. Darunter versteht man das zu den belastenden Kräften, d. h. dem eigenen Gewichte des Gewölbes, der auf demselben ruhenden permanenten Belastung und einer eventuell vorhandenen zufälligen Belastung gehörende Seilpolygon; seine Seiten geben die Richtungen der Drücke in den Fugenflächen an. Wenn das Gewölbe aus sehr vielen und schmalen keilförmigen Elementen gebaut ist, so kann die Stützlinie annähernd durch eine Curve ersetzt werden. Jede Stützlinie muss folgenden Bedingungen genügen:

1) *Jede Seite oder jedes Element der Stützlinie muss die entsprechende Fugenfläche innerhalb der Kanten der Fuge schneiden.*

2) *Jede Seite oder jedes Element der Stützlinie muss die entsprechende Fuge so schneiden, dass der Winkel zwischen der Normalen der Fuge und der Stützlinie kleiner als der Reibungswinkel ist.*

Die erstere Bedingung ist notwendig, damit kein Kippen in Bezug auf irgend welche Fugenkanten eintrete; die zweite Bedingung muss erfüllt sein, damit kein Gleiten in einzelnen Fugenflächen entstehe. Bei wirklich aus-

zuführenden Gewölben muss die Stützlinie noch etwas strengere Forderungen erfüllen, worüber mehr auf p. 509 unten. Die keilförmigen Bauelemente des Gewölbes sind als starre Körper betrachtet worden; thatsächlich können sie aber nicht beliebig grossen Kräften widerstehen. Es ergiebt sich hieraus als dritte Bedingung der Stabilität des Gewölbes, dass der Druck in den Fugenflächen eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, weil das Gewölbematerial sonst in Gefahr wäre zerstört zu werden. Die genauere Erforschung dieses Umstandes gehört der Festigkeitslehre an.

Symmetrische Anordnung. Belastungsfläche.

Es werden im folgenden nur solche Gewölbe in Betracht gezogen, welche aus zwei symmetrischen Hälften bestehen und symmetrisch belastet sind. Die Belastung wird am zweckmässigsten graphisch durch eine Fläche oberhalb des Gewölbebogens dargestellt, welche man so construirt, dass man sich die wirkliche Belastung durch eine andere aus dem Material des Gewölbebogens bestehende ersetzt denkt. Wenn die Belastung aus homogenem Material besteht, welches direct auf dem Gewölbe gelagert ist, braucht man zur Construction der Belastungsfläche nur die von der oberen Gewölbefläche aus gemessenen verticalen Ordinaten in dem Verhältnisse des specifischen Gewichtes des Belastungsmaterials zu dem specifischen Gewichte des Gewölbematerials zu vergrössern.

Horizontaldruck.

Infolge der Symmetrie muss der Druck in der Scheitelfuge horizontal sein, er werde mit H bezeichnet. Im allgemeinen kann der Angriffspunkt des Druckes H ebensowenig wie die Stützlinie im ganzen mit Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden; nur in gewissen Grenzfällen ist die Bestimmung möglich. Nimmt man drei Punkte der Stützlinie als bekannt an, und zwar einen Punkt C in der Scheitelfuge und einen Punkt in jedem der Widerlagerfugen, so kann die Drucklinie im ganzen construirt werden; nach § 58 wird in der That ein zu gegebenen Kräften gehörendes Seilpolygon durch

drei Punkte auf je einer Seite völlig bestimmt (Fig. 341). Auch der entsprechende Horizontaldruck wird dabei erhalten; er ist gleich der Polweite des Kräftepolygons. Mit Hülfe einer Momentengleichung für den Punkt A in der Widerlagerfuge als Pol findet man

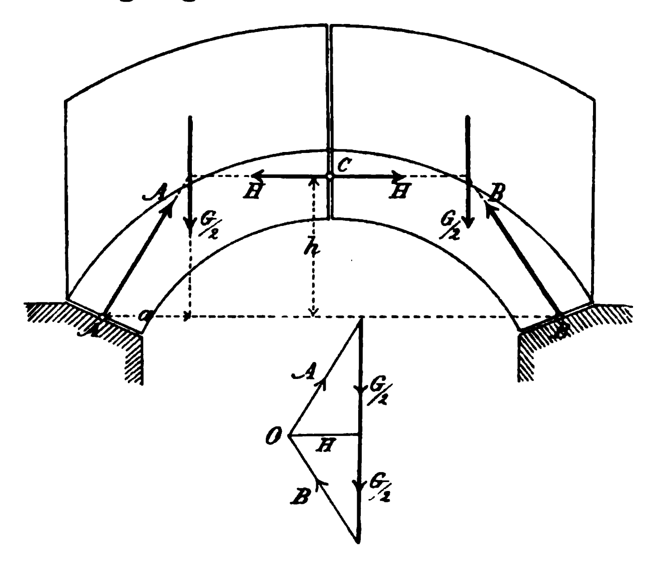


Fig. 341.

$$H = \frac{a}{2h} G.$$

Nachdem die durch die drei Punkte A, C und B geführte Stützlinie construirt worden ist, unterliegt es keiner Schwierigkeit zu untersuchen, ob sie den beiden Stabilitätsbedingungen (p. 494) genügt. Auch ohne die Stützlinie im ganzen zu zeichnen, entscheidet man in einfacher Weise, ob jene Bedingungen für eine einzelne Fuge erfüllt sind (Fig. 342). Der Druck in dieser Fuge ist diejenige Kraft K, welche dem Horizontaldrucke H und der gesamten Belastung P zwischen der betrachteten Fuge und der Scheitelfuge das Gleichgewicht hält. Hierdurch wer-

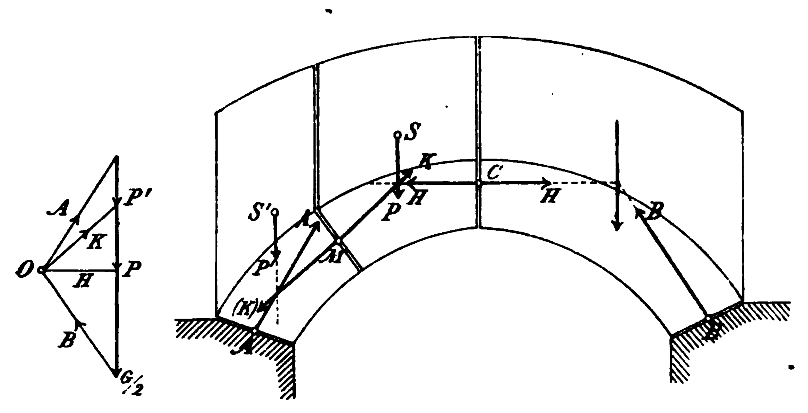


Fig. 342.

den seine Grösse, seine Richtung und sein Angriffspunkt bestimmt.

Grenzwerte des Horizontaldruckes.

Zu einem gegebenen Gewölbe kann eine beliebige Anzahl von Stützlinien construirt werden. Eine Stützlinie wird entweder durch ihre Schnittpunkte mit der Scheitelfuge und den Widerlagerfugen oder durch die Grösse und Richtungslinie des Horizontaldruckes H bestimmt. Die Untersuchung der Stabilität eines Gewölbes muss somit auf die Betrachtung gewisser Grenzlagen der Stützlinie oder gewisser Grenzwerte des Horizontaldruckes hinauslaufen. Der wirkliche Horizontaldruck muss zwischen einem oberen und einem unteren Grenzwerte liegen, welche eben noch stabile Stützlinien liefern.

Die Figur 343 veranschaulicht eine Stützlinie, welche durch den höchsten Punkt der Scheitelfuge und die innersten Punkte der Widerlagerfugen geführt worden ist.

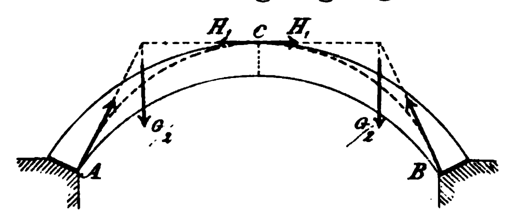


Fig. 343.

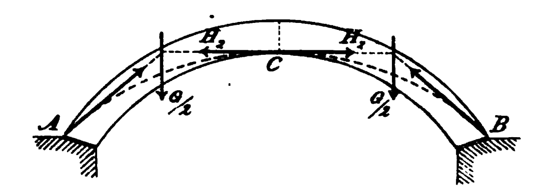


Fig. 344.

Vorausgesetzt, dass sie den beiden Bedingungen auf p. 494 genügt, liefert sie den kleinsten möglichen Horizontaldruck H_1. Würde der Horizontaldruck einen noch kleineren Wert annehmen, so müsste der Gewölbebogen einstürzen, und zwar so, dass die Scheitelfuge sich nach innen, die Widerlagerfugen sich nach aussen öffnen.

In der Figur 344 ist eine Stützlinie dargestellt, welche durch den untersten Punkt der Scheitelfuge und die äussersten Punkte der Widerlagerfugen geführt wurde. Wenn sie die Bedingungen auf p. 494 erfüllt, d. h. überhaupt möglich ist, so liefert sie einen grössten Horizontaldruck H_2. Für einen noch grösseren Wert von H würde der Gewölbebogen so einstürzen, dass die Scheitelfuge sich nach aussen, die Widerlagerfugen sich nach innen öffnen.

Je dünner das Gewölbe ist, desto mehr nähern sich die Werte H_1 und H_2 einander und um so kleiner wird das Intervall, innerhalb dessen der Wert des wirklichen Horizontaldruckes liegen muss.

Die durch die Figuren 343 und 344 veranschaulichten Stützlinien brauchen nicht immer zu den möglichen, d. h. den die Bedingungen auf p. 494 erfüllenden zu gehören. Dadurch wird das zwischen H_1 und H_2 liegende Intervall noch beschränkter. Es werde zunächst angenommen, dass die Bedingung 2) für alle Fugen erfüllt sei, nicht aber die Bedingung 1); d. h. man sieht von der Gefahr des Gleitens in den Fugen ab und betrachtet nur die Stabilität in Bezug auf Kippen um die Kanten der Fugen.

Wenn die durch den höchsten Punkt der Scheitelfuge und die innersten Punkte der Widerlagerfugen gelegte Stützlinie die Bedingung 1) nicht erfüllt, so wird sie im allgemeinen aus dem Gewölbebogen nach innen heraustreten, wie die Figur 345 es zeigt. Man stellt sich dann den Punkt C als fest und den Horizontaldruck als allmählich vergrössert vor. Dabei rücken die beiden Punkte L und L' näher an einander und fallen zuletzt in einem Punkte M zusammen, in welchem die Stützlinie den inneren Gewölbebogen berührt. Diese Stützlinie stellt einen Grenzfall dar; der entsprechende Horizontaldruck werde mit H_1 bezeichnet. Der wirkliche Horizontaldruck muss dann grösser als H_1 sein; wäre er kleiner, so würde das Gewölbe so einstürzen, dass die Scheitelfuge, die Widerlagerfugen, die Fuge bei M und ihre symmetrische Fuge sich öffnen, und zwar die beiden letzteren Fugen nach aussen. Die Fuge bei M heisst B r u c h f u g e.

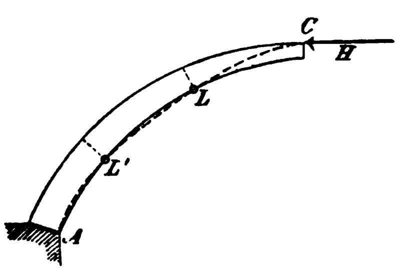


Fig. 345.

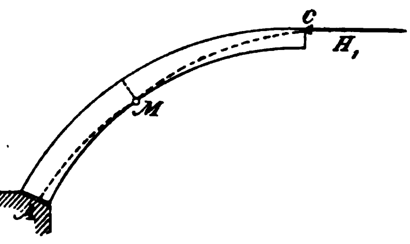


Fig. 346.

Zur Berechnung von H_1 bestimmt man den Horizontaldruck H, welcher einer durch die innere Kante einer beliebigen Fuge L und die obere Kante der Scheitelfuge geführten Stützlinie entspricht, lässt diese Fuge L sich von der Scheitelfuge bis zur Widerlagerfuge bewegen und nimmt unter sämtlichen Werten von H das Maximum. Dieses Maximum ist H_1. Die Stützlinien

durch C und L oder durch C und L' in Fig. 345 fallen mit einander zusammen und liefern denselben Wert H. H wird ein Maximum, wenn L und L' beide nach M rücken (Fig. 346), wobei die Stützlinie die innere Gewölbefläche berührt. Giebt es keine solche berührende Stützlinie, so wird H am grössten, wenn L mit A zusammenfällt.

Wenn die Stützlinie in Fig. 344 die Bedingung 1) auf p. 494 nicht erfüllt, so tritt statt H_2 ein anderer kleinerer Grenzwert, welcher auch mit H_2 bezeichnet werde. Man betrachtet jetzt eine Stützlinie durch die innere Kante der Scheitelfuge, welche die äussere Gewölbefläche in einem Punkte N berührt (Fig. 347). Die Fuge in N ist eine Bruchfuge, welche sich gleichzeitig mit der Scheitelfuge und den Widerlagerfugen öffnet, und zwar nach innen, wenn der Horizontaldruck zu gross wird.

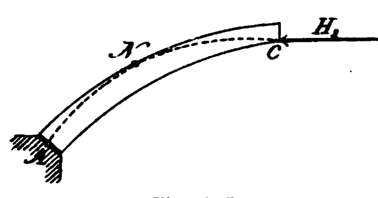


Fig. 347.

H_2 wird in ähnlicher Weise wie H_1 berechnet. Man führt eine Stützlinie durch die innere Kante der Scheitelfuge und die äussere Kante einer beliebigen Fuge, berechnet den entsprechenden Horizontaldruck H und sucht sein Minimum auf, indem die Lage der Fuge allmählich verändert wird.[1]

Ausser dem Grenzwerte H_1 erhält man noch einen zweiten unteren Grenzwert H_3 des Horizontaldruckes, wenn man die Stabilität des Gewölbes in Bezug auf Gleiten in den Fugen in Betracht zieht. Ebenso reiht sich an den oberen Grenzwert H_2 ein zweiter Wert H_4. Eventuell muss H_1 durch H_3 oder H_2 durch H_4 ersetzt

[1] Die oben behandelten Stützlinien zur Bestimmung von H_1 und H_2 umfassen noch nicht alle Fälle, welche vorkommen können. Eine vollständigere Behandlung findet man in A. Ritters Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.

werden. Die Berechnung der Grenzen H_3 und H_4 ist überflüssig, wenn die den Werten H_1 und H_2 des Horizontaldruckes entsprechenden Stützlinien die Bedingung 2) auf p. 494 erfüllen, sonst nicht.

Zur Bestimmung des Grenzwertes H_3 wird eine beliebige durch den Winkel β (Fig. 348) gegebene Fuge des Gewölbes ausgewählt und die Grösse des Horizontaldruckes H berechnet, welcher erforderlich ist um das Gleiten des zwischen der betrachteten Fuge und der Scheitelfuge liegenden Stückes des Gewölbebogens nach innen zu verhindern. Man findet

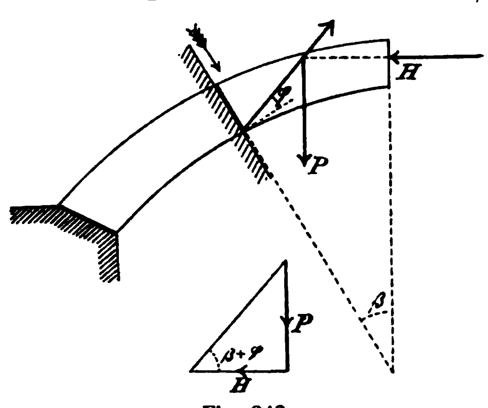


Fig. 348.

$$H = P \cot(\beta + \varphi).$$

Dann untersucht man, bei welcher Fuge der grösste Wert von H vorkommt. Dieser grösste Wert ist eben H_3. Wenn der wirkliche Horizontaldruck grösser als H_3 ist, so entsteht in keiner Fuge ein Gleiten des mittleren Stückes des Gewölbebogens nach innen.

In ähnlicher Weise berechnet man den Grenzwert H_4 (Fig. 349). Damit das Ge-

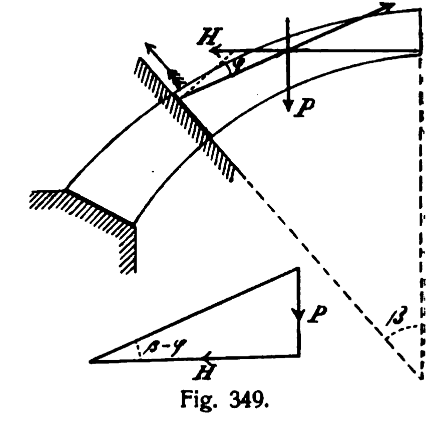


Fig. 349.

wölbestück zwischen der Fuge β und der Scheitelfuge nicht nach aussen gleite, darf der Horizontaldruck den Wert

$$H = P \cot (\beta - \varphi)$$

nicht überschreiten. H_4 ist der kleinste unter allen diesen Werten H für sämtliche Lagen der Fuge β. Wenn der wirkliche Horizontaldruck kleiner als H_4 ist, so entsteht kein Gleiten nach aussen.

Nachdem H_1, H_2, H_3 und H_4 gefunden sind, wählt man unter H_1 und H_3 den grösseren Wert, er sei mit H_{min} bezeichnet, und unter H_2 und H_4 den kleineren Wert, er sei H_{max}. Damit das untersuchte Gewölbe sowohl in Bezug auf Gleiten in den Fugen wie in Bezug auf Kippen um ihre Kanten stabil sei, muss

$$H_{min} < H_{max} \tag{320}$$

sein. Wenn man $H_{min} = H_{max}$ setzt, so kommt man an die Grenze der Stabilität, und findet dem entsprechend eine gewisse kleinste Gewölbestärke.

Anwendungen.

1) *Stabilität des unbelasteten scheitrechten Gewölbes.*

In § 91 Anw. 1) wurde die Stabilität des unbelasteten scheitrechten Gewölbes in Bezug auf Gleiten in den Fugen untersucht, und zwar zeigte es sich, dass Stabilität in dieser Beziehung stets vorhanden war. Die Sache ändert sich, sobald gleichzeitiges Kippen um die Kanten der Fugen und Gleiten längs derselben in Betracht gezogen wird. Es sollen jetzt die vier Grenzwerte H_1, H_2, H_3 und H_4 des Horizontaldruckes berechnet werden.

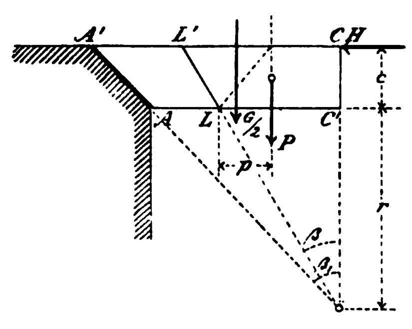


Fig. 350.

Zur Berechnung von H_1 wird eine Stützlinie durch den obersten Punkt C der

Scheitelfuge und durch die innere Kante L einer beliebigen Fuge geführt (Fig. 350). Bezeichnet man mit γ das pro Flächeneinheit des Gewölbedurchschnitts gerechnete Gewicht des Gewölbes, mit G das ganze Gewicht, so ist

$$\gamma = \frac{G}{c(2r+c)\operatorname{tg}\beta_1}.$$

Es sei ferner P das Gewicht des Gewölbestückes $LC'CL'$, welches aus einem Rechteck und einem Dreieck bestehend gedacht werde. Mit Hülfe einer Momentengleichung für L als Pol findet man

$$Hc = Pp = \tfrac{1}{2}\gamma\, cr^2 \operatorname{tg}^2\beta - \tfrac{1}{6}\gamma\, c^3 \operatorname{tg}^2\beta, \tag{321}$$

d. i.

$$H = \tfrac{1}{6}\gamma\,(3r^2 - c^2)\operatorname{tg}^2\beta.$$

Mit Anwendung der Bezeichnung

$$n = \frac{r}{c}$$

ergiebt sich weiter

$$H = \frac{3n^2-1}{6}\gamma\, c^2 \operatorname{tg}^2\beta.$$

Der Horizontaldruck H erreicht seinen grössten Wert H_1 für $\beta = \beta_1$. Man erhält somit

$$H_1 = \frac{3n^2-1}{6}\gamma\, c^2 \operatorname{tg}^2\beta_1. \tag{322}$$

Am scheitrechten Gewölbe kann keine durch die innere Kante C' der Scheitelfuge gehende Stützlinie construirt werden. Es ist deshalb

$$H_2 = \infty. \tag{323}$$

Zur Berechnung von H_3 geht man von der Gleichung

$$H = P\cot(\beta + \varphi)$$

aus. Man hat

$$P = \tfrac{1}{2}\gamma\, c(2r+c)\operatorname{tg}\beta;$$

es wird also

$$H = \frac{2n+1}{2}\gamma\, c^2 \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}.$$

Das Maximum von H ist ein anderes, je nachdem $\beta_1 \gtreqless 45° - \frac{\varphi}{2}$ ist. Für $\beta_1 > 45° - \frac{\varphi}{2}$ erreicht H sein Maximum mit

$$\beta = 45° - \frac{\varphi}{2},$$

wie aus der Anw. in § 91, p. 488 hervorgeht, und zwar ist

$$H_3 = \frac{2n+1}{2} \gamma c^2 \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{324}$$

Ist dagegen $\beta_1 < 45° - \frac{\varphi}{2}$, so erreicht H für $\beta = \beta_1$ sein Maximum

$$H_3 = \frac{2n+1}{2} \gamma c^2 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg}(\beta_1 + \varphi)}. \tag{325}$$

Aus den Werten von H_3 erhält man die Werte von H_4, wenn man φ durch $-\varphi$ ersetzt. Für $\beta_1 > 45° + \frac{\varphi}{2}$ wird

$$H_4 = \frac{2n+1}{2} \gamma c^2 \operatorname{tg}^2\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{326}$$

und für $\varphi < \beta_1 < 45° + \frac{\varphi}{2}$

$$H_4 = \frac{2n+1}{2} \gamma c^2 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg}(\beta_1 - \varphi)} \tag{327}$$

gefunden.

Die obere Grenze H_{max} des Horizontaldruckes ist gleich H_4, die untere Grenze H_{min} entweder gleich H_1 oder gleich H_3. Weil H_3 immer kleiner als H_4 ist, so können die beiden Grenzen nur für $H_{min} = H_1$ einander gleich werden. Nimmt man $\beta_1 < 45° + \frac{\varphi}{2}$ an, welche Bedingung bei fast allen scheitrechten Gewölben erfüllt ist, so erhält man zur Bestimmung der Grenzstärke des Gewölbes die Gleichung

$$\frac{3n^2-1}{6} \gamma c^2 \operatorname{tg}^2 \beta_1 = \frac{2n+1}{2} \gamma c^2 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg}(\beta_1 - \varphi)},$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg}(\beta_1 - \varphi) = \frac{3(2n+1)}{3n^2-1}. \tag{328}$$

In diesem Grenzfalle giebt es nur e i n e mögliche Stützlinie (Fig. 351); sie geht durch die Punkte A, C und B und bildet mit den Normalen der Widerlagerfugen den Winkel φ. Würde die Dicke des Gewölbes noch kleiner als der dieser Stützlinie entsprechende Grenzwert sein, so

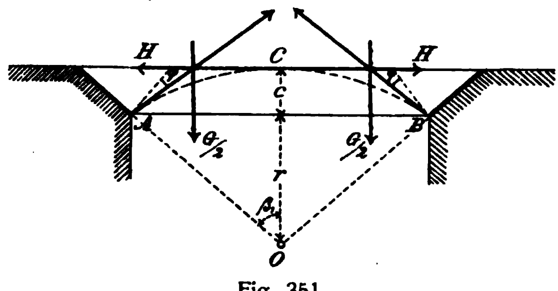


Fig. 351.

müsste das Gewölbe einstürzen, und zwar so, dass die Scheitelfuge sich nach innen, jede der Widerlagerfugen sich nach aussen öffnet und die beiden Gewölbehälften zugleich hinauf längs der Widerlager zu gleiten beginnen.

Die Gültigkeit der Gleichung (328) ist auf das Intervall $\varphi < \beta_1 < 45° + \frac{\varphi}{2}$ beschränkt. Wenn die beiden Seiten der Gleichung (328) mit λ bezeichnet werden, so erhält man zur Berechnung von n die Gleichung

$$3\lambda n^2 - 6n - (\lambda + 3) = 0.$$

Die eine Wurzel

$$n = \frac{1}{\lambda}\left\{1 + \sqrt{\frac{\lambda^2 + 3\lambda + 3}{3}}\right\} = \frac{r}{c} \tag{329}$$

bestimmt für β_1 und den Reibungscoefficienten f die kleinste zulässige Gewölbestärke.

Mit Hülfe der Gleichung (328) könnte für gegebene Werte von f und n der Winkel β_1 berechnet werden. Setzt man zugleich

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 - f}{1 + f\operatorname{tg}\beta_1}$$

ein, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades in Bezug auf $\operatorname{tg}\beta_1$, deren Wurzel

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{f(1+\lambda)}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{f^2(1+\lambda)^2}{4}} \tag{330}$$

eine Lösung der Aufgabe liefert. Nimmt man als in der Praxis oft gebrauchten Mittelwert $\varphi = 30°$ an, dem Reibungscoefficienten $f = 0.577$ entsprechend, so berechnet man mit Hülfe der Formel (330) die Tabelle:

$n =$	2.5275	5	7.5	10	15	20	30	50	∞
$\beta_1 =$	60°	50°.31	45°.63	42°.81	39°.50	37°.59	35°.44	33°.49	30°

2) Man untersuche die Stabilität und bestimme die kleinste Stärke eines scheitrechten Gewölbes, welches ausser dem eigenen Gewichte eine auf dem Gewölbe gleichförmig ausgebreitete Belastung trägt, die aus dem Gewölbematerial besteht und deren Höhe gleich der Stärke des Gewölbes ist.

3) ***Man bestimme die Bruchfuge am unbelasteten Halbkreisgewölbe.***

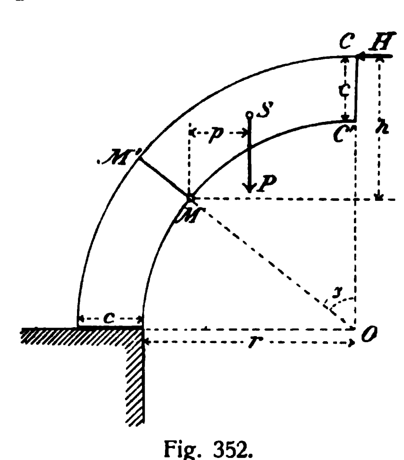


Fig. 352.

Die Bruchfuge erhält man im Zusammenhange mit der Berechnung des Horizontaldruckes H_1. Zu diesem Zwecke führt man eine Stützlinie durch die innere Kante M einer beliebigen Fuge und die obere Kante C der Scheitelfuge (Fig. 352). Dieser Stützlinie entspricht der Horizontaldruck

$$H = \frac{p}{h} P,$$

wo

$$h = c + r(1 - \cos\beta)$$

ist. Das Moment der Kraft P in Bezug auf den Pol M ist gleich der Differenz der Momente der Sectoren $OM'C$ und OMC'. Man findet, mit Anwendung der Bezeichnung

$$R = r + c,$$

$$Pp = \gamma \left\{ \frac{(R^2 - r^2) r}{2} \beta \sin\beta - \frac{R^3 - r^3}{3} (1 - \cos\beta) \right\}.$$

Die Grösse γ hat die nämliche Bedeutung wie in der Anw. 1).

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{r}{c} = n,$$

so erhält man

$$(331)\quad \frac{H}{\gamma} = \frac{3n(2n+1)\beta\sin\beta - 2(3n^2+3n+1)(1-\cos\beta)}{6(n+1-n\cos\beta)}c^2.$$

Es soll jetzt das Maximum von H als Function von β berechnet werden. Wenn man die Ableitung von H nach β gleich Null setzt, so findet man zur Bestimmung der Bruchfuge die Gleichung

$$(332)\quad \frac{\beta\left\{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\beta\right\}}{\sin\beta} + \cos\beta = \frac{6n^3+3n^2-3n-2}{3n^2(2n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{3n+2}{3n^2(2n+1)}.$$

Die Anwendbarkeit dieser Gleichung ist auf das Intervall $0 < \beta < 90°$ beschränkt. Für $\beta = 0$ liefert sie entweder

$$(333)\quad n = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.5774$$

oder

$$n = \infty.$$

Beiden Werten entspricht $H_1 = 0$. Für $n \leqq 0.5774$ oder $\frac{c}{r} \geqq \sqrt{3} = 1.732$ ist das Gewölbe mit Sicherheit stabil, und es giebt keine Bruchfuge. Dagegen giebt es eine Bruchfuge, wenn $\frac{c}{r} < \sqrt{3}$ ist. Eine auf die Gleichung (332) gegründete nähere Untersuchung zeigt, dass der der Bruchfuge entsprechende Wert des Winkels β für

$$n = 2.016 \text{ oder } \frac{c}{r} = 0.496$$

das Maximum $\beta = 64°\,10'$ liefert. Für $\beta = 90°$ giebt die Gleichung (332) keine positive Wurzel n.

4) Man leite für das unbelastete halbkreisförmige Gewölbe folgende Werte ab:

$$(334)\quad H_1 = \left\{\frac{2n+1}{2}\left(1+\frac{\beta}{\operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{3n^2+3n+1}{3n}\right\}c^2\gamma,$$

wo β die der Bruchfuge entsprechende Wurzel der Gleichung (332) ist,

$$H_2 = \left\{ \frac{2n+1}{4} \pi - \frac{3n^2+3n+1}{3(n+1)} \right\} c^2 \gamma, \tag{335}$$ [1]

$$H_3 = \frac{2n+1}{2} \cos^2(\beta + \varphi) c^2 \gamma, \tag{336}$$

wo β eine Wurzel der Gleichung

$$\sin 2(\beta + \varphi) = 2\beta \tag{337}$$

ist, und

$$H_4 = \frac{2n+1}{4} \pi \operatorname{tg} \varphi \, c^2 \gamma, \tag{338}$$

und berechne für $\varphi = 30°$ die kleinste zulässige Grösse des Quotienten $\frac{c}{r}$.

Praktische Regel für die Gewölbeconstruction.

In wirklich auszuführenden Gewölben darf sich die Stützlinie natürlich nicht den Grenzen nähern, bei welchen das Gewölbe in Gefahr ist zerstört zu werden, sondern man verlangt eine gewisse Sicherheit gegen Zerstörung. Der vorteilhafteste Fall wäre derjenige, in welchem die Stützlinie mit der Gewölbeaxe, d. h. mit dem Orte der Schwerpunkte der Fugenflächen zusammenfallen würde und zugleich alle Fugen rechtwinklig schneiden würde. Dann würde sich der Druck in jeder Fuge gleichförmig auf die ganze Fugenfläche verteilen. Eine so hohe Stabilität wie die jetzt betrachtete kann aber nur ausnahmsweise in der Baupraxis verlangt werden; die Resultirende der Drücke in der Fugenfläche kann bis zu einem gewissen Grade von der Normalen im Stützpunkte abweichen. Die Druckverteilung in der Fugenfläche ist dann nicht mehr gleichförmig. Es werde angenommen, dass die Normalcomponenten der Elementardrücke in der Fläche proportional dem Abstande von einer horizontalen Axe in der Fugenfläche seien; in Wirklichkeit ist dies

[1] Siehe Ritters Ingenieur-Mechanik, § 150.

wenigstens annähernd der Fall. Als praktische Regel der rationellen Gewölbeconstruction gilt, dass diese Axe ausserhalb der Fugenfläche liegen soll oder höchstens mit einer Kante zusammenfallen darf. Würde diese Axe innerhalb der Fläche liegen, so würden sowohl Druck als Zug in ihr vorkommen, was nicht zulässig ist. Fällt die Axe mit einer Kante zusammen, so werden die Elementardrücke graphisch durch die Ordinaten einer geraden Linie dargestellt (Fig. 353), und ihre Resultirende geht durch den Schwerpunkt der Dreiecksfläche, d. h. sie teilt die Fuge in zwei Teile, welche sich wie 2 : 1 verhalten. Weil die Axe alle mögliche Lagen ausserhalb der Fuge annehmen kann, so kann die Resultirende in jedem Punkte des innersten Drittels der Fuge angreifen.

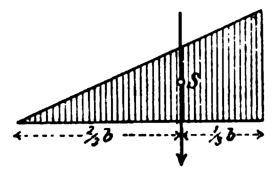


Fig. 353.

Um die Stabilität eines gegebenen Gewölbebogens zu untersuchen, trägt man die beiden Linien auf, welche die Fugen in drei gleiche Teile teilen und sieht nach, ob die Stützlinie der Regel genügt:

Die Stützlinie muss sich innerhalb des innersten Drittels des Gewölbedurchschnitts befinden.

Mit Hülfe des oben dargelegten unterliegt es keiner Schwierigkeit Gewölbeconstructionen in Bezug auf ihre Stabilität zu untersuchen, wenn die Bedingung 1) auf p. 494 durch die jetzt gefundene strengere Bedingung ersetzt wird. Am einfachsten führt man die Untersuchung graphisch aus, oder man berechnet die verschiedenen Grenzwerte des Horizontaldruckes und gründet darauf die Bestimmung der kleinsten zulässigen Stärke des Gewölbes. Hier kann nicht weitläufiger auf die allgemeine Gewölbetheorie eingegangen werden als es oben geschehen ist.

§ 93.

System von verticalen Parallelplatten.

Belastungsfläche und Stützlinie.

Man erhält den Fall, in welchem alle Fugen vertical sind, als einen Grenzfall des in § 92 betrachteten Falles, wenn man die gemeinsame Schnittlinie der Ebenen der Fugen in's Unendliche rücken lässt. Das Gewölbe verwandelt sich dabei in ein System von Platten mit verticalen Fugenflächen, welches als zwischen zwei verticalen Wänden eingespannt gedacht werden muss. Der Querschnitt des Bogens und die oberhalb derselben construirte Fläche, welche die auf das Gewölbe ruhende Belastung darstellt (Fig. 354), bilden eine Belastungsfläche, welche direct die auf ein Stück der Horizontalprojection des Gewölbes zu beziehende Belastung angiebt, ganz analog mit der in § 78 betrachteten Belastungsfläche bei der allgemeinen Kettenlinie. Der Kettenlinie in § 78 entspricht die Stützlinie des Systems. Wenn das Gesetz der Belastung in beiden Fällen dasselbe ist, besitzen beide dieselbe Form mit dem Unterschiede, dass die Kettenlinie, in welcher alle Spannungen Zugspannungen sind, ihre concave Seite nach oben kehrt, während die Stützlinie, welche nur Druckspannungen anzeigt, ihre concave Seite nach unten kehrt. Damit das zwischen zwei verticalen Wänden eingespannte Plattensystem im stabilen Gleichgewichte sei, muss die Stützlinie überall innerhalb des Durchschnitts der Platten verlaufen und darf nirgends mit der Horizontalebene einen grösseren Winkel als den Rei-

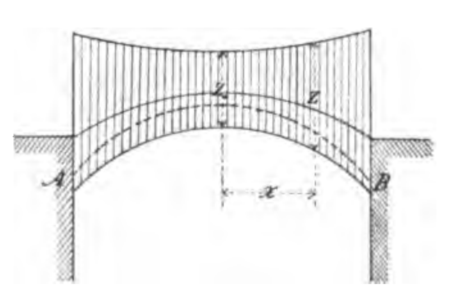


Fig. 354.

bungswinkel einschliessen. Durch graphische Construction der an einem gegebenen Systeme mit bekannter Belastung möglichen Stützlinien, oder durch Berechnung der Grenzwerte H_1, H_2 und H_3 des Horizontaldruckes — H_4 kommt nicht in Betracht — kann die Stabilität in Bezug auf jede Art der Zerstörung untersucht werden.

Auch der Zusammenhang zwischen der Gleichung der Stützlinie und der Form der Belastungsfläche ist derselbe wie bei der allgemeinen Kettenlinie. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Stützlinie in Bezug auf ein Coordinatensystem mit einer horizontalen x-Axe und einer y-Axe durch den Scheitel der Stützlinie. Ferner sei z die Ordinate der Belastungsfläche und die Grösse γ die nämliche wie in § 92. Der Zusammenhang zwischen y und z ist dann durch die Formel

$$p = \gamma z = H \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| \tag{339}$$

ausgedrückt (vergl. die Gl. 252).

Praktische Formel für den Horizontaldruck eines Gewölbes.

Man leitet hieraus einen beachtenswerten Ausdruck für den Horizontaldruck ab, welcher auch für die praktische Construction der Gewölbebogen mit geneigten Fugen anwendbar ist. Um diesen Ausdruck zu finden, berechnet man den Krümmungsradius der Stützlinie in ihrem Scheitelpunkte. Der allgemeine Ausdruck des Krümmungsradius einer Curve ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}.$$

In dem Scheitelpunkte ist die Tangente der Stützlinie horizontal, also $\frac{dy}{dx} = 0$, und man erhält

$$\varrho_0 = \frac{1}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|},$$

wo der Nenner für $x = 0$ zu nehmen ist. Die Gleichung (339) liefert für $x = 0$

$$\gamma z_0 = H\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|,$$

wo z_0 die Ordinate der Belastungsfläche am Scheitel bezeichnet. Es ergiebt sich also

(340) $$H = \gamma\varrho_0 z_0 = p_0\varrho_0.$$

Anwendungen.

1) Unbelastetes System mit überall gleich hohen Fugen.

Die Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection ist constant. Nach § 79 *A* muss die Stützlinie eine Parabel mit verticaler Axe sein, welche jetzt ihre concave Seite nach unten kehrt (Fig. 355). Es werde angenommen, dass auch die Begrenzungscurven des Gewölbedurchschnitts zwei Parabeln, und zwar beide congruent, seien. Die Horizontaldrücke H_1, H_2 und H_3 sollen jetzt berechnet werden.

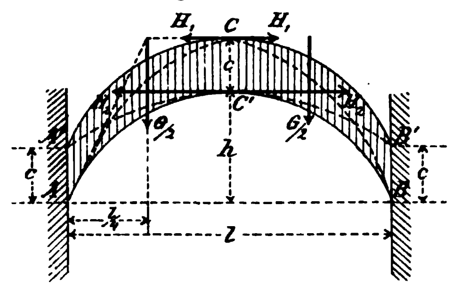


Fig. 355.

H_1 entspricht einer durch die Punkte *A*, *C* und *B* geführten Stützlinie und hat die Grösse

$$H_1 = \frac{l}{8(h+c)}G.$$

H_2 entspricht der als möglich vorausgesetzten Stützlinie durch *A'*, *C'* und *B'* und zwar ist

$$H_2 = \frac{l}{8(h-c)}G.$$

Endlich entspricht H_3 einer Stützlinie, welche an den Widerlagern den Winkel φ mit der Horizontalebene einschliesst. Die Grösse dieses Druckes ist

$$H_3 = \frac{G}{2 \operatorname{tg} \varphi}.$$

H_{min} ist gleich dem grösseren der Werte H_1 und H_3; H_{max} ist gleich H_2. Wenn $H_3 > H_1$ ist, so ist die Bedingung der Stabilität $H_2 > H_3$, d. h.

$$f = \operatorname{tg} \varphi > \frac{4(h-c)}{l}.$$

Die Gleichung

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4(h-c)}{l}$$

liefert als kleinste mögliche Stärke des Gewölbes

$$c = h - \frac{1}{4} fl.$$

2) Das in der Anw. 1) behandelte System der verticalen Platten werde mit gleichem Material so belastet, dass die obere Begrenzungsfläche eine horizontale Ebene durch den Scheitel des Gewölbes ist (Fig. 356). Man untersuche die Stabilität und berechne die Gleichung der Stützlinie.

Bei der Berechnung von H_1 und H_2 braucht man das statische Moment des halben Systems nebst Belastung in Bezug auf einen Punkt der Widerlagerfugen. Für die Platten selbst ergiebt sich das Moment

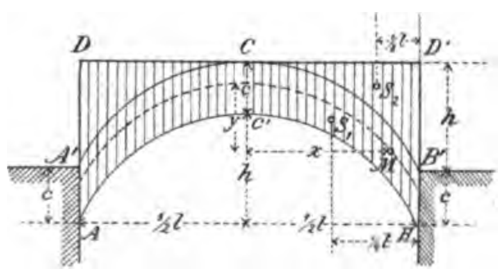


Fig. 356.

$$\frac{l}{4} \frac{cl\gamma}{2} = \frac{1}{8} \gamma c l^2.$$

r das Flächenstück $CB'D'$, welches von der Parabel CB' und den -aden CD' und $D'B'$ begrenzt wird, findet man den Flächeninhalt $\frac{1}{6} hl$ und das Moment

$$\frac{1}{8} l \cdot \frac{1}{6} hl\gamma = \frac{1}{48} \gamma hl^2.$$

Mit Hülfe dieser Werte berechnet man

$$H_1 = \frac{h + 6c}{48(h + c)} \gamma l^2$$

und

$$H_2 = \frac{h + 6c}{48(h - c)} \gamma l^2.$$

Ferner ergiebt sich

$$H_3 = \frac{h + 3c}{6f} \gamma l.$$

Wäre $H_3 > H_1$, so erhielte man als Bedingung der Stabilität $H_2 > H_3$. In dem Grenzfalle $H_2 = H_3$ wird die kleinste Gewölbestärke c eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{h + 6c}{8(h - c)} l = \frac{h + 3c}{f}.$$

Bezeichnet man den thatsächlichen Horizontaldruck mit H und benützt ein Coordinatensystem mit einer horizontalen x-Axe und einer verticalen y-Axe durch den Scheitel, so findet man mit Hülfe einer Momentengleichung in Bezug auf einen beliebigen Punkt M der Stützlinie als Pol die folgende Gleichung dieser Linie:

$$y = \frac{(3cl^2 + 2hx^2)\, x^2}{6Hl^2} \gamma.$$

Die Stützlinie ist also eine Parabel von der vierten Ordnung. Zu ihrer vollständigen Bestimmung müssen z. B. die Lage des Scheitels und die Grösse des Horizontaldruckes bekannt sein; diese Grössen können aber nur in gewissen Grenzfällen angegeben werden.

§ 94.

Bedingungen der gleichförmigen Drehung.

Oft muss man die Reibung an gleichförmig sich drehenden Körpern in Betracht ziehen; dies ist z. B. der Fall bei der in § 85 erwähnten Reibung an einem Tragzapfen und an einem Stützzapfen. Um Aufgaben dieser

Art behandeln zu können, muss man zunächst die Bedingungen der gleichförmigen Drehung eines starren Körpers um eine feste Axe ableiten. Diese Bedingungen gehören eigentlich zur Dynamik der starren Körper (dreizehnter Abschnitt), lassen sich aber schon jetzt finden.

Bei der gleichförmigen Bewegung eines einzelnen Punktes von der Masse m in einem Kreise vom Radius r wirkt die nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete constante Centripetalkraft $P = m\,\omega^2 r$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit eines Kreisradius bezeichnet. Man stelle sich einen Raum vor, welcher sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe des Kreises in dem Sinne der Bewegung des Punktes drehe; der Punkt bleibt in relativer Ruhe innerhalb dieses Raumes, und die Kraft P hält der Centrifugalkraft das Gleichgewicht. Handelt es sich statt um einen Punkt um einen starren Körper, welcher sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe dreht, so lässt sich die Bewegung durch die relative Ruhe des Körpers in Bezug auf einen um dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich drehenden Raum ersetzen. Das entsprechende System von Kräften im Gleichgewichte wird dabei aus sämtlichen äusseren Kräften und sämtlichen Centrifugalkräften für die einzelnen Massenelemente des Körpers gebildet. Dies kann auch so ausgedrückt werden, dass *das System der äusseren Kräfte dem System der Centripetalkräfte äquivalent sein muss,* und zwar in jedem Augenblicke während der Drehung.

Nach § 72 ist die Bedingung des Gleichgewichts von Kräften an einem starren Körper mit einer festen Axe, dass die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die Axe gleich Null sei. Weil die Centrifugalkräfte die Drehaxe schneiden und somit kein Moment liefern, ergiebt sich als Bedingung der gleichförmigen Drehung eines starren Körpers um eine feste Axe, dass *die Summe der Momente sämtlicher äusseren Kräfte in Bezug auf*

die feste Axe in jedem Augenblicke gleich Null sei. Ist umgekehrt diese Momentensumme gleich Null, so bleibt der Körper entweder in Ruhe oder dreht sich gleichförmig um die Axe. Die Centrifugalkräfte üben keinen Einfluss auf die Gleichgewichtsbedingungen aus, wohl aber auf die Reactionen an der festen Axe; jedoch werde die Bestimmung der Reactionen hier übergangen (siehe § 115). Wenn es keine äusseren Kräfte giebt, so ist eine gleichförmige Drehung um die feste Axe immer möglich, und zwar mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit. Die gleichförmige Drehung um eine feste Axe ist somit ein natürlicher Zustand des Körpers, welcher von selbst fortbesteht, so lange er von keinen äusseren Kräften (wie z. B. dem Reibungswiderstande) gestört wird.

Wenn der Körper ein homogener Rotationskörper ist, welcher sich um die Rotationsaxe dreht, so kommen die Centrifugalkräfte paarweise gleich gross und entgegengesetzt gerichtet vor; sie bilden also ein System, welches für sich im Gleichgewichte ist, und beeinflussen folglich auch die Reactionen an der Axe nicht. Im folgenden werden überall nur derartige Rotationskörper behandelt.

§ 95.

Zapfenreibung.

A. Cylindrische Zapfenlager.

Ein cylindrischer Tragzapfen werde durch die Kraft P gegen eine cylindrische Lagerschale gepresst; es soll das Moment M des in einer Normalebene zur Welle liegenden Kräftepaares berechnet werden, welches erforderlich ist um eine gleichförmige Drehbewegung der Welle zu erhalten, wenn keine anderen äusseren Kräfte auf die Welle wirken, aber die Zapfenreibung berücksichtigt wird (Fig. 357 a und b).

Wenn kein Kräftepaar auf die als ruhend vorausgesetzte Welle wirken würde, so würden die Gegendrücke der

Lagerschale auf den Zapfen eine Kraft N liefern, welche der Kraft P das Gleichgewicht hält (Fig. 357 a). Würde man nun ein Kräftepaar anbringen, dessen Moment eine

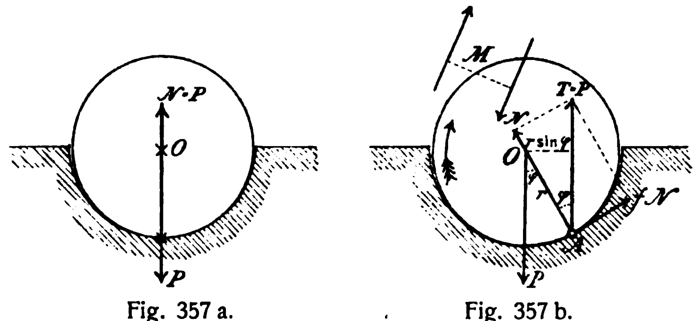


Fig. 357 a. Fig. 357 b.

gewisse Grösse nicht überschreitet, so würde die Ruhe fortbestehen, indem das Entstehen einer Drehbewegung durch die unvollständig oder im Grenzfalle vollständig entwickelten Reibungskräfte an den Berührungspunkten des Lagers verhindert würde. Für eine gewisse kleinste Grösse des Kräftepaares wird die Welle in Bewegung geraten und für eine gewisse hiervon im allgemeinen wenig verschiedene Grösse des Momentes wird die Drehung eine gleichförmige sein. In der Praxis hat nur die Reibung während der Bewegung eine Bedeutung; sie soll im folgenden ausschliesslich behandelt werden.

Zapfenreibungsmoment.

Wenn der Zapfen in Bewegung kommt, so gleitet er, wenn er schon in sein Lager gehörig eingelaufen ist, ein kleines Stück hinauf in der Lagerschale und berührt das Lager längs einer Erzeugenden A der Cylinderfläche (Fig. 357 b).* Längs dieser Linie entstehen zur Lagerfläche normale Drücke mit einer Resultirenden N sowie tangentielle Reibungswiderstände mit der Resultirenden fN, wo f der Coefficient der gleitenden Reibung während der Bewegung ist. N und fN liefern zusammen eine

* Eine strengere Theorie, welche eine Berührung in der ganzen Lagerfläche voraussetzt, wird unter C weiter unten entwickelt.

Resultirende T, welche den Winkel φ mit dem Zapfenradius in A bildet. Nach dem Satze in § 94 muss die Summe der Momente des Zapfendruckes P, des Gegendruckes T und des Momentes M in Bezug auf O gleich Null sein, d. h. P und T müssen ein Kräftepaar bilden, dessen Moment entgegengesetzt gleich dem Momente M ist. Weil T P parallel ist, so hat sich die Berührungslinie zwischen Zapfen und Lager nach dem Beginn der Drehung um den Bogen $r\varphi$ seitwärts verschoben, wo r den Zapfenradius und φ den Reibungswinkel bezeichnen. Das zum Überwinden der Reibung erforderliche Kraftmoment M hat demnach die Grösse

$$M = \sin\varphi\, Pr \tag{341}$$

und heisst Zapfenreibungsmoment. Während der Bewegung ist der normale Druck am Zapfen

$$N = P\cos\varphi$$

und die Resultirende der Reibungskräfte an der Berührungslinie

$$fN = P\sin\varphi.$$

Das Reibungsmoment M ist gleich dem Momente von fN in Bezug auf O. Weil φ im allgemeinen ein kleiner Winkel ist, so kann man ohne merkbaren Fehler $\sin\varphi$ durch f ersetzen und erhält dabei die in der Praxis benützte Formel

$$M = fPr. \tag{342}$$

An einer Welle, die in zwei cylindrischen Lagern ruht, in welchen die Drücke P_1 und P_2, die Radien r_1 und r_2, die Reibungswinkel φ_1 und φ_2 sind, erhält man zusammen für beide Lager das Reibungsmoment

$$M = \sin\varphi_1\, P_1\, r_1 + \sin\varphi_2\, P_2\, r_2 \tag{343}$$

oder annähernd

(344) $$M = f_1 P_1 r_1 + f_2 P_2 r_2.$$

Wenn die beiden Lager in allen Beziehungen gleich sind, so ergiebt sich

(345) $$M = 2 \sin \varphi \, Pr$$

und

(346) $$M = 2 f Pr.$$

Reibungseffect. Die Reibung in einem Zapfenlager verbraucht Arbeit und verringert den Wirkungsgrad einer Maschine. Bezeichnet man das Moment des Zapfenreibungswiderstandes wie oben mit M und nennt n die Anzahl der Umläufe in der Minute, so ist die Reibungsarbeit während eines Umlaufs gleich $2\pi M$ und in der Minute gleich $2n\pi M$. Für die Arbeit in einer Secunde und für den Reibungseffect ergiebt sich somit

(347) $$E = \frac{2n\pi M}{60} = \frac{n\pi M}{30},$$

oder mit Hülfe der Gleichung (342)

(348) $$E = \frac{f\pi r n}{30} P.$$

Drückt man P in kg, r in m aus, so ist ferner

(349) $$E = \frac{f\pi r n}{30 . 75} P \text{ Pferdestärken} =$$

$$= 0.001396 \, nfPr \text{ P. S.}$$

B. **Keilnutenförmiges Lager.**

Reibungsmoment. In einem keilnutenförmigen Lager liegt ein cylindrischer Zapfen längs zwei Erzeugenden A und B der Cylinderfläche an (Fig. 358). Die Resultirende der normalen Drücke und der Reibungswiderstände in A ist eine Kraft T und ebenso in B eine Kraft T'; diese beiden

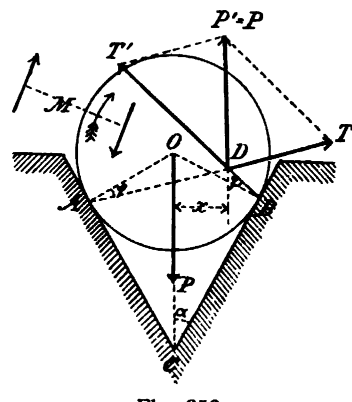


Fig. 358.

Kräfte schliessen mit den Zapfenradien in ihren Angriffspunkten den Winkel φ ein. T und T' liefern eine Resultirende P', welche zusammen mit dem Zapfendrucke P ein Kräftepaar ergeben muss, dessen Moment entgegengesetzt gleich dem treibenden Momente M ist. Wird der Abstand zwischen P und P' mit x bezeichnet, sofolgt

$$M = Px.$$

Es möge die Kraft P den Keilwinkel 2α halbiren. Zur Berechnung von x construire man einen Kreis durch die Punkte A, B und C (Fig. 359); dieser Kreis geht auch durch den Mittelpunkt O des Zapfens und durch den Punkt D, in welchem T und T' sich schneiden. Der Abstand des Punktes D von dem Durchmesser OC ist x. Aus dem Dreiecke CAO ergiebt sich für den Radius R des Kreises

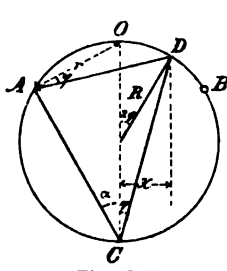


Fig. 359.

$$2R = \frac{r}{\sin\alpha};$$

der Winkel zwischen den Radien nach O und nach D ist 2φ; somit findet man

$$x = R\sin 2\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\alpha}\,r. \tag{350}$$

Hiernach ist das gesuchte Reibungsmoment

$$(351) \qquad M = \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \alpha} Pr.$$

In Übereinstimmung mit der Formel (347) ist der Reibungseffect

Reibungseffect.

$$(352) \qquad E = \frac{n\pi M}{30} = \frac{n\pi}{30} \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \alpha} Pr$$

oder annähernd

$$(353) \qquad E = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{f\pi rn}{30} P;$$

er verhält sich folglich zu dem Reibungseffecte in einem cylindrischen Lager unter gleichen Umständen wie $1 : \sin \alpha$.

Neue und eingelaufene Lager.

Bei neuen cylindrischen Lagern kann es vorkommen, dass der Zapfen sich längs zweier Erzeugenden anlehnt; die Reibung ist dabei dieselbe wie in einem keilnutenförmigen Lager. Je mehr der Zapfen eingelaufen ist, desto mehr nähern sich die beiden Linien, der Winkel α wächst und der Reibungseffect nimmt ab, bis schliesslich beide Linien in eine einzige zusammenfallen, so dass die unter A abgeleiten Formeln Anwendung finden.

Keilnutenförmige Lager werden selten oder nie bei Maschinenwellen angewandt, kommen aber oft bei Instrumenten, wie astronomischen, geodätischen u. s. w. vor. Es handelt sich dabei um das Zustandebringen einer möglichst unveränderlichen Lage der Mittellinie der drehbaren Axe in den Lagern.

C. Allgemeine Formeln.

Reibungsfläche.

Die unter A und B betrachteten Annahmen, dass der cylindrische Zapfen längs einer oder längs zweier Erzeugenden der Lagerfläche das Lager berühre, sind in Wirklichkeit nicht erfüllt, sondern es bildet stets ein grösserer

oder kleinerer Teil der Lagerfläche die Anlehnungsfläche. Diese Anlehnungsfläche heisst die **Reibungsfläche**.

Reibungsmoment. Es werde angenommen, dass die Reibungsfläche aus der halben Zone einer Rotationsfläche bestehe (Fig. 360).

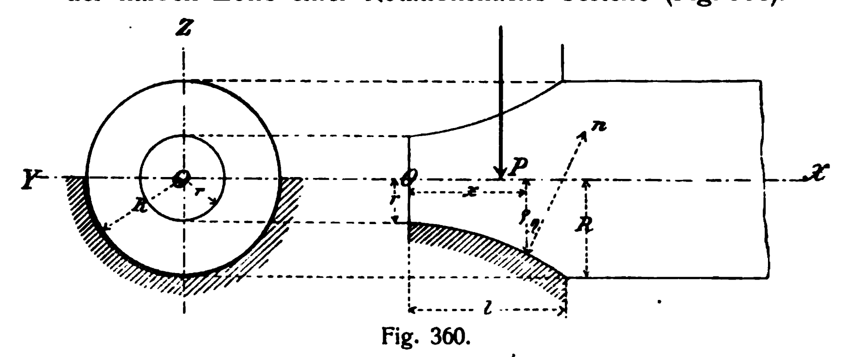


Fig. 360.

Man führe ein Coordinatensystem ein mit der Axe des Zapfens als x-Axe, der Richtung vertical nach oben und entgegengesetzt dem Zapfendrucke P als z-Axe sowie einer horizontalen y-Axe. Die Reibungsfläche ist dann die halbe, unterhalb der xy-Ebene liegende Zone. Die Gleichung der Meridiancurve der Rotationsfläche sei

$$\varrho = f(x),$$

wo $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ in der zugehörenden Meridianebene gerechnet wird. Der Zapfendruck P verursacht an jedem Flächenelemente der Reibungsfläche einen normalen Druck, welcher pro Flächeneinheit mit p bezeichnet werde. Der Druck p hängt von x und von dem Winkel des Radius ϱ des Flächenelementes mit der z-Axe ab. Dieser Winkel zwischen dem Radius in der Richtung von der Fläche nach der Drehaxe und der z-Axe werde mit ϑ bezeichnet; es sei ferner (nz) der Winkel zwischen der Normalen der Reibungsfläche nach innen und der z-Axe. Auf ein Element dA der Reibungsfläche wirkt ein Normaldruck pdA und ein Reibungswiderstand $fpdA$, deren

Moment in Bezug auf die Axe des Zapfens gleich $fp\varrho dA$ ist. Das Reibungsmoment ist demnach

$$M = f\int p\varrho\, dA, \tag{354}$$

wo das Integral über die ganze Reibungsfläche erstreckt werden muss.

Druckverteilung. Das Gesetz der Druckverteilung ist unbekannt. Sämtliche normalen Drücke pdA müssen eine mit P gleich grosse Projectionssumme auf die positive z-Axe liefern, d. h. es ist

$$P = \int p \cos (nz)\, dA, \tag{355}$$

wo das Integral über die Reibungsfläche erstreckt werden muss.

Um die Integrale in den Gleichungen (354) und (355) berechnen zu können, muss man eine Voraussetzung über die Druckverteilung treffen. Man macht hierbei einen Unterschied zwischen zwei Fällen: 1) der Zapfen ist n e u oder dreht sich so selten, dass keine Abnutzung in Frage kommt; 2) der Zapfen ist e i n g e l a u f e n in das Lager.

Neuer Zapfen. 1) In Ermangelung einer besseren Hypothese nimmt man an, dass der Druck p an einem neuen Zapfen in allen Punkten der Reibungsfläche derselbe sei. Die Gleichung (355) liefert dann

$$p = \frac{P}{\int \cos (nz)\, dA} = \frac{P}{F}, \tag{356}$$

wo F die Projection der Reibungsfläche auf die xy-Ebene bezeichnet.

Für das Reibungsmoment an einem neuen Zapfen erhält man dann mit Hülfe der Gleichung (354)

$$M = f\frac{P}{F}\int \varrho\, dA. \tag{357}$$

Als Element dA der Reibungsfläche kann man den zwischen zwei Parallelkreisen liegenden Halbring von der Grösse $\pi\varrho\, ds$ benützen, wo ds das Bogenelement der Meridiancurve bezeichnet. Man findet dabei

$$M = \pi f \frac{P}{F} \int \varrho^2 \, ds. \tag{358}$$

Eingelaufener Zapfen.

2) An einem eingelaufenen Zapfen erhält man einen anwendbaren Ausdruck für die Druckverteilung, wenn man voraussetzt, dass die Abnutzung des Zapfens und des Lagers so vor sich geht, dass die Form der Reibungsfläche unverändert bleibt. Alle Elemente der Fläche müssen dann um gleich grosse, in der Richtung der Kraft P gerechnete Beträge abgenutzt werden, so dass die Druckverteilung sich mit der Zeit nicht ändert. Die in der Richtung der Normalen eines Elementes der Reibungsfläche gerechnete Abnutzung ist proportional der Arbeit der Reibungswiderstände in einer bestimmten Zeit, folglich proportional fp oder p und proportional ϱ. Die in der Richtung von P gerechnete Abnutzung ist demnach proportional $\frac{p\varrho}{\cos(nz)}$. Sie muss constant sein, d. h. man erhält

$$\frac{p\varrho}{\cos(nz)} = k$$

und

$$p = \frac{k \cos(nz)}{\varrho}. \tag{359}$$

Zur Berechnung der Constanten k wird dieser Ausdruck in die Gleichung (355) eingesetzt. Es ergiebt sich

$$P = k \int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho} \, dA$$

und

(360) $$k = \frac{P}{\int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho}\, dA}.$$

Endlich werden die Ausdrücke für p

(361) $$p = \frac{P}{\int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho}\, dA} \cdot \frac{\cos(nz)}{\varrho}$$

und für das Moment der Zapfenreibung

(362)
$$M = f \frac{P}{\int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho}\, dA} \int \cos(nz)\, dA = f \frac{PF}{\int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho}\, dA}.$$

Um die Integrale in den Formeln (361) und (362) auszuführen, wähle man als Flächenelement dA eine kleine Rechtecksfläche zwischen zwei Parallelkreisen in dem Abstande dx von einander und zwei Meridianebenen, welche den Winkel $d\vartheta$ mit einander einschliessen. Wenn ds das dem Abstande dx entsprechende Bogenelement der Meridiancurve ist, so erhält man

(363) $$dA = \varrho\, d\vartheta\, ds = \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2}\, dx\, d\vartheta.$$

Bezeichnet man noch mit η den Winkel, den die Tangente der Meridiancurve mit der Zapfenaxe einschliesst, so findet man

$$\cos\eta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2}}$$

und

(364) $$\cos(nz) = \cos\eta \cos\vartheta.$$

Bei den Integrationen über die ganze Reibungsfläche

muss x zwischen 0 und l, ϑ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ variiren.

Mit Hülfe der Formeln (363) und (364) liefert die Gleichung (360) zur Bestimmung von k die Gleichung

$$\frac{P}{k} = \int \frac{\cos^2(nz)}{\varrho} dA = \iint \cos^2\eta \,.\, \cos^2\vartheta \, d\vartheta \, ds =$$

$$\int \cos^2\eta \, ds \,.\, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \, d\vartheta.$$

Es ist

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\vartheta) \, d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\eta \, ds = dx;$$

und man erhält

$$k = \frac{2}{\pi} \frac{P}{\int_0^l \cos\eta \, dx}. \tag{365}$$

Der endgültige Ausdruck für den normalen Druck p wird

$$p = k \frac{\cos(nz)}{\varrho} = \frac{2}{\pi} \frac{P}{\int_0^l \cos\eta \, dx} \frac{\cos\eta \cos\vartheta}{\varrho}. \tag{366}$$

Nach der Gleichung (362) ergiebt sich jetzt das Moment der Reibung am eingelaufenen Zapfen

$$M = \frac{2}{\pi} f \frac{F}{\int_0^l \cos\eta \, dx} P. \tag{367}$$

Die normalen Drücke in dem Zapfenlager einer Welle liefern, wenn der Zapfen nicht cylindrisch ist, Componenten nach der Längsrichtung der Welle. Die Resultirende dieser Componenten ist

Druck nach der Längsrichtung.

$$D = \int p \sin \eta \, dA \tag{368}$$

und sucht die Welle in ihrer Längsrichtung zu verschieben. Wenn die beiden Zapfen gleich gross und in gleicher Weise belastet sind, so entsteht die entgegengesetzte Kraft (D) in dem zweiten Lager; sind die Verhältnisse an den beiden Lagern dagegen nicht die nämlichen, so resultirt eine Kraft $|D - D'|$ in der Längsrichtung der Welle, welche die Welle gegen das eine oder andere Lager drückt. In diesem Lager entsteht dabei ein von einer Stützzapfenreibung herrührendes Moment, welches nach den Regeln in § 97 zu berechnen ist.

Die allgemeine Formel (368) liefert an einem neuen Zapfen mit Hülfe der Gleichung (356)

$$D = \frac{P}{F} \int \sin \eta \, dA.$$

Das Integral ist gleich der Projection der Reibungsfläche auf die yz-Ebene und hat also den Wert $\frac{\pi}{2}(R^2 - r^2)$; man findet deshalb

$$D = \frac{\pi}{2} \frac{R^2 - r^2}{F} P. \tag{369}$$

An einem eingelaufenen Zapfen berechnet man mit Hülfe der Gleichungen (363), (366) und (368)

$$D = \frac{2}{\pi} \frac{P}{\int_0^l \cos \eta \, dx} \iint \sin \eta \cos \eta \cos \vartheta \, ds \, d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{P}{\int_0^l \cos\eta\, dx} \int \sin\eta \cos\eta\, ds \,.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta$$

d. h.

(370) $$D = \frac{4}{\pi} \frac{\int_0^l \sin\eta\, dx}{\int_0^l \cos\eta\, dx} P.$$

D. Anwendungen der allgemeinen Formeln. Coefficient der Zapfenreibung.

Neuer Zapfen. Cylindrischer Zapfen.

1) Neuer Zapfen.

Für den cylindrischen Zapfen mit dem Radius r erhält man $\varrho = R = r$, $F = 2rl$, $\int \varrho^2 ds = r^2 l$. Die Formeln (358) und (369) liefern das Moment der Zapfenreibung

(371) $$M = \frac{\pi}{2} f P r$$

und den Druck längs der Welle

(372) $$D = 0.$$

Kegelförmiger Zapfen.

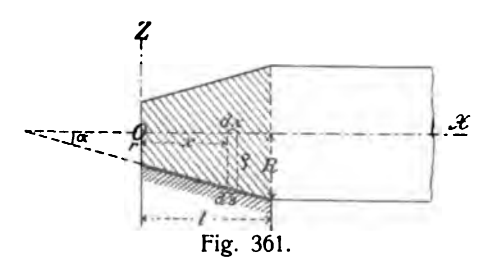


Fig. 361.

Für einen kegelförmigen Zapfen mit dem Winkel α zwischen der Erzeugenden und der Axe (Fig. 361) berechnet man

$$l = \frac{R - r}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$F = (R + r)\,l = \frac{R^2 - r^2}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\int \varrho^2 \, ds = \frac{1}{\sin \alpha} \int_r^R z^2 dz = \frac{R^3 - r^3}{3 \sin \alpha},$$

(373) $$M = \frac{\pi}{3} f \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{P}{\cos \alpha},$$

(374) $$D = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha \, . \, P.$$

Für den conischen Spitzzapfen wird $r = 0$ und *Spitzzapfen.*

(375) $$M = \frac{\pi}{3 \cos \alpha} fPR.$$

2) Eingelaufener Zapfen. *Eingelaufener Zapfen.*

Aus den Formeln (367) und (370) folgt für den cylindrischen Zapfen, bei dem $\eta = 0$ ist, *Cylindrischer Zapfen.*

(376) $$M = \frac{4}{\pi} fPr,$$

und

(377) $$D = 0.$$

Für den kegelförmigen Zapfen erhält man $\eta = \alpha$ und *Kegelförmiger Zapfen.*

(378) $$M = \frac{2}{\pi} f \frac{(R + r) l}{l \cos \alpha} P = \frac{2}{\pi} f \frac{R + r}{\cos \alpha} P,$$

(379) $$D = \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \, . \, P.$$

Besonders ist bei dem conischen Spitzzapfen *Spitzzapfen.*

(380) $$M = \frac{2}{\pi \cos \alpha} fPR.$$

Coefficient der Zapfenreibung.

Der Wert (376) des Momentes der Zapfenreibung unterscheidet sich nur durch den numerischen Coefficienten für fPr von dem Werte (342). Man setzt gewöhnlich

$$M = f'Pr \tag{381}$$

und nennt f' den Coefficienten der Zapfenreibung. Dieser Coefficient f' kann direct experimentell bestimmt werden und braucht nicht aus dem Werte des Coefficienten f der gleitenden Reibung berechnet zu werden. Der Coefficient f' hängt nicht nur von dem Material des Zapfens und des Lagers sowie von der Art der Schmierung, sondern auch in gewissem Grade von dem specifischen Drucke und der Drehungsgeschwindigkeit ab. Die Versuche betreffend den Coefficienten der Zapfenreibung, welche von Morin, Rühlmann, Hirn u. a. ausgeführt worden sind, konnten deshalb keine vollkommen übereinstimmende Resultate ergeben. Einige Werte werden hier nach dem Handbuch „Hütte“ angeführt.

Material.		Schmierung.	
Zapfen.	Lager.	gewöhnl.	continuirl.
Bronze	Bronze	0.10	—
Gusseisen	Bronze	0.075	—
Gusseisen	Gusseisen	0.075	0.054
Schmiedeeisen	Gusseisen od. Bronze.	0.07	0.054
Stahl auf	Bronze im Bad von Olivenöl	—	0.001

Bei nachlässig besorgten Lagern kann der Wert von f' bis zu 0.1 à 0.2 steigen.

§ 96.

Anwendungen der Zapfenreibung.

Reibung am Hebel.

1) Gleichgewicht am Hebel mit Berücksichtigung der Reibung.

Es sei ABC in der Figur 362 ein gerader, zweiarmiger Hebel, welcher um einen Zapfen bei C drehbar ist; auf den Hebel mögen die Last Q, das eigene Gewicht G und die Kraft P wirken, und zwar alle vertical nach unten.

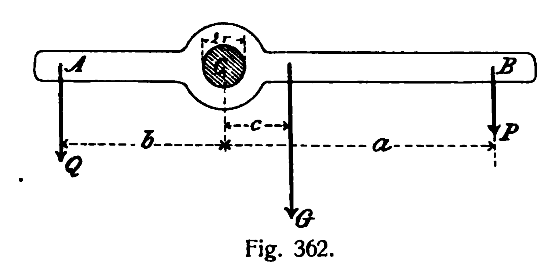


Fig. 362.

Das Moment der am Zapfen vorkommenden Reibung der Ruhe in Bezug auf den Mittelpunkt C des Zapfens kann alle Werte zwischen fNr und $-fNr$ annehmen, wo f den Zapfenreibungscoefficienten für die vollständig entwickelte Reibung bezeichnet und

$$N = P + Q + G$$

der Zapfendruck ist. Im Gleichgewichtszustande kann P alle Werte zwischen zwei Grenzen P_1 und P_2 annehmen. Mit Hülfe einer Momentengleichung für C als Pol findet man

$$P_1 a - Qb + Gc - fr(P_1 + Q + G) = 0,$$

$$P_2 a - Qb + Gc + fr(P_2 + Q + G) = 0,$$

und durch Auflösung in Bezug auf P_1 und P_2 ergiebt sich

$$P_1 = \frac{b + fr}{a - fr} Q - \frac{c - fr}{a - fr} G,$$

$$P_2 = \frac{b - f r}{a + f r} Q - \frac{c + f r}{a + f r} G.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts sind also

$$P_2 \lesseqgtr P \leqq P_1.$$

Reibungswage.

2) Hirn'sche Reibungswage.

Die Reibungswage von Hirn dient zur experimentellen Bestimmung des Coefficienten der Zapfenreibung. Auf den Zapfen wird ein Wagebalken gelegt (Fig. 363) und so belastet, dass sein Schwerpunkt über

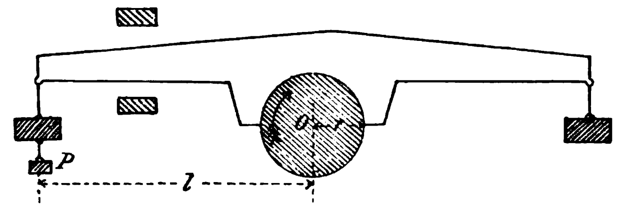


Fig. 363.

dem Mittelpunkte des Zapfens liegt, wenn der Zapfen in Ruhe ist. Wird der Zapfen in Drehung versetzt, so wird das Gleichgewicht gestört, wird aber durch Anbringen eines Übergewichtes P wieder hergestellt. Wenn das Gewicht des Wagebalkens vor dem Anbringen von P den Wert G hat, so ist der verticale Druck am Zapfen nachher gleich $G + P$. Die auf den Wagebalken wirkenden Reibungskräfte liefern zusammen das Moment $f(P + G)r$ in Bezug auf den Mittelpunkt O des Zapfens. Vom Vorzeichen abgesehen, muss dieses Moment gleich dem Momente des Gewichtes P sein. Man erhält somit

$$Pl = f(G + P)r$$

und als Wert des Zapfenreibungscoefficienten

$$f = \frac{l}{r} \frac{P}{G + P}. \tag{382}$$

3) P r o n y's Z a u m.

Prony's Zaum.

P r o n y's Z a u m oder B r e m s d y n a m o m e t e r (Fig. 364) wird zur Bestimmung des Arbeitseffectes an einer Welle benützt, welche mit bekannter Geschwindig-

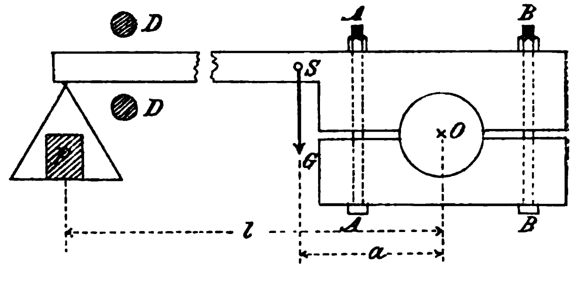


Fig. 364.

keit rotirt. Die Welle, welche eine horizontale Lage haben möge, wird von den Maschinen, welche sie treibt, losgekuppelt und mit einer eisernen Scheibe mit glattem Umfange versehen; die Scheibe wird zwischen den (hölzernen) Backen des Dynamometers eingespannt, und man zieht die Schrauben *A* und *B* so stark an, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit ihren ursprünglichen Wert erlangt. Durch Belastung des frei schwebenden horizontalen Armes, dessen Beweglichkeit durch die Klötze *D* beschränkt ist, mit einem Gewichte *P* hindert man das Dynamometer sich mit der Welle zu drehen und stellt das Gleichgewicht her. Dieselbe Arbeit, welche vorher als nützliche Arbeit an der Welle geleistet wurde, wird jetzt zum Überwinden der Reibung, zur Erwärmung u. s. w. verbraucht; misst man sie, so kann der Arbeitseffect berechnet werden. Es besteht Gleichgewicht zwischen dem Gewichte *G* der unbelasteten Bremse, dem Gewichte *P*, den auf die Bremsbacken wirkenden normalen Drücken und den Reibungswiderständen am Umfange der Welle. Es werde jetzt die Momentengleichung mit *O* als Pol benützt. Die normalen Drücke geben das Moment Null; das Moment

der Reibungskräfte werde mit M bezeichnet. Mit Anwendung der Bezeichnungen in der Figur (364) findet man dann

$$M = Pl + Ga, \tag{383}$$

oder einfacher

$$M = Pl, \tag{384}$$

wenn das Dynamometer so construirt ist, dass $a = 0$ ist.

Nachdem das Reibungsmoment bestimmt ist, wird der Effect berechnet. Wenn n die Anzahl der Umläufe pro Minute ist, die Kräfte in kg und die Längen in m gemessen werden, so ist nach der Gleichung (347) der Arbeitseffect

$$E = \frac{n\pi M}{30 \cdot 75} \text{ Pferdestärken.}$$

Man erhält also hier

$$E = \frac{n\pi (Pl + Ga)}{30 \cdot 75} \text{ P. S.} \tag{385}$$

oder specieller

$$E = \frac{n\pi Pl}{30 \cdot 75} \text{ P. S.} \tag{386}$$

Um eine zu grosse Abnutzung der Bremsbacken und eine zu starke Erwärmung zu verhindern, muss die Bremsscheibe geschmiert werden, oder wenn dies nicht genügt, wie es meistens der Fall ist, durch einen kräftigen Wasser- oder Luftstrom abgekühlt werden.

Beispiel. An einem Dynamometer, für das $a = 0$ und $l = 2.5$ m ist, gab eine Probe als erforderliche Belastung $P = 150$ kg bei 120 Umdrehungen in der Minute. Für den Arbeitseffect findet man hiermit

$$E = \frac{120 \cdot 3.14 \cdot 150 \cdot 2.5}{30 \cdot 75} = 62.8 \text{ P. S.}$$

4) F r i c t i o n s r o l l e n.

Frictions-rollen.

Zur Verminderung der Zapfenreibung können sog. F r i c t i o n s r o l l e n angewandt werden. Die Zapfen liegen nicht direct in festen Lagern, sondern ruhen auf Rollen, welche in Folge der Reibung am Umfange gleichzeitig mit dem Zapfen sich drehen. Es handelt sich dabei um eine unvollständig entwickelte Reibung der Ruhe. Es kommen hauptsächlich zwei Anordnungen vor; sie mögen hier in aller Kürze behandelt werden.

Anordnung mit zwei Rollen.

a) Der Zapfen ruht auf zwei Rollen und dreht sich gleichförmig unter dem Einfluss eines im Gleichgewichte sich befindenden Kräftesystems, zu welchem das treibende Moment M, der Zapfendruck P und die Drücke T und T' in den Stützpunkten A und B gehören. Diese Drücke bilden mit dem entsprechenden Radius des Zapfens einen Winkel ε, welcher kleiner als φ ist. T und T' liefern zusammen eine Kraft P', welche mit P ein Kräftepaar bildet, dessen Arm mit x bezeichnet werde. Mit Hülfe der Formel (350) für das keilnutenförmige Lager berechnet man hier unter Anwendung der Bezeichnungen in der Figur 365

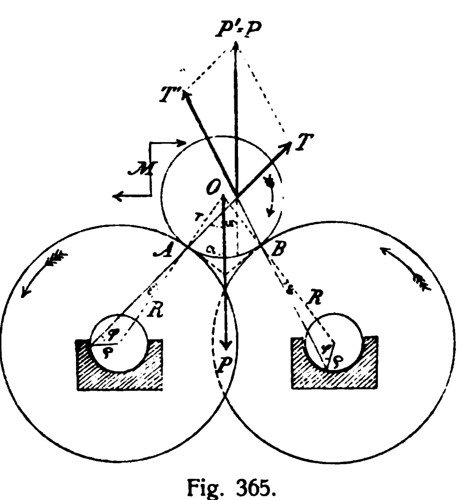


Fig. 365.

$$x = \frac{\sin 2\varepsilon}{2 \sin \alpha} r.$$

Die Bedingung der gleichförmigen Drehung ist somit

$$M = Pr \frac{\sin 2\varepsilon}{2 \sin \alpha}. \tag{387}$$

Aus der Figur 365 leitet man

$$\sin \varepsilon = \frac{\varrho}{R} \sin \varphi$$

ab, und erhält dann

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = \sin \varepsilon \cos \varepsilon = \frac{\varrho}{R} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2} \sin^2 \varphi}$$

sowie das zum Überwinden der Reibung erforderliche treibende Moment

$$M = Pr \frac{\varrho}{R} \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \tag{388}$$

oder mit genügender Annäherung

$$M = \frac{\varrho}{R \sin \alpha} fPr. \tag{389}$$

Wenn die Frictionsrollen so construirt sind, dass ϱ kleiner als $R \sin \alpha$ ist, so werden das Reibungsmoment und der Reibungseffect im Vergleich zu ihren Werten bei directer Auflagerung (siehe § 95, A) in dem Verhältnisse $\varrho : R \sin \alpha$ vermindert.

Anordnung mit drei Rollen.

b) Die Formel (389) zeigt, dass es vorteilhaft ist, den Winkel α so nahe als möglich an 90° zu wählen. Dieser Wert wird sehr nahe bei der Anordnung, wie sie Fig. 366 zeigt, erreicht. Der Zapfen ruht hauptsächlich auf einer grösseren Rolle und wird seitlich von der einen der zwei kleineren Rollen gestützt, je nach der Richtung der Drehung. Der Druck gegen die Seitenrolle ist unbedeutend. Mit Anwendung der Bezeichnungen in der Figur 366 liefert die Momentengleichung für den Mittelpunkt O des Zapfens als Pol

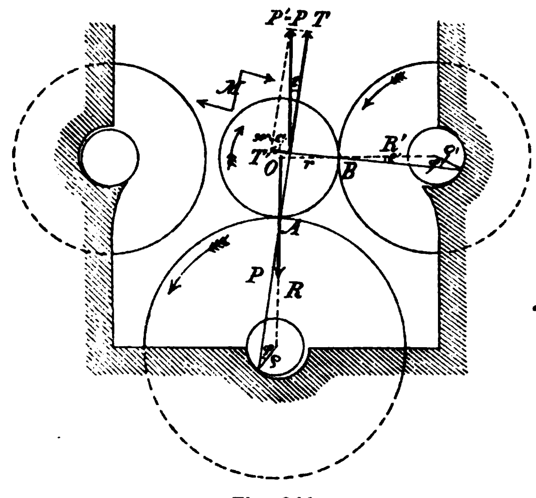


Fig. 366.

$$M = r\,(T \sin \varepsilon + T' \sin \varepsilon').$$

Setzt man hierin

$$T = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos(\varepsilon - \varepsilon')} P,$$

$$T' = \frac{\sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varepsilon')} P,$$

so ergiebt sich

$$M = \frac{Pr \sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varepsilon')} (\cos \varepsilon' + \sin \varepsilon').$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\sin \varepsilon = \frac{\varrho}{R} \sin \varphi$$

und mit Anwendung der Annäherungsformeln

$$\cos \varepsilon' + \sin \varepsilon' = 1,$$

$$\cos(\varepsilon - \varepsilon') = 1,$$

$$\sin \varphi = f$$

erhält man die endgültige Formel

$$(390) \qquad M = \frac{\varrho}{R} f P r.$$

Im Vergleich mit dem Reibungsmomente bei directer Auflagerung des Zapfens liefert also die Anordnung in Fig. 366 ein in dem Verhältnisse des Radius ϱ des Zapfens zu dem Radius R der unteren Rolle kleineres Reibungsmoment.

§ 97.

Reibung an Stützzapfen.

A. Allgemeine Formeln.

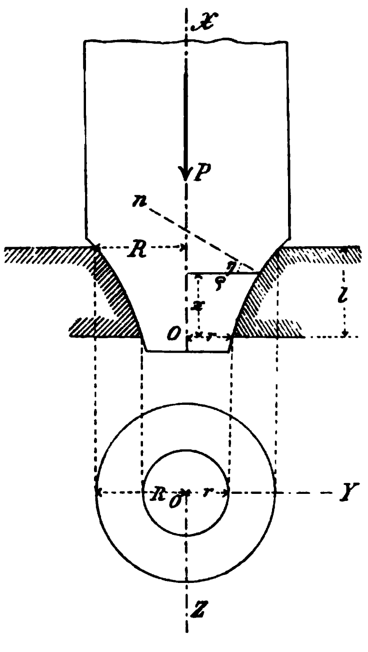


Fig. 367.

Man erhält die allgemeinen Formeln für die Reibung der Stützzapfen durch eine kleine Modification der in § 95 C aufgestellten allgemeinen Formeln für die Reibung der Tragzapfen. Durch die in der Längsrichtung der Welle wirkende Druckkraft P (Fig. 367) entsteht in allen Punkten der Anliegungsfläche des Stützzapfens ein normaler Druck, dessen pro Flächeneinheit gerechnete Grösse mit p bezeichnet werde. Der Druck p ist derselbe in allen Punkten eines Parallelkreises, d. h. er ist eine Function von x allein. Die Summe der Pro-

jectionen sämtlicher normalen Drücke auf die x-Axe muss gleich P sein, d. h. man hat (vergl. die Gl. (355))

$$P = \int p \cos(nx)\, dA.$$

Das Reibungsmoment ist (vergl. die Gl. (354))

$$M = f \int p\varrho\, dA.$$

Die beiden Integrale müssen über die ganze Reibungsfläche erstreckt werden. Führt man als Flächenelement dA die kleine Ringfläche zwischen den Parallelkreisen bei x und $x + dx$ ein, so findet man

$$dA = 2\pi\varrho\, ds$$

und

$$M = 2\pi f \int p\varrho^2\, ds, \tag{391}$$

$$P = 2\pi \int p\varrho \sin\eta\, ds = 2\pi \int_r^R p\varrho\, d\varrho. \tag{392}$$

Für einen neuen Zapfen nimmt man in Ermangelung einer besseren Hypothese p in der ganzen Reibungsfläche als constant an. Die Gleichung (392) liefert dabei

Neuer Stützzapfen.

$$P = 2\pi p \int_r^R \varrho\, d\varrho = \pi p\, (R^2 - r^2)$$

oder

$$p = \frac{P}{\pi\, (R^2 - r^2)}. \tag{393}$$

Für das Reibungsmoment ergiebt sich

$$M = \frac{2fP}{R^2 - r^2} \int \varrho^2 ds. \tag{394}$$

Eingelaufener Stützzapfen. An einem eingelaufenen Stützzapfen erhält man die Druckverteilung wie in § 95 C, wenn man ausdrückt, dass die normal zu einem Flächenelemente gerechnete Abnutzung der Reibungsarbeit proportional ist und dass die nach der Richtung der Zapfenaxe gerechnete Abnutzung überall gleich gross sein muss. Man findet in Übereinstimmung mit der Gleichung (361)

$$p = \frac{k \cos(nx)}{\varrho} = \frac{P}{\int \frac{\cos^2(nx)}{\varrho} dA} \frac{\cos(nx)}{\varrho} = \frac{P}{\int \frac{\sin^2 \eta}{\varrho} dA} \frac{\sin \eta}{\varrho}$$

und wenn $dA = 2\pi\varrho\, ds$ gesetzt wird,

$$p = \frac{P}{2\pi \int \sin^2 \eta\, ds} \frac{\sin \eta}{\varrho} = \frac{P}{2\pi \int_r^R \sin \eta\, d\varrho} \frac{\sin \eta}{\varrho}. \tag{395}$$

Mit Hülfe der Gleichung (391) ergiebt sich dann für das Reibungsmoment

$$M = 2\pi f k \int \frac{\sin \eta}{\varrho} \varrho^2 ds = 2\pi f k \int_r^R \varrho\, d\varrho,$$

oder

$$M = \tfrac{1}{2} f P \frac{R^2 - r^2}{\int_r^R \sin \eta\, d\varrho}. \tag{396}$$

B. Anwendungen der allgemeinen Formeln.

Neuer Stützzapfen. 1) Neuer Stützzapfen.

Kegelförmiger Stützzapfen. Für einen abgestumpften kegelförmigen Stützzapfen (Fig. 368) erhält man, wenn keine Reibung in der Endfläche vorhanden ist, $\eta = \alpha$, $ds = \frac{d\varrho}{\sin \alpha}$. Die Formel (394) liefert dann

$$(397)\qquad M = \frac{2fP}{R^2 - r^2}\int_r^R \varrho^2 \frac{d\varrho}{\sin\alpha} = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\frac{fP}{\sin\alpha}.$$

Spitzzapfen.

Speciell ergiebt sich hieraus für den conischen Spitzzapfen

$$(398)\qquad M = \tfrac{2}{3}\frac{fPR}{\sin\alpha},$$

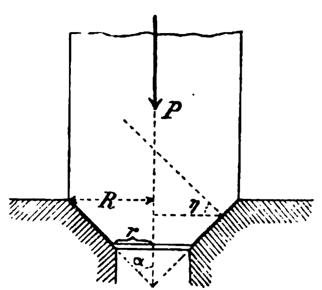


Fig. 368.

Ringzapfen.

und für den ebenflächig-ringförmigen Zapfen (Fig. 369), bei dem $\alpha = 90^\circ$,

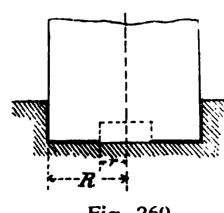


Fig. 369.

Fig. 370.

$$(399)\qquad M = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} fP,$$

sowie für den gewöhnlichen ebenflächig-kreisförmigen Zapfen

$$(400)\qquad M = \frac{2}{3} fPR.$$

Kugelförmiger Stützzapfen.

Für einen kugelförmigen Stützzapfen (Fig. 370) berechnet man

$$\varrho = L\cos\eta = L\sin\lambda,$$

$$ds = -L\,d\eta = L\,d\lambda,$$

und vermittelst der Gleichung (394)

$$(401) \quad M = -\frac{2fPL^3}{R^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \cos^2\eta \, d\eta = \frac{2fPL^3}{R^2}\int_0^\alpha \sin^2\lambda \, d\lambda =$$

$$= \frac{2fPL^3}{R^2}\int_0^\alpha \frac{1-\cos 2\lambda}{2} d\lambda = fPL\frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

wo $R = L\sin\alpha$ gesetzt wurde.

Speciell findet man für eine Halbkugel als Stützfläche $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und

$$(402) \quad M = \frac{\pi}{2} fPL.$$

Eingelaufener Stützzapfen.

2) Eingelaufener Stützzapfen.

Kegelförmiger Stützzapfen.

Für den abgestumpft-kegelförmigen Stützzapfen ohne Reibung an der Endfläche erhält man

$$\int_r^R \sin\eta \, d\varrho = \sin\alpha \, . \, (R - r).$$

Mit Hülfe der Gleichung (396) folgt das Reibungsmoment

$$(403) \quad M = \tfrac{1}{2} fP\frac{R+r}{\sin\alpha}.$$

Zu dem nämlichen Werte würde man gelangen, wenn man sich alle Reibungskräfte auf den in der Reibungsfläche liegenden Kreis vom Radius $\frac{R+r}{2}$ concentrirt dächte.

Spitzzapfen.

Die Gleichung (403) liefert für den conischen Spitzzapfen

$$(404) \quad M = \tfrac{1}{2} fP\frac{R}{\sin\alpha},$$

für den ebenflächig-ringförmigen Zapfen *Ringzapfen.*

$$M = \tfrac{1}{2} fP(R + r) \tag{405}$$

und für den ebenflächig-kreisförmigen Zapfen

$$M = \tfrac{1}{2} fPR. \tag{406}$$

Für den kugelförmigen Zapfen berechnet man *Kugelförmiger Zapfen.*

$$\int_r^R \sin\eta \, d\varrho = L \int_0^\alpha \cos^2\lambda \, d\lambda = L \frac{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

und

$$M = fPL \frac{\sin^2\alpha}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}. \tag{407}$$

Speciell folgt für $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$M = \frac{2}{\pi} fPL. \tag{408}$$

In derselben Weise wie an einem Tragzapfen ist auch für den Stützzapfen das Reibungsmoment kleiner an dem eingelaufenen als an dem neuen Zapfen. Beispielsweise ist dieses Verhältnis für den kreisförmigen ebenen Zapfen unter sonst gleichen Umständen $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$.

Aus den obigen Ausdrücken geht hervor, dass bei gleichen Werten von R und f das Moment der Zapfenreibung für den ebenen Stützzapfen am kleinsten ist, und zwar beruht dies darauf, dass die zur Reibungsfläche normalen Drücke, welche der Kraft P das Gleichgewicht halten, sämtlich zu P parallel und somit am kleinsten sind. Hiermit ist jedoch nicht gesagt, dass der ebene Stützzapfen der unter allen Umständen vorteilhafteste wäre.

Wenn der Druck P bedeutend und die Umlaufsgeschwindigkeit gross ist, wie z. B. an der Schraubenwelle eines Dampfers, so ist eine grosse Druckfläche erforderlich um eine zu grosse Abnutzung und das „Warmlaufen“ des Lagers zu verhindern. Ein grosser ebener Stützzapfen wäre dabei unzweckmässig, weil er zu viel Raum beanspruchen würde und weil er ein grosses Reibungsmoment liefern würde. Die zweckmässigste Form haben in diesem

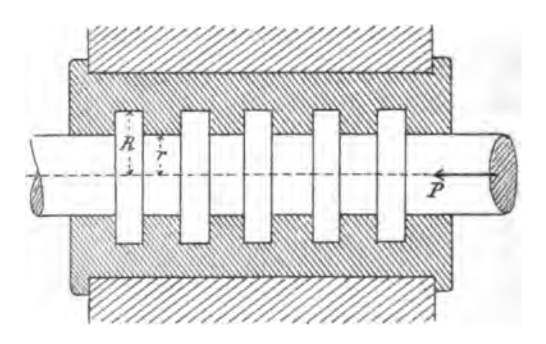


Fig. 371.

Kammzapfen. Falle die sog. Kammzapfen (Fig. 371), welche aus einer Anzahl an der Welle befestigter, genau bearbeiteter Ringe bestehen, die in zwei entsprechende Lagerschalen hineinpassen. Unabhängig von der Verteilung des Druckes P auf die einzelnen Ringe berechnet man für den Kammzapfen das Reibungsmoment

$$M = \tfrac{1}{2} f P (R + r). \tag{409}$$

Ohne das Reibungsmoment zu vergrössern kann man durch Vermehrung der Anzahl der Ringe die Abnutzungsfläche vergrössern.

Anwendungen.

1) In dem Stützzapfenlager einer Turbine wirkt der Druck $P = 2400$ kg. Der Zapfen ist ein ebenflächig-kreisförmiger mit 8 cm

Durchmesser. Die Turbinenwelle macht 40 Umläufe in der Minute und der totale Effect des Triebwassers ist $E = 1400 \frac{\text{kgm}}{\text{Sec}}$. Wie gross ist der Teil dieses Effectes, welcher durch die Reibung verbraucht wird, wenn der Reibungscoefficient den Wert $f = 0.08$ hat?

Nach der Gleichung (406) ist das Reibungsmoment

$$M = \tfrac{1}{2} f P R = \tfrac{1}{2} \times 0.08 \times 0.04 \times 2400 = 3.84 \text{ kgm},$$

also der Reibungseffect E_f

$$E_f = \frac{n\pi M}{30} = \frac{40 \times \pi \times 3.84}{30} = 16.1 \frac{\text{kgm}}{\text{Sec}},$$

d. h. etwas mehr als $1.1\,^0/_0$ von dem totalen Effecte E.

2) Die Schraubenwelle eines Schraubendampfers erfährt in ihrer Längsrichtung den Druck $P = 10000$ kg. Der Durchmesser der Welle ist $2r = 30$ cm; der Kammzapfen ist aus 10 Ringen gebildet, deren äusserer Durchmesser $2R = 38$ cm beträgt. Man berechne den Reibungseffect dieses Lagers, wenn die Welle 80 Umdrehungen in der Minute macht und $f = 0.08$ ist.

Vermittelst der Gleichung (409) ergiebt sich das Reibungsmoment

$$M = \tfrac{1}{2} f (R + r) P = \tfrac{1}{2} \times 0.08 \times 0.34 \times 10000 = 136 \text{ kgm};$$

für den Reibungseffect findet man dann

$$E_f = \frac{n\pi M}{30} = \frac{80 \,.\, \pi \,.\, 136}{30} = 1140 \frac{\text{kgm}}{\text{Sec}}$$

oder

$$E_f = \frac{1140}{75} = 15.2 \text{ Pferdestärken.}$$

§ 98.

Frictionsräder und Zahnräder.

A. Frictionsräder.

Frictionsräder verschiedener Art.

Um eine Drehung von einer Welle auf eine andere zu übertragen kann man sog. Frictionsräder oder Scheiben benützen, welche ohne zu gleiten auf einander rollen. Die Scheiben werden mit einem gewissen Drucke gegen einander gepresst und die Bewegung wird

vermittelst der an den Umfängen der Scheiben entwickelten Reibung von der einen Scheibe auf die andere übertragen. Es handelt sich dabei um eine teilweise entwickelte Reibung der Ruhe. Die Form der Räder ist je nach der gegenseitigen Lage der Wellen eine verschiedene. Die Räder berühren sich längs einer Geraden mit unveränderlicher Lage im Raume; sie müssen folglich aus Umdrehungsflächen, welche zugleich Regelflächen sind, gebildet sein. Die Übertragung geschieht

1) bei parallelen Wellenaxen vermittelst cylindrischer Räder,

2) bei sich schneidenden Wellenaxen vermittelst kegelförmiger Räder,

3) bei sich im Raume kreuzenden Wellenaxen durch Räder in der Form von Umdrehungshyperboloiden mit einer Schale.* Das eine Hyperboloid kann durch einen Cylinder oder einen Kegel ersetzt werden. Schaltet man eine zwischenliegende Welle ein, so kann man dieselbe Übertragung mit Hülfe von zwei Paaren kegelförmiger Räder ausführen.

* Man beweist auf folgende Weise, dass es sich um Umdrehungshyperboloide mit einer Schale handelt. Es sei C die gemeinsame Berührungslinie; sie möge die Axe A kreuzen. Innerhalb eines um A sich drehenden Raumes beschreibt C die betreffende Umdrehungsfläche. Den Gleichungen von C in Bezug auf ein mit diesem Raume fest verbundenes Coordinatensystem mit der Geraden A als z-Axe kann man die Form

$$x = R \cos \nu + z \cot \alpha \sin \nu,$$

$$y = -R \sin \nu + z \cot \alpha \cos \nu$$

geben, wo R der kürzeste Abstand zwischen A und C, ν sein Winkel mit der x-Axe und α der Neigungswinkel von C gegen die xy-Ebene sind. Betrachtet man ν als veränderlich, so stellen die Gleichungen alle Geraden dar, welche durch die Drehung von C um A als Axe entstehen. Eliminirt man ν zwischen beiden Gleichungen, so erhält man also die Gleichung der betrachteten Umdrehungsfläche; und zwar folgt, wenn man beide Gleichungen in's Quadrat erhebt und addirt,

Die Figur 372 stelle zwei cylindrische Frictionsräder dar; es sei R der Radius der treibenden, r der Radius der getriebenen Scheibe, D der gegenseitige Druck zwischen den Scheiben und M_q das zu überwindende Moment an

Cylindrische Frictionsräder.

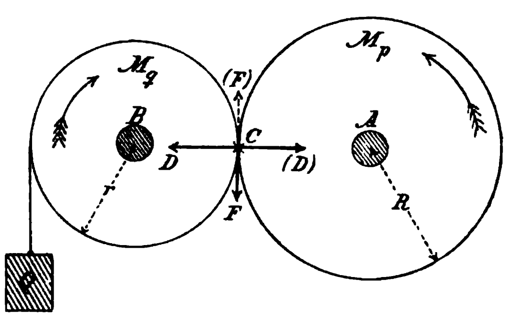


Fig. 372.

der Lastscheibe. Die Drehung beider Scheiben sei gleichförmig. Bei C entsteht eine Reibungskraft F, deren grösster Wert fD betragen kann. Mit Hülfe einer Momentengleichung für den Mittelpunkt der Lastscheibe als Pol erhält man

$$Fr = M_q$$

und mit $F = fD$ den kleinsten erforderlichen Druck D:

$$D = \frac{M_q}{fr}.$$

Wenn M_q, welches alle widerstehende Momente ein-

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2 \cot^2 \alpha$$

oder

$$x^2 + y^2 - z^2 \cot^2 \alpha = R^2.$$

Die Fläche ist somit ein Hyperboloid mit einer Schale.

Wenn C auch die zweite Axe B kreuzt, so ist auch die zweite Fläche ein Hyperboloid. Wenn C parallel zu B ist, so ergiebt sich ein Cylinder, und wenn C die Gerade B schneidet, ein Kegel. Man erhält die drei Fälle an der Drehbank, wenn man den Werkzeugsstahl längs einer Geraden führt, welche die Drehungsaxe kreuzt, oder dieser Axe parallel ist oder sie schneidet.

schliesslich der Zapfenreibung u. s. w. umfasst, auf eine Kraft Q am Umfange reducirt wird, so folgt

$$Qr = M_q$$

und

$$D = \frac{Q}{f}.$$

In Wirklichkeit muss man einen noch grösseren Wert von D verwenden, damit eine genügende Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sei. Bezeichnet man mit m eine Zahl grösser als 1, z. B. 1.5 oder 2, so kann

$$(410) \qquad D = m\frac{Q}{f}$$

genommen werden.

Das erforderliche treibende Moment M_p ist

$$(411) \qquad M_p = FR = \frac{R}{r}M_q = RQ.$$

Durch den relativ grossen Druck D wird eine bedeutende Zapfenreibung verursacht. Der totale Axendruck bei B ist die Resultirende zu Q, F und D, und das Reibungsmoment würde ohne weiteres berechnet werden können.

Keilräder.

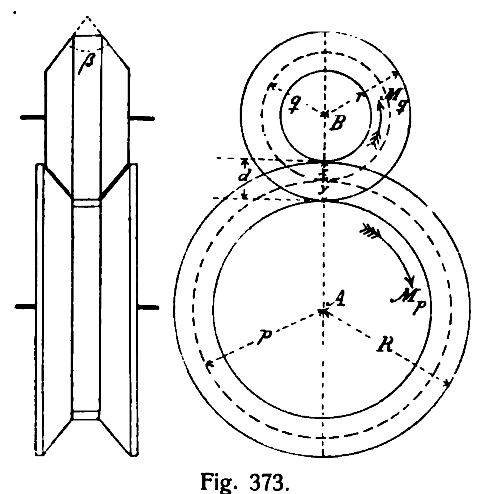
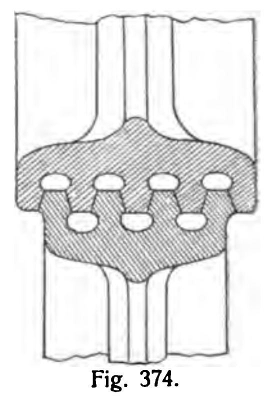


Fig. 373.

Wegen der Nachteile, welche aus der Zapfenreibung und der Gefahr der Formänderung in Folge des grossen Druckes an der Berührungsstelle erwachsen, ist die Anwendung der oben beschriebenen Frictionsräder ziem-

lich beschränkt. Von grösserer Bedeutung sind die Keilräder, bei welchen die genannten Übelstände wesentlich kleiner sind. Die Reibungsflächen dieser Räder sind aus einer keilförmigen Erhöhung an dem einen Rade und einer entsprechenden keilnutenförmigen Rinne an dem anderen Rade gebildet (Fig. 373). Es seien r der Radius der Lastscheibe, R der Radius der treibenden Scheibe, β der Keilwinkel, d die Höhe der reibenden Flächen und M_q das Moment an der Lastscheibe. Ferner mögen $p = R - x$ und $q = r - y$ die Radien derjenigen beiden Kreise bezeichnen, deren Punkte dieselbe lineare Geschwindigkeit haben und welche also auf einander rollen ohne zu gleiten. In den Reibungsflächen findet ein Gleiten statt und zwar derart, dass die Punkte des treibenden Rades innerhalb der Zone x grössere Geschwindigkeiten als die Punkte des Lastrades haben, innerhalb der Zone y umgekehrt. Wenn das Moment M_q gross ist, so sind erhebliche Berührungsflächen erforderlich, damit der normale Druck in ihnen nicht so gross werde, dass sie in Gefahr sind zerstört zu werden. Würde man dabei einen einzigen Keilring benützen, so erhielte man zu grosses Gleiten und zu starke Abnutzung in den Reibungsflächen; man bringt deshalb mehrere niedrige Keilringe neben einander an, wie Fig. 374 zeigt.

Man erhält genügend genaue Formeln für die Keilräder, wenn man in den Formeln für die cylindrischen Frictionsräder den Reibungscoefficienten durch den Reibungscoefficienten für Keilnuten ersetzt (§ 89). Mit m-facher Sicherheit gegen Gleiten ergiebt sich in dieser Weise für den normalen Druck D, mit welchem die Keilräder gegen einander gepresst werden müssen,


Fig. 374.

(412) $$D = m \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{fr} M_q;$$

für das treibende Moment M_p erhält man

(413) $$M_p = \frac{R}{r} M_q,$$

wobei worausgesetzt worden ist, dass d genügend klein im Verhältnis zu R und r sei.

Anwendung.

Ein Keilrad B mit 30 cm Radius und dem Keilwinkel $\beta = 60°$ wird von einem Rade A mit 40 cm Radius getrieben. B macht 150 Umdrehungen in der Minute und entwickelt einen totalen Effect von 5 Pferdestärken. Mit welchem Drucke müssen die Räder gegen einander gepresst werden, wenn $f = 0.15$ ist und 1.5-fache Sicherheit gegen Gleiten verlangt wird?

Das Moment am Rade B ist

$$M_f = \frac{5 \,.\, 30 \,.\, 75}{150 \times \pi} = 23.87 \text{ kgm.}$$

Die Formel (412) liefert für den Druck D

$$D = 2 \frac{\sin 30° \times 23.87}{0.15 \times 0.3} = 530 \text{ kg.}$$

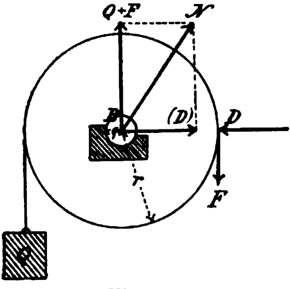


Fig. 375.

Von dem totalen Effecte 5 Pferdestärken an B wird ein Teil E_f zum Überwinden der Zapfenreibung verbraucht. Die Welle B möge mit zwei cylindrischen Zapfen vom Radius $\varrho = 40$ mm in zwei gleichen Lagern mit dem Zapfenreibungscoefficienten $f' = 0.07$ ruhen; die Arbeit an der Lastscheibe bestehe in dem Heben eines Gewichtes Q am Umfange des Rades. Es sollen Q und der Effect der Zapfenreibung berechnet werden.

Mit Anwendung der Bezeichnungen in der Figur 375 ist der resultirende Zapfendruck

$$N = \sqrt{D^2 + (Q+F)^2},$$

wo

$$F = \frac{fD}{m \sin \frac{1}{2}\beta}$$

ist. Mit Hülfe der Momentengleichung für den Mittelpunkt der Scheibe B als Pol findet man jetzt

$$Fr = Qr + f'\varrho N = M_q,$$

und somit

$$\frac{fD}{m \sin \frac{1}{2}\beta} = Q + f'\frac{\varrho}{r}\sqrt{D^2 + (Q+F)^2}.$$

In dieser Gleichung ist Q die einzige unbekannte. Nachdem Q gefunden, berechnet man unmittelbar den Reibungseffect.

Mit den oben gegebenen numerischen Werten findet man $Q = 74.4$ kg, das Moment der Zapfenreibung gleich 1.55 kgm und den Reibungseffect $E_f = 24.30 \frac{\text{kgm}}{\text{Sec}}$. Es geht hieraus hervor, dass E_f ziemlich bedeutend ist, und zwar 6.48 % des totalen Effectes.

B. Zahnräder.

Die Theorie der Construction der Zahnräder und der Berechnung des Effectverlustes an ihnen ist zu umfassend um hier dargestellt zu werden. Wir beschränken uns deshalb auf einige allgemeine Betrachtungen und die Aufstellung einiger Annäherungsformeln, welche in manchen Fällen für die praktische Anwendung genügen.

Teilkreise.

Die Zahnradconstruction muss eine solche sein, dass ein Kreis des einen Rades ohne zu gleiten auf einem Kreise des anderen Rades rollt. Man nennt diese Kreise Teilkreise. Das Verhältnis $\frac{R}{r}$ der Radien der Teilkreise des treibenden und des getriebenen Rades heisst Übersetzungsverhältnis und werde mit λ bezeichnet. Man hat also

Übersetzung.

$$\lambda = \frac{R}{r} = \frac{n}{N}, \tag{414}$$

wo N und n die Anzahl der Umdrehungen des treibenden und des getriebenen Rades in der gleichen Zeit be-



zeichnen. Die Teilkreise werden so in gleiche Teile eingeteilt, dass ein Teilbogen des treibenden Rades, dessen Zähnezahl K sei, und welcher also die Länge $\frac{2\pi R}{K}$ hat, gleich einem Teilbogen von der Länge $\frac{2\pi r}{k}$ an dem getriebenen Rade sei, dessen Zähnezahl k ist. Aus der Gleichung

$$\frac{2\pi R}{K} = \frac{2\pi r}{k}$$

ergiebt sich

$$\frac{R}{r} = \frac{K}{k} = \lambda; \tag{415}$$

also muss λ eine rationale Zahl sein.

Zahnform.

Damit der eine Teilkreis ohne zu gleiten auf dem anderen rolle, darf die Form der Zähne an beiden Rädern nicht beliebig sein. Die Zahnform des einen Rades bestimmt die Zahnform des anderen. Eine notwendige Bedingung der Continuität der Bewegung ist ferner, dass ein neues Zahnpaar eingreife, bevor das Eingreifen des vorhergehenden Zahnpaares aufhört.

Cylindrische Räder mit äusserem Eingriff.

Es mögen zuerst zwei cylindrische Räder mit äusserem Eingriff behandelt werden. Die Zähne sind parallel den Radaxen; und man braucht nur ihre Profile in der Ebene der Teilkreise zu untersuchen. Diese Profile müssen folgende geometrische Bedingung erfüllen:

Die gemeinschaftliche Normale der beiden Zahnprofile im Eingriffspunkte muss durch den Berührungspunkt der Teilkreise gehen.

Man sieht die Richtigkeit dieses Satzes folgendermassen ein. Man denke sich das treibende Rad A (Fig. 376) stillstehend und das Rad B mit seinem Teilkreise längs des Teilkreises von A rollend. Die relative Bewegung von B in Bezug auf A ist dabei dieselbe wie in der wirklichen Bewegung. Weil das Rollen ohne Gleiten

geschieht, so ist nach der geometrischen Bewegungslehre (§ 23) der gemeinsame Berührungspunkt *C* der Teilkreise der Pol der augenblicklichen Drehung von *B* in Bezug auf *A*. Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes *D* der beiden Zähne muss eine zu *CD* senkrechte Geschwindigkeit besitzen, d. h. *CD* muss die gemeinsame Normale der beiden Flächen in *D* sein.

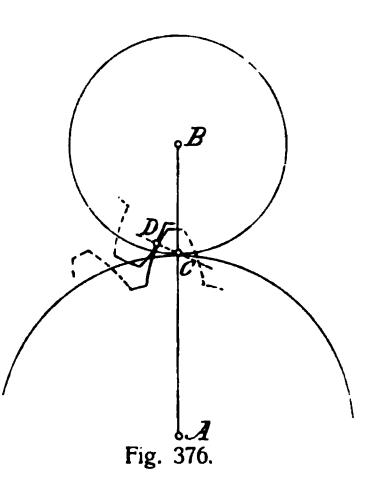


Fig. 376.

Construction der Zähne.

Mit Hülfe des genannten Lehrsatzes kann man das eine Zahnprofil construiren, wenn das andere gegeben ist. Es sei die Curve *bb* am Rade *B* (Fig. 377) gegeben; die Curve *aa* am Rade *A* werde gesucht. Die Punkte *h* und *H* der beiden Teilkreise mögen einander entsprechen; *h* liege auf *bb*, *H* auf *aa*. Man findet den Eingriffspunkt *D* für die Lage in der Figur, wenn man aus *C* eine Normale zu der Curve *bb* construirt. *D* ist zugleich ein Punkt der Curve *aa*. Es sei *k* ein beliebiger Punkt auf *bb*; um den Punkt *K* der Curve *aa* zu construiren, welcher in einem gewissen Augenblicke mit *k* zusammenfällt, zieht man die Normale *kl* in *k* zu der Curve *bb* und trägt auf dem Teilkreise des Rades *A* von *C* aus den Bogen *CL* gleich *Cl* ab. In dem betrachteten Augenblicke bilden dann *L* und *l* den Berührungspunkt

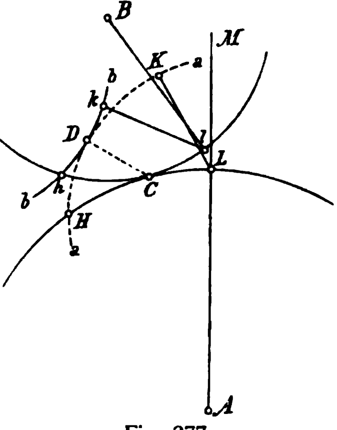


Fig. 377.

der Teilkreise, und LK und lk müssen mit einander zusammenfallen. Man trage die Radien AL und Bl ab, nehme den Winkel MLK gleich Blk und mache LK gleich lk. Damit sind der Punkt K und die Normale KL der Profilcurve bestimmt. In derselben Weise lässt sich eine beliebige Anzahl von Punkten (und Tangenten) der Curve aa construiren.

Berechnung der Zahnreibung. Die Zahnflächen gleiten längs einander. Nur in dem Augenblicke, in welchem der Eingriffspunkt mit dem Berührungspunkte der Teilkreise zusammenfällt, findet kein Gleiten statt. Es soll jetzt der Einfluss der gleitenden Reibung auf die Bewegung untersucht werden. Es seien

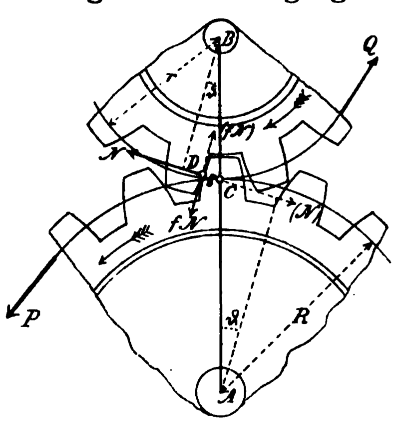


Fig. 378.

A und B in der Figur 378 die beiden Zahnräder, R und r die Radien ihrer Teilkreise. Das treibende Moment am Rade A werde durch eine tangentiale Kraft P am Teilkreise zu Stande gebracht und das widerstehende Moment am Rade B rühre von einer tangentialen Kraft Q am Teilkreise hervor. Wenn es keine schädlichen Widerstände bei der Übertragung der Bewegung geben würde, so wären P und Q gleich gross; infolge der Widerstände ist P grösser als Q. Der Quotient aus dem Kraftüberschusse $P - Q$ und Q kann als ein Mass für den Einfluss der Widerstände betrachtet werden. An der Eingriffsstelle D wirken ein normaler Druck N und eine Reibung fN. Bezeichnet man den Winkel zwischen AC und der Senkrechten aus A auf CD mit ϑ, den Abstand CD mit δ, so erhält man vermittelst der Momentengleichungen für die Pole A und B,

$$PR = NR\cos\vartheta + fN(R\sin\vartheta + \delta),$$

$$Qr = Nr\cos\vartheta + fN(r\sin\vartheta - \delta).$$

Hieraus leitet man

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{f\delta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)}{\cos\vartheta + f\left(\sin\vartheta - \frac{\delta}{r}\right)} \tag{416}$$

ab. P und $\frac{P-Q}{Q}$ verändern sich also mit ϑ und δ, d. h. mit der Lage der Zahnräder. In den meisten Fällen kann genügend genau

$$\cos\vartheta + f\left(\sin\vartheta - \frac{\delta}{r}\right) = 1$$

gesetzt und der mittlere Wert

$$\delta = \frac{s}{2}$$

benützt werden, wo

$$s = \frac{2\pi R}{K} = \frac{2\pi r}{k}$$

der einem Zahn entsprechende Teilkreisbogen ist. Die Gleichung (416) liefert dabei

$$\frac{P-Q}{Q} = f\pi\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{k}\right). \tag{417}$$

Wenn N und n die Anzahl der Umläufe pro Minute bez. des treibenden Rades und des Lastrades sind, so ist der Reibungseffect

$$E_f = \frac{2n\pi(P-Q)r}{60} = f\frac{n\pi^2}{30}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{k}\right)Qr = \tag{418}$$

$$= f\frac{n\pi^2}{30}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{k}\right)M_q.$$

Durch Vermehrung der Anzahl der Zähne werden der Kraftüberschuss $P - Q$ und der Reibungseffect vermindert. Als mittleren Wert des Reibungscoefficienten empfiehlt sich für gusseiserne Räder mit Schmierung $f = 0.16$, d. h. $f\pi = 0.5$ und ohne Schmierung $f\pi = 0.7$.

Gemäss den Formeln (417) und (418) sind der Kraftüberschuss und der Reibungseffect unabhängig von der Form der Zähne. Bei einer genaueren Berechnung erkennt man, dass die Form der Zähne, die Anzahl der gleichzeitig eingreifenden Zähne und die Art, in welcher der Eingriff geschieht, doch eine gewisse Rolle spielen. Man begnügt sich oft damit diese Umstände dadurch zu berücksichtigen, dass man in die obigen Formeln einen gewissen Correctionsfactor einfügt.

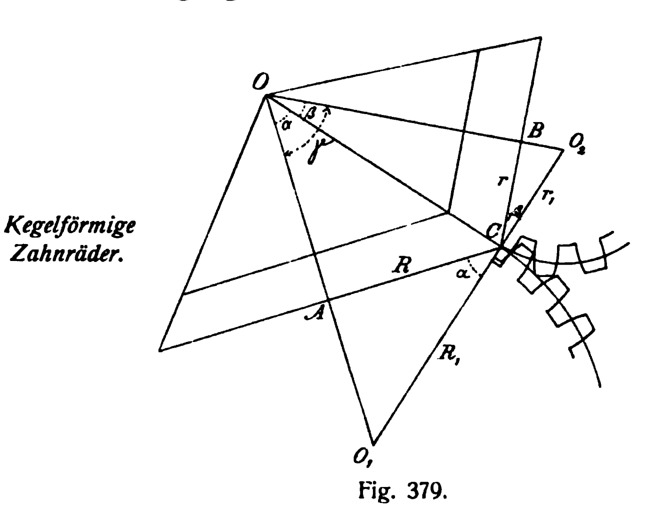


Fig. 379.

Kegelförmige Zahnräder.

Die Zähne kegelförmiger Räder werden oft in folgender Weise construirt (Fig. 379). Mit den Radien R_1 und r_1 der Supplementarkegel werden zwei Kreise gezeichnet; man nimmt diese Kreise als Teilkreise zweier cylindrischer Räder mit den Radien R_1 und r_1 und construirt in gewöhnlicher Weise die Zahnprofile dieser Räder. Diese Profile werden dann auf die Supplementarkegel aufgewickelt und als Leitlinien kegelförmiger Flächen mit der Spitze in O gewählt. Die letzteren Flächen liefern die Zähne der ursprünglichen Räder.

Man erhält einen angenäherten Ausdruck für den

schädlichen Widerstand bei den Kegelrädern, wenn man in der für cylindrische Räder abgeleiteten Formel (417) K und k durch die Zähnezahl K_1 und k_1 an den Kreisen R_1 und r_1 ersetzt. Mit denselben Bezeichnungen wie vorher ergiebt sich

$$\frac{P-Q}{Q}=f\pi\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{k_1}\right).$$

Weil die Teilung an dem Kegelrade und dem cylindrischen Hülfsrade die gleiche ist, so erhält man

$$\frac{K_1}{R_1}=\frac{K}{R},$$

$$\frac{k_1}{r_1}=\frac{k}{r}$$

sowie mit Anwendung der Winkelbezeichnungen der Figur 379

$$R=R_1\cos\alpha,$$

$$r=r_1\cos\beta.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt dann

$$\text{(419)}\qquad \frac{P-Q}{Q}=f\pi\left(\frac{\cos\alpha}{K}+\frac{\cos\beta}{k}\right).$$

Statt der Winkel α und β kann man den Winkel $\gamma=\alpha+\beta$ zwischen den Axen der Kegelräder allein benützen. In der That erhält man

$$\sin\alpha=\frac{R}{OC},$$

$$\sin\beta=\frac{r}{OC},$$

also

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{R}{r}.$$

Ferner ist

$$\frac{R}{r} = \frac{K}{k},$$

somit auch

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{K}{k}$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{K} - \frac{\sin \beta}{k} = 0.$$

Addirt man das Quadrat der linken Seite dieser Gleichung, d. h.

$$\frac{\sin^2 \alpha}{K^2} + \frac{\sin^2 \beta}{k^2} - 2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{Kk}$$

zu der rechten Seite der identischen Gleichung

$$\left(\frac{\cos \alpha}{K} + \frac{\cos \beta}{k}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{K^2} + \frac{\cos^2 \beta}{k^2} + 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta}{Kk},$$

so findet man mit Beachtung der Gleichung

$$\gamma = \alpha + \beta$$

nach einfachen Transformationen

$$\left(\frac{\cos \alpha}{K} + \frac{\cos \beta}{k}\right)^2 = \frac{1}{K^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2 \cos \gamma}{Kk}.$$

Die Gleichung (419) nimmt jetzt die Form an

$$\frac{P - Q}{Q} = f\pi \sqrt{\frac{1}{K^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2 \cos \gamma}{Kk}}. \tag{420}$$

Für $\gamma = 0$ liefert sie die Formel (417) der cylindrischen Räder mit äusserem Eingriff. $P - Q$ ist dabei am grössten. Am kleinsten wird $P - Q$ für $\gamma = \pi$, d. h. bei cylindrischen Rädern mit innerem Eingriff. Man findet

$$\frac{P - Q}{Q} = f\pi \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{k}\right). \tag{421}$$

Für ein cylindrisches Zahnrad und eine Zahnstange ($\gamma = 0, k = \infty$) ergiebt sich

$$P - Q = f\pi \frac{1}{K} Q. \tag{422}$$

§ 99.

Reibung an der Schraube.

Bedingungen der gleichförmigen Schraubenbewegung.

Eine gleichförmige Schraubenbewegung eines starren Körpers kann als relativer Ruhezustand innerhalb eines Raumes aufgefasst werden, der dieselbe gleichförmige Schraubenbewegung besitzt. In derselben Weise wie in § 94, wo die Bedingungen der gleichförmigen Drehung aufgestellt wurden, findet man hier, dass die auf den Körper wirkenden gegebenen Kräfte den aus der Bewegung des Raumes entstehenden Trägheitswiderständen das Gleichgewicht halten müssen. Die Kraft in der gleichförmigen Schraubenbewegung eines freien Punktes ist dieselbe wie in der gleichförmigen Kreisbewegung, welche die Projection der Schraubenbewegung auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene darstellt, d. h. die Centripetalkraft. Der Trägheitswiderstand ist somit die Centrifugalkraft. Die Bedingungen der gleichförmigen Schraubenbewegung sind deshalb dieselben wie die Bedingungen der gleichförmigen Drehung, d. h. *die auf den Körper wirkenden absoluten Kräfte müssen den der Schraubenbewegung entsprechenden Centrifugalkräften das Gleichgewicht halten.* Ob der Körper in Ruhe bleibt, eine gleichförmige Drehung oder eine gleichförmige Schraubenbewegung annimmt, wenn die Bedingungen erfüllt sind, hängt von dem Geschwindigkeitszustande ab, in welchem der Körper sich ursprünglich befindet.

Es werde angenommen, dass der Körper so in seiner Beweglichkeit beschränkt sei, dass er sich um eine feste

Axe drehen kann und dass er sich parallel dieser Axe translatorisch verschieben kann. Auf den Körper wirken teils äussere Kräfte, teils aus den Bedingungen erwachsende Widerstandskräfte oder Reactionen. Als Bedingungen der gleichförmigen Schraubenbewegung ergeben sich:

1) *Die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Richtung der festen Axe muss gleich Null sein;*

2) *die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf die feste Axe muss gleich Null sein.*

Die Centrifugalkräfte erscheinen überhaupt nicht in diesen Bedingungen, weil sie dieselben identisch erfüllen. Dagegen üben sie im allgemeinen einen Einfluss auf die Reactionen an der festen Axe aus.

Wenn die Beweglichkeit des starren Körpers so beschränkt ist, dass jeder Punkt sich nur längs einer bestimmten Schraubenlinie bewegen kann, so entstehen Widerstandskräfte, welche wir als durch eine einzige Grösse bestimmt annehmen wollen. Diese Grösse kann aus den Gleichungen eliminirt werden, welche die Bedingungen 1) und 2) darstellen; man erhält so eine einzige Bedingungsgleichung für die gleichförmige Schraubenbewegung, welche die Projectionssumme der äusseren Kräfte auf die Schraubenaxe und ihre Momentensumme in Bezug auf diese Axe enthält.

Flachgängige und scharfgängige Schraube.

Man unterscheidet in der Technik zwischen flachgängigen und scharfgängigen Schrauben; der Einfluss der Reibung muss für beide besonders behandelt werden.

A. Flachgängige Schraube.

Geometrische Angaben.

Man erhält das Gewinde einer flachgängigen Schraube, wenn man dem in Fig. 380 dargestellten Rechtecke eine Schraubenbewegung erteilt, wobei die Ecken gewöhnliche Schraubenlinien beschreiben. Die Schraube besteht aus dem cylindrischen Schraubenkern und dem Gewinde. Die

Verschiebung des Rechtecks in der Richtung der Schraubenaxe bei einem Umlaufe heisst die S t e i g u n g oder G a n g h ö h e der S c h r a u b e. Wird sie mit h, der Radius der mittleren Schraubenlinie $\frac{R+r}{2}$ mit ϱ und der entsprechende S t e i g u n g s w i n k e l mit α bezeichnet, so ist

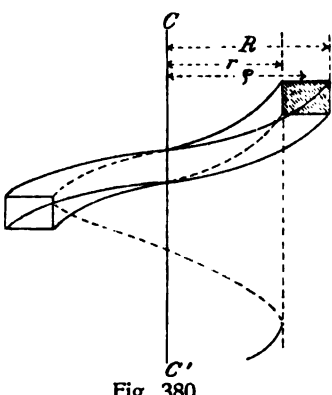


Fig. 380.

$$(423) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi\varrho}.$$

Man erhält einen Umlauf der mittleren Schraubenlinie, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $2\pi\varrho$ und h auf einen Cylinder mit dem Radius ϱ wickelt (Fig. 381).

Fig. 381.

Zwischen der Schraube und der Schaubenmutter (Fig. 382), von welchen die erstere als beweglich, die letztere als fest gedacht werden soll, wirken normale Drücke und Reibungswiderstände. Es werde angenommen, dass die Schraube nur längs der einen Gewindefläche die Schraubenmutter berühre, dagegen nicht längs der Mantelfläche des Schraubenbolzens; ferner zur Vereinfachung der Ausdrucksweise, dass die Schraubenaxe vertical sei. Auf die Schraube wirke eine Last Q vertical nach unten. Man soll das Mo-

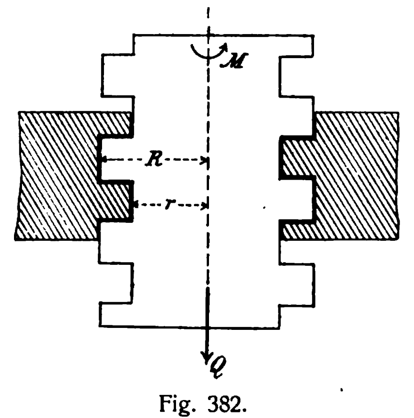


Fig. 382.

ment M eines in einer Normalebene zur Schraubenaxe liegenden Kräftepaares berechnen, welches erforderlich ist, um die Last Q mit constanter Geschwindigkeit zu heben.

Die Last wird gehoben.

Um die Untersuchung zu vereinfachen denkt man sich sämtliche Normaldrücke und Reibungswiderstände längs der mittleren Schraubenlinie der unteren Gewindefläche concentrirt. Das dabei erhaltene Resultat unterscheidet sich sehr wenig von dem Resultate, das man finden würde, wenn man über die ganze Reibungsfläche verbreitete Kräfte in Betracht nehmen würde. Die Figur 383 stellt ein Stück der mittleren Schraubenlinie dar. Auf ein Längenelement derselben im Punkte A wirkt ein gewisser normaler Druck N und ein Reibungswiderstand fN. N ist senkrecht zur Tangente der Schraubenlinie und zum Radius ϱ des Punktes A, fN hat die Richtung längs der Tangente, entgegengesetzt zur Richtung der Bewegung. Mit Anwendung der Bezeichnungen in der Figur 383, welche sich auf den Fall bezieht, dass die Last Q gehoben wird, liefern N und fN, welche beide in der Tangentialebene des Cylinders durch A um die Schraubenaxe als Axe liegen, auf eine verticale und eine horizontale Richtung die folgenden Componenten:

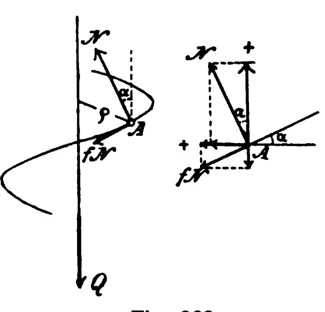


Fig. 383.

	N	fN
verticale Componente:	$N\cos\alpha$	$-fN\sin\alpha$
horizontale „	$N\sin\alpha$	$fN\cos\alpha$.

Die Summe der Projectionen von N und fN auf die Axe der Schraube ist

$$N\cos\alpha - fN\sin\alpha = N(\cos\alpha - f\sin\alpha) = N\,\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

und die Summe ihrer Momente in Bezug auf die Axe der Schraube

$$\varrho N \sin \alpha + \varrho f N \cos \alpha = \varrho N (\sin \alpha + f \cos \alpha) = \varrho N \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi},$$

wo $f = \operatorname{tg} \varphi$ eingeführt worden ist. Addirt man diese Ausdrücke für alle Elemente der mittleren Schraubenlinie innerhalb der Schraubenmutter und wendet die beiden Bedingungen auf p. 560 an, so erhält man

$$Q = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \Sigma N,$$

$$M = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \varrho \Sigma N.$$

Eliminirt man noch ΣN zwischen diesen Gleichungen, so findet man zwischen der Last und dem Kraftmoment die Beziehung:

$$M = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) Q \varrho. \tag{424}$$

Diese Gleichung zeigt, dass M mit Q, ϱ, α und φ wächst. Der Winkel α darf nicht grösser als $90° - \varphi$ sein, weil die Schraube sonst in ihrer Mutter festgeklemmt würde.

Wirkungsgrad.

Beim Heben einer Last vermittelst der Schraube ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{M_n}{M} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \, Q \varrho}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) Q \varrho} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \tag{425}$$

Wie ein Vergleich mit dem auf p. 487 betrachteten Ausdrucke η zeigt, wird der Wirkungsgrad am grössten für

$$\alpha = 45° - \tfrac{1}{2} \varphi$$

und zwar ist

$$\max \eta = \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi} \right)^2. \tag{426}$$

Beispielsweise findet man für $f = \operatorname{tg} \varphi = 0.1$

$$\max \eta = \left(\frac{1 - 0.05}{1 + 0.05}\right)^2 = 0.82.$$

Nur ausnahmsweise verwendet man Schrauben mit so grossem Steigungswinkel; und zwar ist die Schraube dann eine mehrgängige, d. h. hat mehrere congruente Gewinde.

Die Last wird gesenkt.

Wenn die Last Q vermittelst der Schraube gesenkt wird, so haben die Reibungswiderstände die entgegengesetzte Richtung zu der soeben betrachteten. Ersetzt man φ in der Gleichung (424) durch $-\varphi$, so erhält man deshalb jetzt:

$$M = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)\, Q\varrho. \tag{427}$$

Es müssen drei Fälle von einander unterschieden werden:

1) $\alpha > \varphi$. In diesem Falle wirkt das Moment M der Last entgegen, d. h. bremsend. Würde man die Last Q sich selbst überlassen, so würde sie eine beschleunigte Bewegung annehmen.

2) $\alpha < \varphi$. Durch die Last Q allein kann keine gleichförmige Bewegung zu Stande gebracht werden, sondern man braucht hierzu ein Kräftepaar M, dessen Drehungssinn jetzt der entgegengesetzte zu dem im Falle 1) erhaltenen ist. Wenn die Schraube nebst der Last sich selbst überlassen wird, so wird sie festgeklemmt.

3) Der Grenzfall zwischen den beiden oben betrachteten Fällen entspricht $\alpha = \varphi$ und $M = 0$. Die Schraube bewegt sich gleichförmig nach unten unter dem Einfluss der Last Q allein.

Die Formeln (424) und (427) sowie die drei Fälle sind analog den in § 86 für die schiefe Ebene gefundenen Resultaten.

Anwendungen.

1) Schraubenpresse.

Schraubenpresse.

Bei der Schraubenpresse (Fig. 384) wird eine Platte mit Hülfe einer flachgängigen Schraube gegen eine Unterlage gepresst; dabei entsteht Reibung in der Schraubenmutter und Zapfenreibung an der Berührungsfläche der Schraube mit der Pressplatte. Mit Hülfe der Gleichungen (424) und (400) findet man das zum Hervorbringen des Druckes Q erforderliche Kraftmoment

(428)
$$M = Pd = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)\, Q\varrho + \tfrac{2}{3} f Q\varrho',$$

wo f der Coefficient der Reibung des Stützzapfens und ϱ' sein Radius sind, während die Bezeichnungen an der Schraube dieselben wie vorher sind.

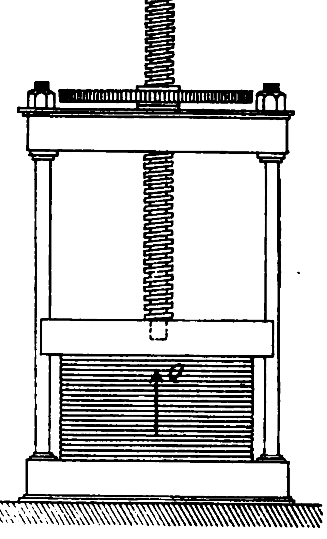


Fig. 384.

Beispielsweise würde man mit den Werten

$$\varrho = \frac{R+r}{2} = \frac{0.05 + 0.04}{2} =$$

$= 0.045$ m, $\alpha = 5°$, $\varphi = \varphi' = 6°$, $\varrho' = 0.04$ m und $Q = 8000$ kg ein Moment $M = 92.4$ kgm berechnen; dieses Kräftepaar könnte z. B. aus zwei gleich grossen Seitenkräften 115.5 kg mit dem Arme 0.8 m gebildet werden.

Um die Schraube zurückzudrehen muss man das Moment

$$M' = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)\, Q\varrho - \tfrac{2}{3} f' Q\varrho'$$

anbringen.

Der Wirkungsgrad beim Zusammenpressen ist

(429)
$$\eta = \frac{M_n}{M} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \varrho}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot \varrho + \tfrac{2}{3} f' \varrho'}.$$

2) Schraubenhebewinde.

Schraubenhebewinde.

Bei der gewöhnlichen Construction der Schraubenhebewinde (Fig. 385) ist die Schraubenmutter mit dem Stativ fest verbunden, die Schraube beweglich und mit einer drehbaren Krone versehen, auf welcher die Last Q ruht. Die Steigung der Schraube ist

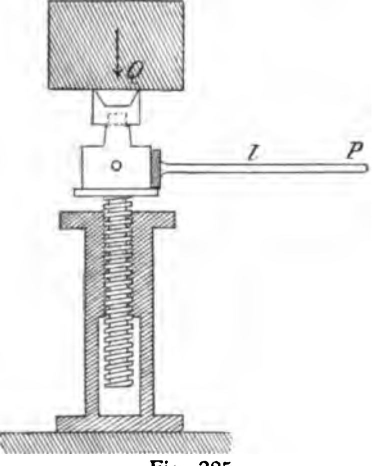


Fig. 385.

so klein, dass die Last allein die Schraube nicht in Bewegung versetzen kann. Der Schraubenkopf ist in zwei zu einander senkrechten Richtungen durchbohrt; das zum Heben der Last erforderliche Moment entsteht dadurch, dass man eine Stange in die Löcher hineinschiebt, an deren freiem Ende eine Kraft P wirkt. Die Schraube wird jedesmal etwa um einen Viertel Umlauf gedreht. Es wirken Reibungswiderstände zwischen der Schraube und ihrer Mutter und an der drehbaren Krone. Deshalb gilt eine ähnliche Formel wie für die Schraubenpresse. Bezeichnet man die effective Länge des Hebelarms mit l, so findet man mit Benutzung des Wirkungsgrades η die Gleichung

$$Q = \frac{\eta l}{\varrho \operatorname{tg} \alpha} P$$

oder

$$Q = \eta \frac{2\pi l}{h} P, \tag{430}$$

wo $h = 2\pi\varrho \operatorname{tg} \alpha$ die Ganghöhe ist. Durch Versuche lässt sich η ermitteln; für die betrachtete Construction liegt der Wert meistens zwischen 0.30 und 0.40.

Differential-schraube.

3) D i f f e r e n t i a l s c h r a u b e.

Die D i f f e r e n t i a l s c h r a u b e besteht, wie Fig. 386 zeigt, aus einer massiven Schraube innerhalb einer hohlen Schraube, welche als Mutter für die massive Schraube dient und selbst in einer mit dem Stative fest verbundenen Mutter beweglich ist. Die bei-

Fig. 386.

den Schrauben haben verschiedene Ganghöhe, und zwar die massive Schraube eine grössere Ganghöhe h' als die Ganghöhe h der hohlen Schraube. Giebt man der hohlen Schraube mit Hülfe ihres Schlüssels und unter dem Einfluss eines Kraftmomentes Pl eine volle Umdrehung, so hebt sich die massive Schraube nebst ihrer Last Q, welche an der Umdrehung nicht teil nehmen darf, um das Stück h' in Bezug auf die hohle Schraube und um das Stück $h'-h$ in Bezug auf die feste Unterlage.

Um die Beziehung zwischen P und Q abzuleiten, wende man die Projectionsgleichung mit der Richtung der Schraubenaxe als Projectionsaxe sowohl auf die Kräfte an der massiven wie an der hohlen Schraube an und benütze ferner eine Momentengleichung für die Kräfte an der hohlen Schraube. Es seien ϱ' und ϱ die Radien, α' und α die Steigungswinkel der mittleren Gänge bez. der massiven und der hohlen Schraube, N' und N die Drücke an einem Elemente derselben. Wenn ferner der Reibungscoefficient für beide Schrauben der nämliche ist, so findet man in ähnlicher Weise wie auf p. 563 die Gleichungen

$$Q = \frac{\cos(\alpha'+\varphi)}{\cos\varphi}\,\Sigma N' = \frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}\,\Sigma N$$

und

$$M = Pl = \frac{\sin(\alpha'+\varphi)}{\cos\varphi}\,\varrho'\,\Sigma N' - \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}\,\varrho\,\Sigma N.$$

Wenn man ΣN und $\Sigma N'$ zwischen diesen Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich

$$M = Pl = \left\{\varrho'\,\mathrm{tg}\,(\alpha'+\varphi) - \varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi)\right\} Q. \tag{431}$$

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{M_n}{M} = \frac{\varrho'\,\mathrm{tg}\,\alpha' - \varrho\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\varrho'\,\mathrm{tg}\,(\alpha'+\varphi) - \varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi)}. \tag{432}$$

Es muss die Bedingung

$$\varrho'\,\mathrm{tg}\,\alpha' > \varrho\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

oder

$$h' > h$$

erfüllt sein, wie auch angenommen wurde. Nachdem η bestimmt worden ist, kann die einer gegebenen Kraft P entsprechende Last Q vermittelst der Gleichung

(433) $$Q = \frac{2\pi\eta l}{h' - h} P$$

berechnet werden.

Beim Senken der Last ist das Kraftmoment

$$M = Pl = \left\{ \varrho' \operatorname{tg}(\alpha' - \varphi) - \varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right\} Q.$$

Damit die Last nicht von selbst sinke, wenn die Kraft P entfernt wird, muss also die Bedingung

$$\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) > \varrho' \operatorname{tg}(\alpha' - \varphi)$$

erfüllt sein.

B. Scharfgängige Schraube.

Geometrische Angaben.

Man erhält das Gewinde einer scharfgängigen Schraube, wenn man ein Dreieck sich so bewegen lässt, dass die Ecken gewöhnliche Schraubenlinien mit gemeinsamer Axe beschreiben (Fig. 387). Wie bei der flachgängigen Schraube werde auch hier angenommen, dass nur die eine (d. h. die untere) windschiefe Schraubenfläche die Reibungsfläche zwischen Schraube und Schraubenmutter bildet. Die erzeugende Gerade dieser Fläche bilde den Winkel β mit der Schraubenaxe; der Radius der mittleren Schraubenlinie sei $\frac{R+r}{2} = \varrho$, ihr Steigungswinkel α und ihre Steigung h.

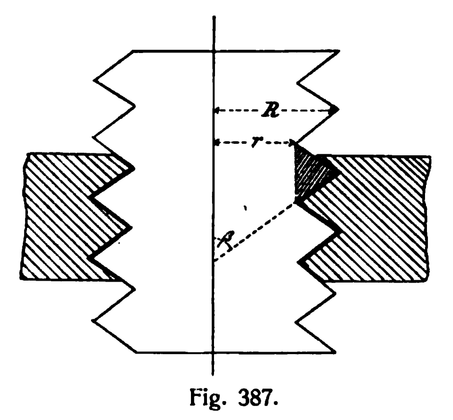


Fig. 387.

Der Hauptunterschied in der Wirkung der beiden Schraubenarten entspringt daraus, dass die Normale der Reibungsfläche in einem Punkte A der flachgängigen

Schraube in der Berührungsebene des cylindrischen Schraubenkerns liegt, bei der scharfgängigen Schraube dagegen ist dies nicht der Fall. Es sollen zunächst die Richtungscosinusse dieser Normalen berechnet werden in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 388), dessen Anfangspunkt A ist, dessen x-Axe die Senkrechte aus A zur Schraubenaxe und dessen z-Axe parallel der Schraubenaxe ist, während die y-Axe senkrecht zur x- und z-Axe gezogen ist. Die Richtungswinkel der Normalen AN in Bezug auf diese Axen mögen mit a, b und c bezeichnet werden. Die Richtungswinkel in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem für die Tangente AT der mittleren Schraubenlinie und die Erzeugende AB der windschiefen Schraubenfläche sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

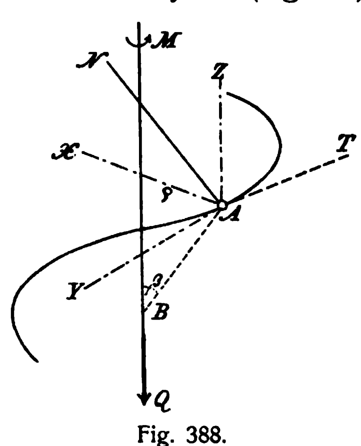


Fig. 388.

	X	Y	Z
AN	a	b	c
AT	90^0	$180^0 - \alpha$	$90^0 - \alpha$
AB	$90^0 - \beta$	90^0	$180^0 - \beta$

Wenn man die Bedingung ausdrückt, dass AN senkrecht zu AT und zu AB ist, so erhält man

$$\cos a \cos 90^0 + \cos b \cos (180^0 - \alpha) + \cos c \cos (90^0 - \alpha) = 0,$$
$$\cos a \cos (90^0 - \beta) + \cos b \cos 90^0 + \cos c \cos (180^0 - \beta) = 0,$$

d. h.

$$\cos b \cos \alpha - \cos c \sin \alpha = 0,$$
$$\cos a \sin \beta - \cos c \cos \beta = 0,$$

oder

$$\cos a = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos c,$$

(434)

$$\cos b = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos c.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

ein, so erhält man zur Berechnung von $\cos c$ die Gleichung

$$\cos^2 c \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 \right\} = 1$$

oder

$$\cos^2 c = \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}.$$

Der Nenner der rechten Seite ist

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha.$$

Man erhält also

(435) $$\cos c = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}$$

und mit Hülfe der Gleichungen (434)

$$\cos a = \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}},$$

(436)

$$\cos b = \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}.$$

Es soll jetzt die Beziehung zwischen der Last Q und dem Kraftmoment M aufgestellt werden, wenn Q mit constanter Geschwindigkeit gehoben wird. Man bezeichne mit N den normalen Druck auf ein Element der mittleren Schraubenlinie; seine Componenten auf die drei Coordinatenaxen sind

Beziehung zwischen der Last Q und dem Momente M.
1) Die Last wird gehoben.

$$N \cos a,\ N \cos b,\ N \cos c.$$

Die Componenten des Reibungswiderstandes fN auf dieselben Axen sind

$$0,\ fN \cos \alpha,\ -fN \sin \alpha.$$

Die Projectionsgleichung für die Schraubenaxe als Projectionsaxe liefert

$$Q = (\cos c - f \sin \alpha)\, \Sigma N;$$

mit Hülfe der Momentengleichung für die nämliche Axe findet man

$$M = (\cos b + f \cos \alpha)\, \varrho\, \Sigma N.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\frac{M}{Q} = \varrho \frac{\cos b + f \cos \alpha}{\cos c - f \sin \alpha};$$

und mit Benutzung der Gleichungen (435) und (436) findet man

$$(437) \qquad \frac{M}{Q} = \varrho \frac{\sin \beta \sin \alpha + f \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}{\sin \beta \cos \alpha - f \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}.$$

Zur Vereinfachung werde

$$(438) \qquad \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}{\sin \beta}\, \operatorname{tg} \varphi = f' = \operatorname{tg} \psi$$

gesetzt. Dadurch ergiebt sich

$$\frac{M}{Q} = \varrho \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \psi}{\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \psi} = \varrho \frac{\sin (\alpha + \psi)}{\cos (\alpha + \psi)}$$

oder

(439) $$M = \operatorname{tg}(\alpha + \psi) Q\varrho.$$

Diese Gleichung ist ähnlich der Gleichung (424) für die flachgängige Schraube, nur mit dem Unterschiede, dass φ in der Formel (424) durch einen Winkel ψ ersetzt worden ist. Gemäss der Gleichung (438) ist

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \frac{\sqrt{1 - \cos^2\beta \sin^2\alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2\beta}}$$

und also

$$\psi > \varphi.$$

Mit $\beta = 90^\circ$ wird $\psi = \varphi$; die scharfgängige Schraube geht dabei in eine flachgängige Schraube über. Bei der scharfgängigen Schraube ist der Reibungswiderstand grösser als bei der flachgängigen; will man dieselbe Nutzarbeit ausführen, so muss man deshalb ein grösseres Kraftmoment verwenden.

Wirkungsgrad. Der Wirkungsgrad für die scharfgängige Schraube hat den Wert

(440) $$\eta = \frac{M_n}{M} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)}.$$

Er ist kleiner als bei der flachgängigen Schraube.

Infolge dieser Eigenschaften wird die flachgängige Schraube hauptsächlich als Bewegungsmechanismus, die scharfgängige Schraube als Verbindungs-oder Befestigungsschraube benützt; nur sehr grosse Befestigungsschrauben werden als flachgängig ausgeführt.

2) *Die Last wird gesenkt.* Bei der Senkung der Last Q mit Hülfe einer scharfgängigen Schraube gilt die Gleichung:

(441) $$M = \operatorname{tg}(\alpha - \psi) Q\varrho.$$

Man unterscheidet zwischen drei Fällen, wie auf p. 564.

1) $\alpha > \psi$. Q für sich allein würde der Schraube eine beschleunigte Bewegung erteilen; das Kräftepaar M muss bremsend wirken.

2) $\alpha < \psi$. Das Kräftepaar M muss der Bewegung der Last Q nachhelfen, anderenfalls würde sie festgeklemmt werden.

3) $\alpha = \psi$. Die Last Q bewegt sich von selbst gleichförmig abwärts.

Anwendung.

Bei der Schraubenmutter einer scharfgängigen Verbindungsschraube wirken Reibungswiderstände sowohl zwischen Schraube und Schraubenmutter wie zwischen der Mutter und ihrer Unterlage (Fig. 389). Die letztere Reibung kann annähernd als die Reibung an einem ebenflächig-ringförmigen Stützzapfen angesehen werden

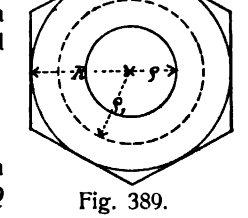


Fig. 389.

Um die Mutter anzuziehen, braucht man ein Kraftmoment, dessen Grösse annähernd durch

$$M = \{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)\varrho + f_1 \varrho_1\} Q \tag{442}$$

ausgedrückt wird, wobei die Bezeichnungen an der Schraube dieselben wie vorher sind, Q den Druck zwischen der Unterlage und der Schraubenmutter, ϱ_1 den mittleren Radius der Mutter und f_1 den Reibungscoefficienten zwischen Mutter und Unterlage bezeichnen.

Um die Mutter loszulösen, ist ein in entgegengesetzter Richtung wirkendes Moment von der Grösse

$$M = \{\operatorname{tg}(\psi - \alpha)\varrho + f_1 \varrho_1\} Q \tag{443}$$

erforderlich. Die notwendige Bedingung, damit sich die Mutter nicht von selbst loslöse, ist also

$$\operatorname{tg}(\psi - \alpha)\varrho + f_1 \varrho_1 > 0.$$

§ 100.

Gleitwiderstand biegsamer Seile und Riemen.

Ein Seil, das als vollkommen biegsam angenommen wird und dessen Gewicht man ausser Betracht lässt, sei um einen runden Körper (z. B. einen Cylinder) gelegt (Fig. 390); an dem einen Ende wirke die Last Q, an

dem anderen die Kraft P. Es soll die Beziehung zwischen P und Q abgeleitet werden, welche besteht, wenn das Seil in der einen oder anderen Richtung über den Körper gleitet oder sich in Ruhe befindet. Wenn das Seil über den Körper gezogen wird, so findet gleitende Reibung statt; in dem Ruhezustande giebt es eine mehr oder weniger vollständig entwickelte Reibung der Ruhe. Der Winkel zwischen den Normalen in den äussersten Berührungspunkten des Seils werde mit α bezeichnet; man misst α im absoluten Winkelmass, der Wert kann auch grösser als 2π oder ein Vielfaches von 2π sein, wenn das Seil mehrere Male um den Körper gewickelt ist.

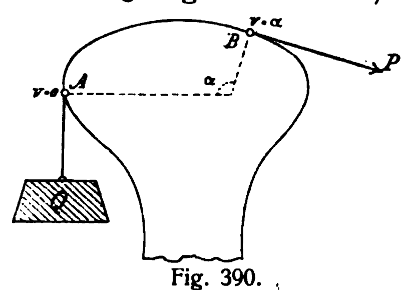


Fig. 390.

Beziehung zwischen Kraft und Last. 1) beim Aufziehen der Last.

Es werde zuerst der Fall betrachtet, dass die Last Q gehoben wird. Auf ein kleines Element des Seils (Fig. 391), dessen äusserste Normalen den Winkel dv mit einander einschliessen, wirken die Spannungen S und $S + dS$ in den beiden Endpunkten, der normale Druck dN (in der Mitte) und der Reibungswiderstand fdN. Diese Kräfte halten einander das Gleichgewicht, und zwar findet man als Projectionsgleichungen für die Richtungen von fdN und dN als Projectionsrichtungen

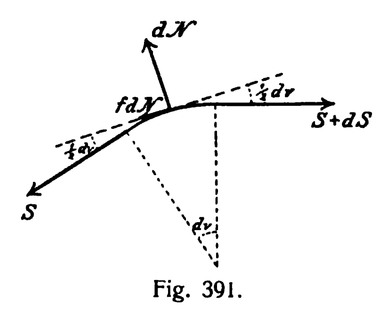


Fig. 391.

$$(S + dS) \cos \tfrac{1}{2} dv - S \cos \tfrac{1}{2} dv - fdN = 0,$$
$$dN - (S + dS) \sin \tfrac{1}{2} dv - S \sin \tfrac{1}{2} dv = 0.$$

Der Winkel $\frac{1}{2} dv$ ist unendlich klein; sein Cosinus kann

deshalb gleich 1 und sein Sinus gleich dem Bogen gesetzt werden; man erhält dabei

$$dS = f\,dN$$
$$dN = S\,dv.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dS}{S} = f\,dv$$

und durch Integration

$$\log S = fv + c,$$

wo log den natürlichen oder Neperschen Logarithmus bezeichnet. Die letzte Gleichung liefert

$$S = e^c e^{fv} = Ce^{fv}.$$

Die Constante C muss noch bestimmt werden. Rechnet man den Winkel v wie die Figur 390 angiebt, so ist $S = Q$ für $v = 0$. Hieraus ergiebt sich $C = Q$ und also

(444) $$S = Qe^{fv}$$

als allgemeiner Ausdruck für die Spannung in einem Punkte des Seils. Für $v = a$ muss S gleich P sein; die Beziehung zwischen Kraft und Last beim Heben der Last ist deshalb

(445) $$P = Qe^{fa}.$$

Weil $e^{fa} > 1$ ist, so ist die Kraft stets grösser als die Last.

2) *beim Senken.*

Man erhält die beim Senken der Last bestehende Beziehung, wenn man in (445) das Zeichen von f umkehrt, also

(446) $$P = Qe^{-fa}.$$

Es ist P immer kleiner als Q; macht man fa genügend gross, so kann man durch eine kleine Kraft P einer be-

liebig grossen abwärts gleitenden Last das Gleichgewicht halten oder ihre Bewegung bremsen.

Das Resultat wird dasselbe, wenn das Seil in Ruhe bleibt, und eine Welle oder Rolle, um welche es gewickelt ist, sich dreht.

Die Kraft P, welche die Last Q in Ruhe erhalten soll, muss die Bedingungen

$$(447) \qquad Qe^{-fa} \leqq P \lesseqgtr Qe^{fa}$$

erfüllen, wo f der Reibungscoefficient beim Übergange aus Ruhe in Bewegung ist.

Wirkungsgrad. Der Wirkungsgrad für das Heben der Last beträgt

$$(448) \qquad \eta = \frac{P_n}{P} = \frac{Q}{Qe^{fa}} = e^{-fa}.$$

§ 101.

Anwendungen des Gleitwiderstandes bei Seilen und Riemen.

Riemenscheiben. 1) Riemenscheiben.

Um mechanische Arbeit von einer Maschinenaxe nach einer anderen überzuführen, wendet man, wenn der Abstand beider Axen so gross ist, dass Zahnräder oder Frictionsrollen nicht benützt werden können, oft einen Riemen oder ein Seil an, die über zwei Scheiben, eine an jeder Axe, gelegt und so stark gespannt werden, dass die Reibung zwischen Scheibe und Riemen genügt, um die Arbeit zuerst von der Triebscheibe auf den Riemen und dann von dem Riemen auf die Lastscheibe zu übertragen (Fig. 392).

Spannungen im Riemen. Der Widerstand an der Lastscheibe sei durch ein Kräftepaar vom Momente M gegeben; statt M kann man auch den sog. auf den Umfang reducirten Widerstand $Q = \frac{M}{r}$ benützen; beispielsweise kann Q

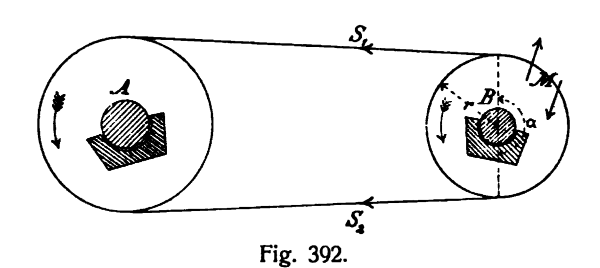


Fig. 392.

eine Last sein, welche gehoben werden soll. Es sei S_1 die Spannung in dem ziehenden Riementeile, S_2 die Spannung in dem gezogenen Teile. Eine Momentengleichung für den Mittelpunkt der Lastscheibe als Pol liefert

$$S_1 r - S_2 r - M = 0. \tag{449}$$

Wendet man ferner die Gleichung (445) unter den Voraussetzungen an, dass der Riemen als vollkommen biegsam betrachtet werden darf und dass die Reibung völlig entwickelt ist, so erhält man

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}.$$

Durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}-1}\frac{M}{r} = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}-1}Q, \\ S_2 &= \frac{1}{e^{f\alpha}-1}\frac{M}{r} = \frac{1}{e^{f\alpha}-1}Q. \end{aligned} \tag{450}$$

Wenn die Scheiben in Ruhe sind, so ist der gemeinsame Wert der Spannungen der beiden Riementeile annähernd

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{f\alpha}+1}{e^{f\alpha}-1}Q. \tag{451}$$

M und Q sind durch den Arbeitseffect und die Umlaufszahl n der Lastscheibe bestimmt. Ist der Arbeits-

effect oder die Leistung N Pferdestärken und drückt man die Längen in m, die Kräfte in kg aus, so erhält man

$$(452) \qquad Q = \frac{M}{r} = \frac{60 \,.\, 75\, N}{2\pi rn} = \frac{2250\, N}{\pi rn}.$$

Die Gleichungen (450) setzen eine vollständig entwickelte Reibung voraus und bieten also keine Sicherheit gegen Gleiten des Riemens. Um ein Gleiten zu verhüten, müssen S_1, S_2 und S in Wirklichkeit noch grösser gemacht werden; man kann dies z. B. so erreichen, dass man statt f in den Formeln (450) und (451) nur einen Teil $\frac{f}{m}$ von f benützt, wo $m > 1$ ist.

Die Riemenscheiben werden oft mit einer glattabgedrehten, etwas convexen Riemenbahn versehen, weil sie den Riemen besser als eine cylindrische Bahn am Abgleiten hindert. Als mittleren Wert von f nehme man $f = 0.28$ bei gewöhnlichen etwas gefetteten Lederriemen auf gusseisernen Scheiben.

Die Seilscheiben werden zur Verstärkung der Reibung mit Keilnuten versehen. Für ein Hanfseil auf einer glatten hölzernen Scheibe ist $f = 0.33$ im Mittel.

Bandbremse.

2) B a n d b r e m s e.

Die e i n f a c h e B a n d b r e m s e wird hauptsächlich bei der gewöhnlichen Hebewinde benützt (Fig. 393). Die Triebwelle der Winde ist mit einer glattgedrehten Scheibe versehen, um die Scheibe ist ein Stahlband gelegt; das eine Ende A ist am Fundament der Winde, das andere Ende B an dem kürzeren Arm eines Hebels befestigt. An dem längeren Arm dieses Hebels wirkt die Kraft P, mit Hülfe welcher das Stahlband an die Scheibe gepresst wird; dabei wird die Last Q gebremst. Der Abstand der Last Q von dem Mittelpunkte der Scheibe sei r. In dem Stahlbande wirkt bei A eine Spannung Y, bei B eine Spannung X und zwar ist bei der in der

Figur angegebenen Drehungsrichtung Y die grössere von beiden. Die Kraft P hat ihren kleinsten Wert, wenn völligentwickelte Reibungswiderstände beim Bremsen in Anspruch genommen werden. Mit den Bezeichnungen in Fig. 393 ist die Gleichgewichtsbedingung am Hebel

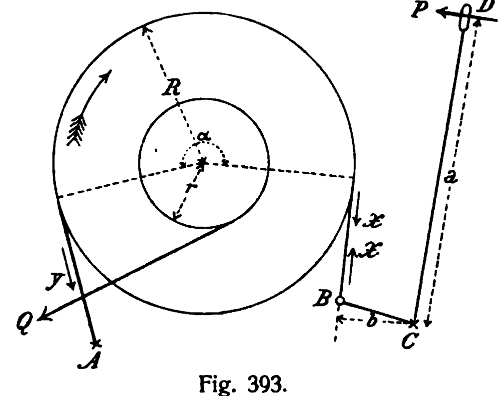


Fig. 393.

$$Pa = Xb$$

und an der Scheibe

$$XR + Qr = YR.$$

Gemäss der Gleichung (445) hat man

$$Y = Xe^{f\alpha}.$$

Eliminirt man die Spannungen X und Y zwischen den drei letzten Gleichungen, so erhält man die zum Bremsen erforderliche Kraft

$$(453) \qquad P = \frac{r}{R}\frac{b}{a}\frac{Q}{e^{f\alpha}-1}.$$

Um dieselbe Last bei der entgegengesetzten Drehungsrichtung der Scheibe zu bremsen, würde man eine erheblich grössere Kraft brauchen, und zwar erhielte man durch Umkehren der Zeichen von f und Q in der Gleichung (453)

$$(454) \qquad P = \frac{r}{R}\frac{b}{a}\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}-1}Q$$

Differential-bandbremse.

1) Differentialbandbremse.

Bei der Differentialbandbremse sind die beiden Enden des Bremsbandes an dem Hebel befestigt, entweder auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten in Bezug auf den Stützpunkt des Hebels, wie in der Figur 394. Wenn die Bremse zweckmässig einge-

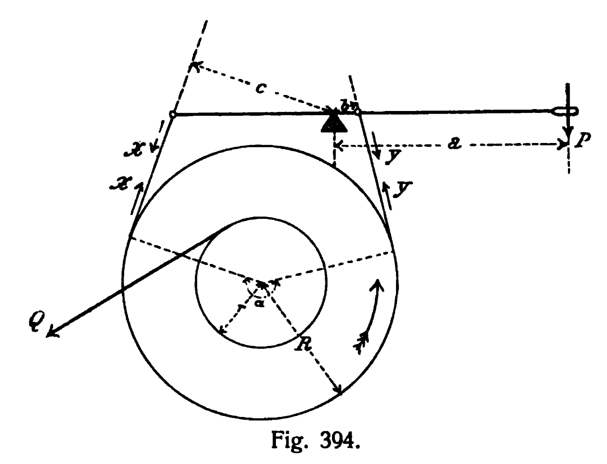


Fig. 394.

richtet ist, so ist ihre Wirkung noch kräftiger als diejenige der einfachen Bandbremse. Mit den Bezeichnungen in der Figur 394 erhält man

$$Pa + Yb = Xc,$$
$$XR = Qr + YR,$$
$$X = e^{f\alpha}\, Y,$$

und berechnet hieraus

$$P = \frac{r}{R}\,\frac{ce^{f\alpha} - b}{a(e^{f\alpha} - 1)}\,Q. \tag{455}$$

Wählt man b nur wenig kleiner als $ce^{f\alpha}$, so kann man mit Hülfe einer kleinen Kraft P eine grosse Last Q bremsen.

Als Wert des Reibungscoefficienten f bei Eisen oder Stahlbändern auf eisernen Scheiben kann im Mittel $f = 0.18$ sowohl während der Bewegung wie für den Übergang aus Ruhe in Bewegung gewählt werden.

§ 102.

Steifigkeitswiderstand von Ketten, Seilen und Riemen.

Steifigkeitswiderstand.

Oben ist vorausgesetzt worden, dass die betrachteten Seile und Riemen vollkommen biegsam seien. Dies ist aber in Wirklichkeit nie vollständig der Fall; die unvollkommene Biegsamkeit eines Riemens, eines Seiles oder einer Kette verursacht einen Widerstand bei der Bewegung dieses Zugorgans, welche meistens in der Aufwickelung auf einer Welle oder in der Abwickelung von derselben besteht. Dieser Widerstand heisst Steifigkeitswiderstand und verbraucht Arbeit gerade so wie die Reibung. An der Kette entsteht der Arbeitsverlust hauptsächlich durch die Reibung beim Gleiten der Kettenglieder auf einander; bei Seilen und Riemen entsteht eine gewisse Formveränderung; bei Seilen gleiten die einzelnen Seilabteilungen in den von den übrigen gebildeten keilnutenförmigen Rinnen. Gleichzeitig findet eine Abweichung des Seiles, des Riemens oder der Kette aus der Lage statt, welche sich bei vollkommener Biegsamkeit ergeben würde.

Durch diese Abweichung wird im allgemeinen der Hebelarm der Kraft verkürzt, der Hebelarm der Last verlängert (Fig. 395); jedoch können auch beide verlängert werden, wie z. B. bei Drahtseilen, und zwar der Kraftarm weniger als der Lastarm. Durch die dabei entstehende Parallelverschiebung der Kraft und der Last werden ihre Momente in Bezug auf die Axe der Scheibe, an der sie angebracht sind, geändert. Wie die Figur 395 zeigt,

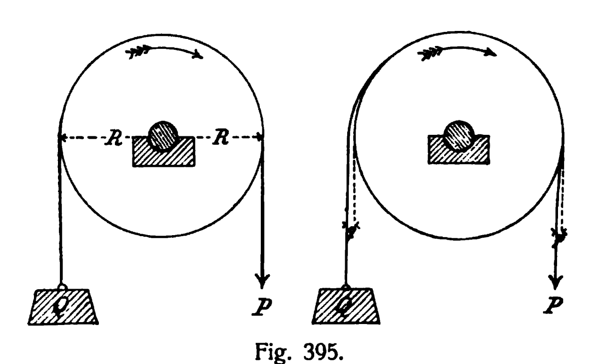


Fig. 395.

würde das Kraftmoment um Pp vermindert, das Lastmoment um Qq vergrössert werden. In den Anwendungen behält man am zweckmässigsten die theoretischen Arme der Kraft und der Last bei und führt ein besonderes der Bewegung entgegenwirkendes Moment ein. Statt dieses Momentes kann man auch eine an der Peripherie der Scheibe, im entgegengesetzten Sinne zu der Bewegung wirkende tangentiale Kraft S benützen, welche der auf die Peripherie reducirte Steifigkeitswiderstand heisst; diese Kraft darf jedoch in keiner Projectionsgleichung mitgerechnet werden, sondern nur in der Momentengleichung für den Mittelpunkt der Scheibe als Pol.

Wenn P und Q gleich grosse Arme besitzen, so liefert die Momentengleichung

$$PR = QR + SR,$$

und also

$$S = P - Q. \tag{456}$$

Bei der Berechnung von S müssen einige Fälle von einander unterschieden werden.

Kette.

1) Kette: Es seien gemäss der Figur 396 l die Länge eines Gliedes der Kette, α der einem Gliede entsprechende Winkel am Mittelpunkte der Scheibe, R der

Radius der Scheibe, sowie ferner ϱ der mittlere Krümmungsradius desjenigen Stückes des Auges des Kettengliedes, bei dem ein Gleiten stattfindet, f der Reibungscoefficient beim Gleiten.

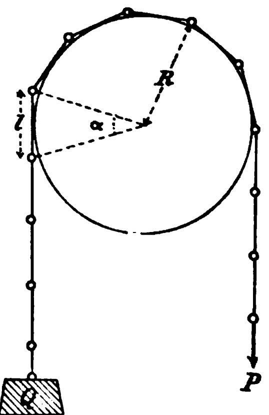


Fig. 396.

Wenn man die Scheibe um den Winkel α dreht, wobei also ein Stück l der Kette aufgewindet wird, so erhält man als Arbeiten bez. der Kraft P, der Last Q und der Reibung in zwei Kettengliedern

$$A = Pl,$$

$$A_n = Ql,$$

$$A_f = fP\varrho\alpha + fQ\varrho\alpha.$$

Man hat ferner

$$A = A_n + A_f$$

oder

$$Pl = Ql + f(P + Q)\,\varrho\alpha;$$

hieraus ergiebt sich

$$\frac{P - Q}{Q} = \frac{S}{Q} = \frac{2f\varrho\alpha}{l - f\varrho\alpha}.$$

Setzt man noch

$$l = 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

ein, so erhält man

$$S = \frac{2f\varrho\alpha}{2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f\varrho\alpha} Q. \tag{457}$$

Bei der Anwendung kann man das zweite Glied des Nenners weglassen und unter der Voraussetzung, dass die

Kettenglieder nicht sehr lang sind $2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ durch α ersetzen. Dadurch ergiebt sich die einfachere Formel

$$(458) \qquad S = 2f \frac{\varrho}{R} Q$$

für die Berechnung des Steifigkeitswiderstandes einer Kette. Bei nicht geschmierten Ketten ist im Mittel $f = 0.2$.

Hanfseil. 2) Hanfseil. Durch Versuche hat man für den Steifigkeitswiderstand von Hanfseilen die Formel

$$(459) \qquad S = k \frac{d^2}{R} (P + Q)$$

gefunden. R ist der Radius der Scheibe, d der Durchmesser des Seils, P die Kraft, Q die Last und k ein von der Beschaffenheit des Seiles abhängender Coefficient. Als mittleren Wert kann $k = 0.009 \frac{1}{\text{mm}}$ benützt werden, wobei R und d in mm ausgedrückt werden müssen.

Riemen. 3) Riemen. Für den Steifigkeitswiderstand der ledernen Riemen benützt man die auf Grund von Versuchen aufgestellte Formel

$$(460) \qquad S = k \frac{\delta^2}{R} (P + Q),$$

wo die Bezeichnungen dieselben wie vorher sind, mit dem Unterschiede, dass δ die Dicke des Riemens bedeutet. Im Mittel ist $k = 0.015 \frac{1}{\text{mm}}$.

Anwendung.

Man berechne den Steifigkeitswiderstand in Procenten der Last bei einer Scheibe vom Radius $R = 0.1$ m, je nachdem bei der Hebung der Last 1) eine Kette mit 5 cm langen Gliedern und $\varrho = 0.5$ cm, 2) ein Hanfseil von 25 mm Durchmesser oder 3) ein Lederriemen von 6 mm Dicke benützt wird.

1) Für die Kette findet man

$$\frac{S}{Q} = 2 \times 0.2 \times \frac{0.5}{10} = \frac{2}{100},$$

2) für das Hanfseil

$$\frac{S}{Q} = 2\,\frac{\frac{kd^2}{R}}{1 - \frac{kd^2}{R}} = 2\,\frac{0.009\,\frac{25^2}{100}}{1 - 0.009\,\frac{25^2}{100}} = \frac{12}{100}$$

und 3) für den Lederriemen

$$\frac{S}{Q} = 2\,\frac{k\,\frac{\delta^2}{R}}{1 - k\,\frac{\delta^2}{R}} = 2\,\frac{0.015\,\frac{6^2}{100}}{1 - 0.015\,\frac{6^2}{100}} = \frac{1.1}{100}.$$

§ 103.

Rollen und Flaschenzüge.

A. Feste Rolle.

Bei der festen Rolle (Fig. 397) werde ein Gewicht Q vermittelst einer verticalen Kraft P mit constanter Geschwindigkeit gehoben. Die schädlichen Widerstände bestehen teils in der Zapfenreibung, welche hier nach § 95 A berechnet werden kann, teils in dem Steifigkeitswiderstande eines Seiles oder einer Kette. Die beiden Fälle müssen gesondert behandelt werden.

Fig. 397.

Feste Rolle und Seil.

1) Heben mit Hülfe eines Seiles.

Die Figur stellt die Kräfte dar, welche auf die Rolle selbst wirken; G ist das Gewicht der Rolle, R ihr Radius und ϱ der Radius des Zapfens. Durch Projection der Kräfte auf die verticale Richtung findet man

$$P + Q + G = N \cos\varphi + fN \sin\varphi = \frac{N}{\cos\varphi},$$

oder genügend genau

$$P + Q + G = N.$$

Die Gleichung der Momente in Bezug auf die Axe der Rolle liefert

$$PR - QR - SR - fNr = 0,$$

oder

$$P = Q + S + f\frac{r}{R}N.$$

Der Steifigkeitswiderstand S ist nach der Gleichung (459)

$$S = k\frac{d^2}{R}(P + Q).$$

Eliminirt man jetzt N und S zwischen den drei erhaltenen Gleichungen und löst die resultirende Gleichung in Bezug auf P auf, so findet man

$$(461) \qquad P = \frac{R + kd^2 + fr}{R - kd^2 - fr}Q + \frac{fr}{R - kd^2 - fr}G.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$(462) \qquad P = aQ + bG.$$

Meistens ist G so klein, dass das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Dabei ergiebt sich einfacher

$$(463) \qquad P = aQ.$$

Der für die Constante a gefundene Ausdruck

$$a = \frac{R + kd^2 + fr}{R - kd^2 - fr}$$

kann mit hinreichender Genauigkeit ersetzt werden durch

(464) $$a = 1 + 2k\frac{d^2}{R} + 2f\frac{r}{R}.$$

Mit den numerischen Werten $k = 0.009$ und $f = 0.08$ bei geschmierten Zapfen ist

(465) $$a = 1 + 0.018\frac{d^2}{R} + 0.16\frac{r}{R},$$

wo d, r und R in mm ausgedrückt werden müssen.

2) Förderung mit Hülfe einer Kette. *Feste Rolle und Kette.*

Der einzige Unterschied zwischen diesem und dem vorhin betrachteten Falle rührt von dem Werte (Gl. 458) des Steifigkeitswiderstandes

$$S = 2f_1\frac{\varrho}{R}Q$$

her, wo der Reibungscoefficient des Gleitens in den Gliederaugen mit f_1 bezeichnet worden ist, während f der Zapfenreibungscoefficient ist. Mit Vernachlässigung des eigenen Gewichts der Rolle findet man jetzt

(466) $$P = aQ,$$

wo

(467) $$a = 1 + 2f_1\frac{\varrho}{R} + 2f\frac{r}{R}$$

oder

(468) $$a = 1 + 0.4\frac{\varrho}{R} + 0.16\frac{r}{R}$$

ist.

Der Wirkungsgrad bei der Förderung ist in beiden Fällen *Wirkungsgrad.*

(469) $$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{Q}{aQ} = \frac{1}{a}.$$

B. **Lose Rolle.**

Die lose Rolle (Fig. 398) bewegt sich zusammen mit der Last, welche an das Rollengehäuse angehängt ist. Der eine Teil des um die Rolle gelegten Seiles oder der Kette ist fest; an dem anderen Teile wirkt die zum Heben der Last Q erforderliche Kraft P. Die Spannung in dem befestigten Seilstücke sei X. Man unterscheidet wieder zwischen zwei Fällen, je nachdem ein Seil oder eine Kette benützt wird.

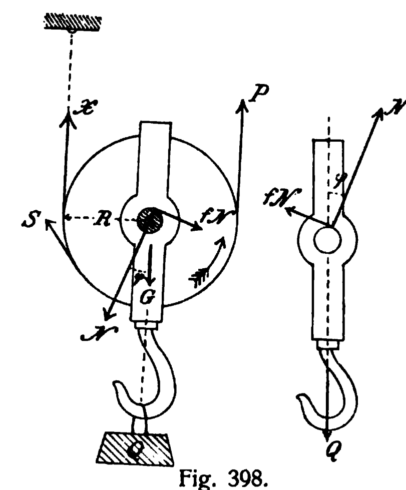


Fig. 398.

Lose Rolle und Seil.

1) Förderung mit Hülfe eines Seiles.

Wenn man die Gewichte des Rollengehäuses und des Lasthakens vernachlässigt oder sie in Q einrechnet, so findet man durch Projection der Kräfte in der Figur rechts auf die verticale Richtung

$$Q = N\cos\varphi + fN\sin\varphi = \frac{N}{\cos\varphi}.$$

Die Projectionsgleichung für die verticale Projectionsrichtung liefert ferner an der Rolle selbst

$$P + X = G + \frac{N}{\cos\varphi} = G + Q,$$

wo G das Gewicht der Rolle ist. Mit Hülfe der Momentengleichung für die letztgenannten Kräfte erhält man

$$XR + SR - PR + fNr = 0.$$

Führt man hier den Wert (Gl. 459)

$$S = k\frac{d^2}{R}(X+P)$$

des Steifigkeitswiderstandes ein und eliminirt X mit Hülfe der Gleichung

$$X+P=G+Q,$$

so findet man schliesslich

$$(470)\qquad P=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{kd^2+fr}{R}\right\}Q+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{kd^2}{R}\right\}G.$$

Dieses Resultat hat die Form

$$(471)\qquad P=aQ+\beta G.$$

Wenn G vernachlässigt werden kann, so ist einfacher

$$(472)\qquad P=aQ.$$

Zwischen dem Coefficienten a an der festen Rolle und dem Coefficienten α an der losen Rolle besteht die Beziehung

$$(473)\qquad \frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{R+kd^2+fr}{R-kd^2-fr}=a.$$

2) Förderung mit Hülfe einer Kette. *Lose Rolle und Kette.*
Infolge des veränderten Wertes des Steifigkeitswiderstandes (Gl. 458)

$$S=2f_1\frac{\varrho}{R}X$$

ändert sich der Coefficient α der Formel

$$(474)\qquad P=\alpha Q$$

jetzt in

$$(475)\qquad \alpha=\frac{1}{2}\left\{1+f_1\frac{\varrho}{R}+f\frac{r}{R}\right\}.$$

Auch in diesem Falle besteht genügend genau die Beziehung

$$(476) \qquad \frac{a}{1-a} = 1 + 2f_1\frac{\varrho}{R} + 2f\frac{r}{R} = a.$$

Wirkungsgrad.

Für den Wirkungsgrad an der losen Rolle erhält man

$$(477) \qquad \eta = \frac{P_n}{P} = \frac{\frac{1}{2}Q}{aQ} = \frac{1}{2a}.$$

C. Vergleich zwischen der festen und der losen Rolle.

Die Kraft beim Heben.

Um einen Vergleich in Bezug auf die Hebekraft P und den Wirkungsgrad zwischen zwei gleich beschaffenen Rollen anzustellen, von welchen die eine fest, die andere lose ist, werde der Coefficient a der Formeln (463) und (466) durch $1+\gamma$ ersetzt, wo γ die Grösse

$$2k\frac{d^2}{R} + 2f\frac{r}{R}$$

bei Anwendung eines Seiles und die Grösse

$$2f_1\frac{\varrho}{R} + 2f\frac{r}{R}$$

bei Anwendung einer Kette bezeichnet. Es seien P und η die Kraft und der Wirkungsgrad für die feste Rolle, P' und η' dieselben Grössen für die lose Rolle. Man erhält dann

$$P = aQ = (1+\gamma)\,Q,$$

$$P' = \alpha Q = \frac{a}{1+a}\,Q = \frac{1+\gamma}{2+\gamma}\,Q;$$

folglich ergiebt sich

$$(478) \qquad P = (2+\gamma)\,P',$$

d. h. *die zum Heben erforderliche Kraft muss bei der festen Rolle mehr als zwei Mal so gross wie bei der losen Rolle sein.*

Für die Wirkungsgrade findet man

Wirkungsgrad.

$$\eta = \frac{1}{a} = \frac{1}{1+\gamma},$$

$$\eta' = \frac{1}{2a} = \frac{2+\gamma}{2(1+\gamma)},$$

und

$$\eta' = (1 + \tfrac{1}{2}\gamma)\,\eta, \tag{479}$$

d. h. *der Wirkungsgrad ist etwas grösser bei der losen Rolle als bei der festen.*

Wenn die lose Rolle also gewisse Vorteile vor der festen Rolle darbietet, so geschieht andererseits das Heben der Last um so langsamer.

D. **Vereinfachte Berechnungsweise.**

Widerstandscoefficient.

Es würde bei der Behandlung eines zusammengesetzten Flaschenzuges allzu weitläufig sein, für jede Rolle die Zapfenreibung und den Steifigkeitswiderstand in Betracht ziehen zu müssen. In der That ist dies auch nicht notwendig. Die für die feste Rolle geltende Gleichung (463) oder (466)

$$P = aQ$$

kann so verallgemeinert werden, dass man sie auf die Spannungen der Seil- oder Kettenteile auf beiden Seiten einer beliebigen Rolle anwendet. Die Grösse a wird als ein W i d e r s t a n d s c o e f f i c i e n t betrachtet, mit welchem die Spannung in dem gezogenen Teile multiplicirt werden muss, um die Spannung in dem ziehenden Teile

zu liefern. Für die lose Rolle ergiebt sich dabei folgende Berechnung (Fig. 398).

Durch Projection der auf das ganze System wirkenden Kräfte auf die Verticale erhält man (für $G = 0$)

$$P + X = Q;$$

gemäss unserer Regel ist

$$P = aX.$$

Durch Elimination von X zwischen diesen Gleichungen findet man

$$P = \frac{a}{1+a} Q.$$

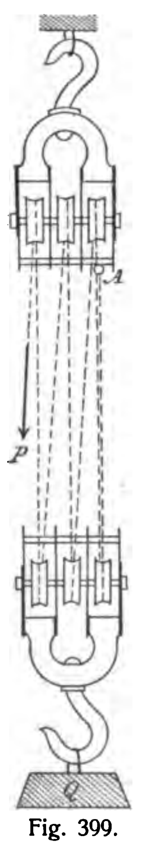


Fig. 399.

Weil nach (473) und (476)

$$\alpha = \frac{a}{1+a}$$

ist, so ist die obige Gleichung identisch mit der Gleichung (472) oder (474).

E. Gewöhnlicher Flaschenzug.

Der gewöhnliche Flaschenzug (Fig. 399) besteht aus einem festen und einem beweglichen Gehäuse, welche beide n Rollen enthalten. Das Seil oder die Kette ist an einem Auge des festen Gehäuses angemacht und abwechselnd um die Rollen des beweglichen und des festen Gehäuses gelegt. An dem freien Ende wirkt die zum Heben erforderliche Kraft P, während die Last an dem beweglichen Gehäuse hängt. Wir setzen voraus, dass der Abstand zwischen dem festen und dem beweglichen Gehäuse so gross ist, dass alle Teile des Seiles oder der Kette

ohne merkbarer Abweichung einander parallel sind. Bezeichnet man der Reihe nach die Spannungen der einzelnen Teile, von A ausgehend, mit X_1, X_2 u. s. w., so erhält man unter der Voraussetzung, dass der Widerstandscoefficient a für alle Rollen derselbe ist,

Beziehung zwischen der Kraft und der Last.

$$X_2 = aX_1,$$
$$X_3 = aX_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{2n} = aX_{2n-1},$$
$$P = aX_{2n}.$$

Denkt man sich ferner alle Teile des Seiles oder der Kette durchschnitten und projicirt die Kräfte an dem beweglichen Rollengehäuse auf die Verticale, so erhält man

$$Q = X_1 + X_2 + \ldots + X_{2n}.$$

Durch Elimination der $2n$ Grössen $X_1, X_2 \ldots X_{2n}$ zwischen den obigen $2n + 1$ Gleichungen ergiebt sich

$$Q = \frac{P}{a} + \frac{P}{a^2} + \ldots + \frac{P}{a^{2n}}. \tag{480}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich in

$$Q = \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n-1}}{a^{2n}} P = \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n}(a-1)} P$$

oder

$$P = \frac{a^{2n}(a-1)}{a^{2n} - 1} Q. \tag{481}$$

Statt jedesmal die Gleichung (481) zu benützen, bestimmt man ein für alle Mal den Wirkungsgrad eines gegebenen Flaschenzugs und drückt die Beziehung zwi-

schen Kraft und Last vermittelst desselben aus. Die Gleichung (480) liefert für $a=1$, wobei $P=P_n$ ist,

$$P_n=\frac{1}{2n}Q.$$

Hieraus ergiebt sich

$$(482)\qquad \eta=\frac{P_n}{P}=\frac{\frac{1}{2n}Q}{\frac{a^{2n}(a-1)}{a^{2n}-1}Q}=\frac{a^{2n}-1}{2na^{2n}(a-1)}$$

und als Endformel

$$(483)\qquad P=\frac{1}{2n\eta}Q.$$

F. Differentialflaschenzug.

Der Differentialflaschenzug besteht aus zwei mit einander zusammengegossenen Rollen mit verschieden grossen Radien R und r, in einem unbeweglichen Gehäuse, und einer losen Rolle, deren Gehäuse die Last trägt. Um die Rollen ist eine endlose Kette gelegt, wie Fig. 400 zeigt. Die Umfänge der zusammengegossenen Rollen sind mit Zähnen oder Vertiefungen versehen, damit die Kette nicht gleite. Man muss die beiden Fälle, dass die Last gehoben oder gesenkt wird, gesondert behandeln.

Fig. 400.

Heben der Last.

1) Die Last werde gehoben.

In diesem Falle wirkt die Kraft P an dem Teile der schlaffen Kette,

welcher von der Rolle mit dem grösseren Radius R herunterhängt. Wenn X und Y die Spannungen der Kettenteile zwischen den beiden Gehäusen bezeichnen, wie die Figur zeigt, so ergeben sich an der losen Rolle die Gleichungen

$$X + Y = Q,$$
$$X = aY.$$

Mit Hülfe einer Momentengleichung in Bezug auf die Axe der zusammengegossenen Rollen erhält man

$$PR + Yr = aXR,$$

wo die rechte Seite die Summe der Momente der Spannung X in dem aufzuwickelnden Kettenteile und der schädlichen Widerstände ist. Durch Elimination von X und Y zwischen den drei Gleichungen findet man

$$P = \frac{a^2 - \frac{r}{R}}{1 + a} Q \tag{484}$$

als Beziehung zwischen Kraft und Last. Mit $a = 1$ erhält man hieraus

$$P_n = \frac{1 - \frac{r}{R}}{2} Q$$

und den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{1 - \frac{r}{R}}{a^2 - \frac{r}{R}} \frac{1 + a}{2}. \tag{485}$$

Mit Benutzung von η nimmt die Gleichung (484) die praktisch zweckmässige Gestalt

$$P=\frac{1-\frac{r}{R}}{2\eta}Q=\frac{R-r}{2R\eta}Q$$

an.

Senken der Last.

2) Die Last werde gesenkt.

Es ist eine der Bewegung entgegenwirkende Kraft P' in demselben Kettenteile erforderlich wie P vorher; und zwar erhält man P' aus dem Ausdrucke (484) von P, wenn man a durch $\frac{1}{a}$ ersetzt, was mit der Umkehrung der Bewegungsrichtung gleichbedeutend ist. Es ergiebt sich

$$P'=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{r}{R}}{1+\frac{1}{a}}Q. \tag{486}$$

Damit P' positiv sei, muss $\frac{1}{a^2}>\frac{r}{R}$ sein. Würde man die Kraft P' entfernen, so würde die Last Q von selbst in Bewegung geraten. Man verlangt aber eine solche Construction des Differentialflaschenzuges, dass eine Last Q, welche vermittelst desselben gehoben wird, nicht zu sinken beginnen darf, wenn die Triebkraft P entfernt wird. Man erreicht dies, wenn man

$$\frac{r}{R}>\frac{1}{a^2} \tag{487}$$

macht. P' wird dabei negativ, d. h. die Kraft muss an dem Teile der schlaffen Kette angebracht werden, welcher von der Rolle mit dem kleineren Radius herunterhängt.

Weil a fast ohne Ausnahme gleich oder grösser als 1.06 ist, so kann zweckmässig bei der praktischen Ausführung

$$\frac{r}{R} > \frac{1}{1.06^2} = \frac{1}{1.1236}$$

oder

$$\frac{r}{R} \geqq \frac{8}{9}$$

gewählt werden. Dem Werte $\frac{r}{R} = \frac{8}{9}$ würde gemäss der Gleichung (485) der Wirkungsgrad $\eta = 0.49$ entsprechen.

§ 104.

Rollende Reibung.

Der Bewegungswiderstand, den man rollende Reibung oder Walzenreibung nennt, tritt auf, wenn eine Walze längs einer ebenen Unterlage rollt (Fig. 401). Er kann stets durch ein Kräftepaar dargestellt werden. Die Beobachtungen haben gezeigt, dass das Moment M dieses Kräftepaares proportional dem normalen Drucke zwischen der Walze und der Unterlage ist und somit in die Form

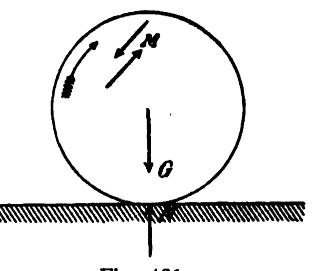


Fig. 401.

$$M = fN$$

gesetzt werden kann. Dabei bezeichnet f einen Erfahrungscoefficienten, den sog. Hebelarm oder Coefficienten der rollenden Reibung; er ist eine Länge.

Im Mittel hat man für Eisen auf Eisen (z. B. bei Eisenbahnrädern und Schienen) sowie für hartes Holz gegen Holz (Pockholz)

$$f = 0.0005 \text{ m}$$

gefunden.

Auch während der Ruhe giebt es einen Widerstand gegen das Rollen; er ist entweder vollständig oder unvollständig entwickelt. Wenn das Moment eines auf die Walze wirkenden Kräftepaares kleiner als fN ist und die Walze sich in Ruhe befindet, so bleibt sie in Ruhe; wenn das Moment grösser als fN ist, so beginnt die Walze zu rollen und zwar verläuft die Bewegung so, als ob es kein Hindernis gäbe, das Moment des angreifenden Kräftepaares aber um den Betrag fN kleiner als das wirkliche Moment wäre.

Eine Walze vom Radius r befinde sich auf einer horizontalen Unterlage (Fig. 402); auf die Walze wirke in einem Punkte O der Axe eine zur Axe senkrechte Kraft R, welche den Winkel β mit der Verticalen einschliesst. Dabei ist

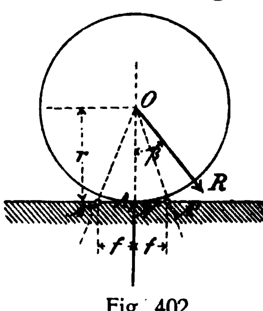


Fig. 402.

$$N = R \cos \beta$$

und das angreifende Moment

$$M = Rr \sin \beta. \tag{488}$$

Die Walze verbleibt in Ruhe, wenn

$$Rr \sin \beta \leqq fR \cos \beta$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta \leqq \frac{f}{r} \tag{489}$$

ist. Diese Beziehung drückt die Bedingung dafür aus, dass die Kraft R innerhalb des Winkels $A'OA''$ liegen muss, den man erhält, wenn man den Punkt O mit den Punkten A' und A'' verbindet, welche in dem Abstande f von dem Stützpunkte A auf beiden Seiten liegen.

Coefficient der Walzenreibung.

Wenn die Bedingung (489) nicht erfüllt ist, so gerät die Walze in Bewegung, und zwar so als ob das Moment

$$R(r \sin \beta - f \cos \beta)$$

auf sie wirken würde. Dieser Ausdruck bezeichnet das Moment der Kraft R in Bezug auf den Punkt A'. In der That giebt f die Verschiebung an, welche die Axe der augenblicklichen Drehung beim Beginn des Rollens dadurch erfährt, dass die Körper nicht völlig starr sind. Man kann sich den Einfluss der rollenden Reibung auch so vorstellen, dass man die Körper als absolut starr betrachtet und ferner annimmt, die Walze sei in einer Horizontalebene durch $A'A''$ abgeschnitten und ein Streifen von der Breite $2f$ bilde die Stützfläche.

Ruhe auf einer horizontalen Unterlage.

Statt f kann man für eine Walze von gegebenem Radius r auch einen durch die Gleichung

$$\text{(490)} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{r}$$

definirten Reibungswinkel φ benützen (den Winkel $A'OA$ der Figur 402). Unter sonst gleichen Umständen ist die Tangente dieses Winkels (und also der Winkel selbst, wenn r nicht sehr klein ist) umgekehrt proportional dem Radius r der Walze.

Wenn R die Resultirende aus dem Gewichte G der Walze und einer Kraft P ist, welche mit OA den Winkel γ einschliesst (Fig. 403), so erhält man

$$R \cos \beta = G + P \cos \gamma,$$

$$R \sin \beta = P \sin \gamma,$$

und

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P \sin \gamma}{G + P \cos \gamma}.$$

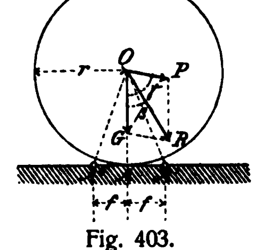


Fig. 403.

Damit die Walze in Bewegung gerate, muss $\gamma > \varphi$ sein und die Kraft P wenigstens die aus der Gleichung

$$\frac{P \sin \gamma}{G + P \cos \gamma} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{r}$$

sich ergebende Grösse

$$P = \frac{\sin \varphi}{\sin (\gamma - \varphi)} G \tag{491}$$

erreichen. Wenn P horizontal ist, so ergiebt sich

$$P = \frac{f}{r} G. \tag{492}$$

Wäre P horizontal und an dem höchsten Punkte der Walze angebracht (Fig. 404), so erhielte man als erforderlichen Wert von P, damit das Rollen beginne oder gleichförmig verlaufe,

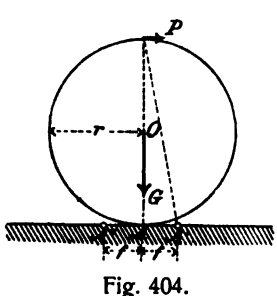
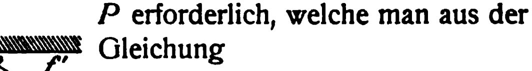


Fig. 404.

$$P = \frac{f}{2r} G. \tag{493}$$

P und G liefern dabei entgegengesetzt gleiche Momente in Bezug auf A'.

Wenn eine auf einer Walze ruhende Last Q längs einer horizontalen Unterlage verschoben werden muss (Fig. 405), so ist eine auf die Last wirkende horizontale Kraft P erforderlich, welche man aus der Gleichung



$$Pd = f'Q + f(Q + G) \tag{494}$$

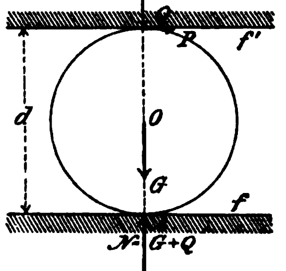


Fig. 405.

erhält, wo f und f' die Coefficienten der rollenden Reibung zwischen der Walze und der Unterlage und zwischen der Walze und der Last sind. Der Wert von P bleibt derselbe, wenn man statt einer Walze zwei oder mehrere benützt und unter G das totale Gewicht sämtlicher Walzen versteht.

Eine Walze auf einer schiefen Ebene.

Eine Walze befinde sich auf einer schiefen Ebene, deren Winkel mit der Horizontalebene gleich α sei (Fig. 406); auf sie wirke die Schwere G und eine Kraft P. Soll die Walze in Ruhe bleiben, so muss die Resultirende aus G und P innerhalb des Winkels $A'OA''$ liegen. Die Aufgabe wird in ähnlicher Weise behandelt wie im Falle der Ruhe eines Körpers auf der schiefen Ebene (§ 86 c). Wenn der Winkel α grösser als der Reibungswinkel φ der rollenden Reibung ist, so gerät die Walze unter dem Einflusse der eigenen Schwere in Bewegung.

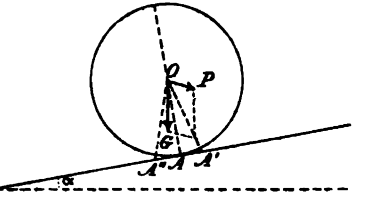


Fig. 406.

§ 105.

Anwendung des Satzes von der virtuellen Arbeit auf Probleme des Gleichgewichts mit Reibung.

Bei Aufgaben über das Gleichgewicht von Kräften, unter denen auch Reibungswiderstände vorkommen, kann oft der Satz von der virtuellen Arbeit (siehe Abschn. X) mit Vorteil benützt werden. Es handelt sich dabei immer um einen nicht freien Körper oder um ein System von mehreren Körpern, deren Beweglichkeit durch gewisse Bedingungen beschränkt ist (§ 82). Um den Satz anzuwenden, bestimmt man sowohl die normalen Reactionen als die Reibungswiderstände an den Stützpunkten, erteilt dem Körper oder Systeme von Körpern eine mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückung und setzt die Summe sämtlicher virtuellen Arbeiten gleich Null. In der so erhaltenen Gleichung treten ausser den gegebenen Kräften auch die unbekannten Normalreactionen auf, weil die Reibungswiderstände von ihnen abhängen. Ausser

der zu den geometrischen Bedingungen passenden virtuellen Verrückung muss man deshalb dem Körper oder System noch andere virtuelle Verrückungen erteilen, so dass man die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der Reactionen und zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen erhält, vorausgesetzt dass die Aufgabe lösbar ist. Man kann die Verschiebung eines Stützpunktes so wählen, dass sie senkrecht zu der Resultirenden aus der normalen Reaction N und dem Reibungswiderstande steht; die unbekannte Grösse N erscheint dann in der aufzustellenden Gleichung nicht; im allgemeinen gelingt es aber nicht in dieser Weise sämtliche unbekannte Normaldrücke zu eliminiren. Die angegebene Methode soll jetzt auf einige Beispiele angewandt werden.

1) Ein Stab vom Gewichte G lehnt sich mit dem einen Ende an eine verticale Ebene, an welcher Reibung stattfindet, und ruht ausserdem auf einer scharfen Kante A, wo die Reaction senkrecht zur Längsrichtung des Stabes ist (Fig. 407). Man bestimme die Grenzlagen des Gleichgewichtes.

Es sei a der Abstand des Schwerpunktes S des Stabes von dem Ende B, das sich an die verticale Ebene lehnt, b der Abstand des Punktes A von dieser Ebene und ν der Neigungswinkel des Stabes gegen die Horizontalebene. Der Druck bei A sei D, der normale Druck an der Verticalebene N. Für die Höhe z des Schwerpunktes S oberhalb einer durch A geführten Horizontalen erhält man den Ausdruck

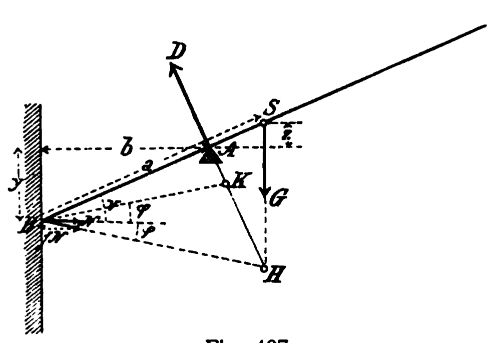


Fig. 407.

$$z = a \sin \nu - b \operatorname{tg} \nu.$$

Bei einer virtuellen Bewegung, die zu den geometrischen Bedingungen passt, findet man

$$\delta z = \left(a \cos \nu - \frac{b}{\cos^2 \nu}\right) \delta \nu. \tag{495}$$

Das Stabende B liegt in dem Abstande

$$y = b \operatorname{tg} \nu$$

unter der Horizontalen durch A. Wenn ν sich um $\delta\nu$ ändert, so ergiebt sich

$$\delta y = \frac{b}{\cos^2 \nu} \delta \nu. \tag{496}$$

Es werde zuerst der Fall betrachtet, dass der Stab unter dem Einflusse eines vollständig entwickelten, nach unten gerichteten Reibungswiderstandes fN in Ruhe verharrt. Bei der oben gewählten virtuellen Bewegung wird dann die Arbeit

$$fN \delta y - G \delta z$$

ausgeführt. Setzt man sie gleich Null und führt die Werte von δy und δz ein, so findet man

$$fN \frac{b}{\cos^2 \nu} - G\left(a \cos \nu - \frac{b}{\cos^2 \nu}\right) = 0. \tag{497}$$

Verschiebt man den Stab um das Stück $\triangle$ in seiner Längsrichtung, so erhält man mit Hülfe des Satzes von der virtuellen Arbeit

$$-G \sin \nu \,.\, \triangle + N \cos \nu \,.\, \triangle - fN \sin \nu \,.\, \triangle = 0,$$

d. h.

$$N = \frac{\cos \varphi \sin \nu}{\cos(\nu + \varphi)} G.$$

Wird dieser Wert in die Gleichung (497) eingeführt, so ergiebt sich nach einigen Transformationen zur Berechnung des betrachteten Grenzwertes ν_1 des Winkels ν die Gleichung

$$\cos^2 \nu_1 \cos(\nu_1 + \varphi) = \frac{b}{a} \cos \varphi. \tag{498}$$

Ändert man hier das Zeichen von φ, so erhält man für den Grenzwert ν_2 bei völlig entwickelter Reibung in der Richtung nach oben die Gleichung

$$\cos^2 \nu_2 \cos(\nu_2 - \varphi) = \frac{b}{a} \cos \varphi. \tag{499}$$

Das Gleichgewicht besteht für jeden Neigungswinkel ν, der die Bedingungen

$$\nu_1 \leqq \nu \gtreqless \nu_2$$

erfüllt.

Um zu erkennen, ob eine gegebene Lage des Stabes eine Gleichgewichtslage sei, zieht man durch den Stützpunkt B die beiden Gera-

den BH und BK, welche mit der Normalen zur Stützebene den Reibungswinkel φ einschliessen, trägt die Schnittpunkte H und K mit der Richtungslinie des Druckes in A ab und untersucht, ob die Verticale durch den Schwerpunkt S das Stück HK trifft. Wenn dies der Fall ist, so findet Gleichgewicht statt.

Setzt man in den Gleichungen (498) und (499) $\varphi = 0$, d. h. nimmt man an, dass die verticale Stützebene vollkommen glatt sei, so erhält man eine einzige Gleichgewichtslage, welche durch die Gleichung

$$\cos v = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \tag{500}$$

bestimmt ist. (Vergl. das Beispiel 11 auf p. 440).

2) *Auf einen Körper, welcher sich auf einer horizontalen Unterlage befindet, wirke eine verticale Druckkraft N, welche durch den Schwerpunkt der Stützfläche gehe, und ein Kräftepaar mit verticaler Axe und dem Momente M. Man stelle die Bedingungen des Gleichgewichtes auf.*

Der Inhalt der Stützfläche sei F. Weil der Druck N sich gleichförmig auf die Fläche verteilt, so wirkt auf jede Flächeneinheit ein normaler Druck

$$p = \frac{N}{F} \tag{501}$$

und auf das Flächenelement dF der Druck

$$p\,dF.$$

Diesem Drucke entspricht ein grösst möglicher Reibungswiderstand $fp\,dF$. Es werde angenommen, dass der Reibungscoefficient f in allen Punkten der Stützfläche derselbe sei. Man wähle in der Stützfläche ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η mit dem Anfangspunkte in deren Schwerpunkte O (Fig. 408).

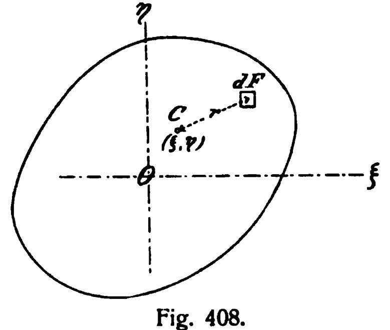


Fig. 408.

Jede Bewegung des Körpers ist eine ebene Bewegung, und besteht nach § 22 in jedem Augenblicke in einer Drehung um irgend einen Pol C. Als virtuelle Bewegung nehme man deshalb eine Drehung von der Grösse δv um den Punkt C an. (Würde es in der Stützfläche einen festen Punkt geben, so würde C damit zusammenfallen). Bei der Drehung liefert das Kräftepaar eine virtuelle Arbeit, deren absoluter

Betrag $|M\delta v|$ ist. Die Reibungswiderstände, welche senkrecht zu den zugehörigen Radien r vom Pol C sind, liefern eine virtuelle Arbeitssumme, deren absoluter Betrag höchstens gleich $|\delta v| fp\int r dF$ ist, wo das Integral über die ganze Stützfläche erstreckt werden muss. Bezeichnet man mit ε eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl, einschliesslich der Grenzwerte, so erhält man mit Hülfe des Satzes von der virtuellen Arbeit die Gleichung

$$M\delta v + \varepsilon\delta v\, fp\int r\, dF = 0$$

oder

$$M + \varepsilon fp\int r\, dF = 0. \tag{502}$$

Diese Gleichung muss für irgend einen Wert von ε erfüllt sein, wie auch der Punkt C gewählt werde. (Wenn C fest ist, so braucht man nur diesen einen Punkt zu betrachten).

Die Function

$$V = p\int r\, dF \tag{503}$$

heisst Reibungsfunction und hängt von den Coordinaten ξ und η des Punktes C ab. Um das grösst mögliche Moment M zu erhalten, welches ohne Störung des Gleichgewichtes auf den Körper wirken kann, muss man das Minimum von V aufsuchen und in der Gleichung (502) $|\varepsilon| = 1$ wählen. Dabei ergiebt sich der Satz:

Reibungsfunction.

Das Moment M darf dem absoluten Werte nach nicht das Product aus dem Reibungscoefficienten und dem kleinsten Werte der Reibungsfunction übersteigen.

Zur Bestimmung der Coordinaten ξ und η des Pols C, in Bezug auf welchen die Reibungsfunction ein Minimum wird, dienen die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \text{ und } \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0. \tag{504}$$

Dieser Punkt heisst Reibungscentrum. In einigen Fällen erhält man das Reibungscentrum unmittelbar, ohne Anwendung der Gleichungen (504). Dies ist immer der Fall, wenn die Stützfläche zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen besitzt (Fig. 409). Das Reibungs-

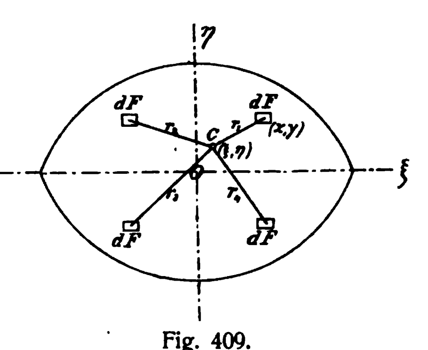


Fig. 409.

centrum fällt mit dem Schnittpunkte O beider Axen zusammen, der zugleich der Schwerpunkt der Fläche F ist. Um dies einzusehen, wähle man vier in Bezug auf die Axen symmetrisch liegende und gleich grosse Flächenelemente. Sie liefern zu $\int r dF$ den Beitrag

$$(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)\, dF$$

und dieser Ausdruck wird gleichzeitig mit $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ein Minimum, d. h. wenn C mit O zusammenfällt.

Quadratische Stützfläche. Bei einer quadratischen Stützfläche ist das Reibungscentrum der Mittelpunkt des Quadrates. Um den entsprechenden kleinsten Wert der Reibungsfunction zu berechnen, benützt man die für einen Kreissector vom Radius ϱ und dem Centriwinkel α geltende Formel

$$\int r\, dF = \int_0^\varrho r \alpha r\, dr = \tfrac{1}{3} \alpha \varrho^3, \tag{505}$$

wo die Radien r vom Mittelpunkte des Kreises aus gerechnet werden (Fig. 410). Das Quadrat zerfällt in acht gleiche Dreiecke, welche durch die vier Symmetrieaxen der Figur von einander getrennt sind (Fig.

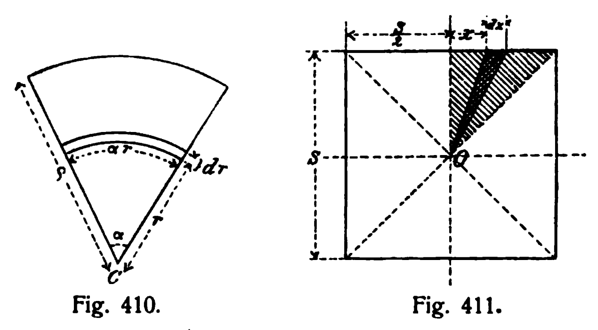


Fig. 410. Fig. 411.

411). Einem an einem dieser Dreiecke gewählten Stücke dx der Seite des Quadrats entspricht ein sectorenförmiges Element, für das man

$$\varrho = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4} s^2},$$

$$\alpha \varrho = \frac{\frac{s}{2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4} s^2}}\, dx$$

und

$$\tfrac{1}{3} \alpha \varrho^3 = \frac{s}{6} \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4} s^2}\, dx$$

erhält. Für das ganze Dreieck findet man dann

$$\int r\,dF = \frac{s}{6}\int_0^{\frac{1}{2}s}\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}s^2}\,dx$$

und für das Quadrat

$$\int r\,dF = \frac{4}{3}s\int_0^{\frac{1}{2}s}\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}s^2}\,dx.$$

Das unbestimmte Integral ist

$$\int\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}s^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}s^2}+\frac{s^2}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}s^2}\right)+C,$$

und für das bestimmte Integral ergiebt sich

$$\int r\,dF = \frac{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)}{6}s^3 = 0.3826\,s^3.$$

Als grössten absoluten Wert von M erhält man also für einen gegebenen Druck N

$$|M| = fp\int r\,dF = \frac{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)}{6}fNs = 0.3826\,fNs. \tag{506}$$

Dieselbe Methode ist noch anwendbar, wenn die Stützfläche des Körpers durch eine Anzahl Stützpunkte ersetzt wird. Bezeichnet man die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein in ihrer Horizontalebene liegendes Coordinatensystem mit $x_1 y_1,\ x_2 y_2 \ldots x_n y_n$, die in ihnen wirkenden normalen Drücke mit $N_1,\ N_2 \ldots N_n$, so ist die Reibungsfunction

Einzelne Stützpunkte.

$$\begin{aligned} V = N_1\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2}+\ldots+N_n\sqrt{(\xi-x_n)^2+(\eta-y_n)^2} = \\ = \Sigma N\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}. \end{aligned} \tag{507}$$

Dieser Ausdruck soll zu einem Minimum in Bezug auf ξ und η gemacht werden.

3) ***Ein Körper wird gegen eine Horizontalebene mit Hülfe einer verticalen Kraft N gepresst, welche durch den Schwerpunkt der Stützfläche geht. Auf den Körper wirkt ausserdem eine horizontale Kraft P. Die Bedingungen des Gleichgewichts sollen aufgestellt werden.***

Die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P in Bezug auf die $\xi\eta$-Axen seien a und b; der Winkel zwischen P und der positiven

ξ-Axe sei α. Bei einer Drehung des Körpers im positiven Sinne um den Winkel $\delta\nu$ um den Drehpunkt (ξ, η) liefert P die virtuelle Arbeit

$$P\left\{(a-\xi)\sin\alpha-(b-\eta)\cos\alpha\right\}\delta\nu.$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten der Reibungswiderstände kann man in die Form (vergl. p. 605) bringen

$$\delta\nu\,.\,\varepsilon f\frac{N}{F}\int r\,dF=\delta\nu\,.\,\varepsilon fp\int r\,dF,$$

wo die Bezeichnungen dieselben wie auf p. 605 sind und das Integral über die ganze Reibungsfläche erstreckt werden muss. Der Satz von der virtuellen Arbeit liefert jetzt die Gleichung

$$P\left\{(a-\xi)\sin\alpha-(b-\eta)\cos\alpha\right\}+\varepsilon fp\int r\,dF=0; \tag{508}$$

und zwar muss diese Gleichung für alle möglichen Werte der Coordinaten ξ und η des Drehpunktes und für irgend einen entsprechenden Wert von ε erfüllt werden.

Die Reibungsfunction ist

$$V=p\int r\,dF \tag{509}$$

wie vorher. Es werde die Bezeichnung

$$\Phi=\frac{V}{(a-\xi)\sin\alpha-(b-\eta)\cos\alpha} \tag{510}$$

benützt. Bei gegebenen Werten von a, b und α soll das Minimum von Φ in Bezug auf ξ und η berechnet werden. Die Kraft P darf höchstens gleich dem Product aus diesem Minimiwerte und dem Reibungscoefficienten sein. Wenn die Function Φ mehrere analytische Minima besitzt, so muss man das numerisch kleinste unter ihnen wählen. Derjenige Punkt (ξ, η), für welchen es vorkommt, heisst Reibungscentrum in Bezug auf die im Punkte (a, b) angreifende Kraft P von der Richtung α.

Curve der Reibungscentra.

Wenn die Kraft P sich um den Punkt (a, b) dreht, so bewegt sich das Reibungscentrum längs einer Curve der Ebene, welche Curve der Reibungscentra für den Punkt (a, b) als Angriffspunkt der Kraft P heisst. Einer bestimmten Lage des Reibungscentrums und einem dazu gehörenden Winkel α entspricht ein Maximum der Kraft P. Dieser maximale Wert werde als eine Strecke von dem Punkte (a, b) aus abgetragen. Wenn α sich ändert, so beschreibt der andere Endpunkt dieser Strecke eine geschlossene Curve um (a, b). Das Gebiet

innerhalb dieser Curve heisst Gleichgewichtsgebiet der Kraft P für den Punkt (a, b) als Angriffspunkt und giebt eine Vorstellung von dem Einflusse der Reibungswiderstände für verschiedene Werte des Winkels α.

Gleichgewichtsgebiet.

Die Coordinaten des Reibungscentrums bilden ein System von Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0.$$

Mit Berücksichtigung des Ausdruckes (510) gehen diese Gleichungen über in

$$\{(a - \xi)\sin\alpha - (b - \eta)\cos\alpha\}\frac{\partial V}{\partial \xi} + V\sin\alpha = 0,$$

$$\{(a - \xi)\sin\alpha - (b - \eta)\cos\alpha\}\frac{\partial V}{\partial \eta} - V\cos\alpha = 0.$$

Sie sind äquivalent den beiden Gleichungen

$$(511) \qquad \begin{aligned} &V + (a - \xi)\frac{\partial V}{\partial \xi} + (b - \eta)\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial \eta}\sin\alpha = 0, \end{aligned}$$

die man ohne Mühe aus ihnen ableitet. Die erste Gleichung (511) ist unabhängig von dem Winkel α und stellt somit die Gleichung der Curve der Reibungscentra in Bezug auf den Punkt (a, b) dar.

Wenn der Punkt (a, b) mit dem Schwerpunkte der Stützfläche F zusammenfällt, so sucht die Kraft P nur eine Parallelverschiebung des Körpers zu Stande zu bringen; in dem Gleichgewichtszustande darf sie höchstens die Grösse fN haben. Das Gleichgewichtsgebiet ist in diesem Falle ein Kreis um den Schwerpunkt als Mittelpunkt und mit dem Radius fN; weil eine Translation als eine Drehung um einen unendlich entfernten Drehpunkt betrachtet werden kann, so ist die Curve der Reibungscentra die unendlich ferne Gerade der Ebene.[1]

4) *Reibung eines Kolbens an der Cylinderwand.*

Auf den Kolben, dessen Radius R sei, wirke eine Kraft P längs der Cylinderaxe und ein Drehmoment M senkrecht zu dieser Axe

[1] Für ein eingehendes Studium der Anwendungen der Reibungsfunction werde auf das „Lehrbuch der technischen Mechanik“ von L. Henneberg und O. Smreker verwiesen.

(Fig. 412). Ausserdem wirken auf den Kolben ein normaler Druck und ein Reibungswiderstand an der Cylinderwand. Es werde angenommen, dass der normale Druck überall derselbe und gleich p sei. Die allgemeinste virtuelle Verrückung des Kolbens besteht aus einer Parallelverschiebung um das Stück δs in der Richtung von P und einer Drehung um den Winkel δv im Sinne des Momentes M. Die Summe der virtuellen Arbeiten von P und M ist dabei

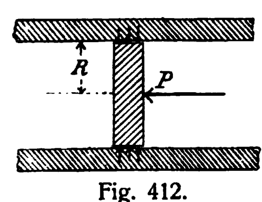


Fig. 412.

$$P\delta s + M\delta v.$$

Ein Punkt des Kolbenumfangs beschreibt den kleinen Weg

$$\sqrt{\delta s^2 + R^2\,\delta v^2}.$$

Für ein Flächenelement dF ergiebt sich eine von der unvollständig entwickelten Reibung ausgeführte virtuelle Arbeit

$$\varepsilon f p \sqrt{\delta s^2 + R^2\,\delta v^2}\,dF \qquad (-1 \leqq \varepsilon \leqq +1).$$

Bezeichnet man die Summe sämtlicher Normaldrücke mit

(512) $$N = pF,$$

so erhält man mit Hülfe des Satzes von der virtuellen Arbeit

(513) $$P\delta s + M\delta v + \varepsilon f N \sqrt{\delta s^2 + R^2\,\delta v^2} = 0.$$

Es werde ein Winkel μ vermittelst der Gleichungen

$$\cos\mu = \frac{\delta s}{\sqrt{\delta s^2 + R^2\,\delta v^2}},$$

$$\sin\mu = \frac{R\delta v}{\sqrt{\delta s^2 + R^2\,\delta v^2}}$$

eingeführt. Die Gleichung (513) geht dann in

(514) $$PR\cos\mu + M\sin\mu + \varepsilon f N R = 0$$

über; sie muss für jeden Wert von μ erfüllt sein. Ausser dem Winkel μ führt man zweckmässig noch einen durch die Gleichungen

$$\cos\nu = \frac{PR}{\sqrt{P^2R^2 + M^2}},$$

$$\sin\nu = \frac{M}{\sqrt{P^2R^2 + M^2}}$$

definirten Winkel ν ein und erhält

$$(515) \qquad \sqrt{P^2R^2 + M^2}\cos(\mu - \nu) + \varepsilon fNR = 0.$$

Diese Gleichung muss für einen beliebigen Wert von $\mu - \nu$ erfüllt sein. Dazu ist erforderlich, dass die Ungleichheit

$$(516) \qquad \sqrt{P^2R^2 + M^2} \leqq fNR$$

erfüllt sei; sie enthält die Gleichgewichtsbedingung.

Wählt man speciell $M = 0$, so findet man $P \leqq fN$; und macht man $P = 0$, so folgt $M \leqq fNR$.

§ 106.

Übungsaufgaben zur Lehre von der Reibung.

1) Ein Schlitten mit 500 kg Belastung wird bei guter Schlittenbahn ($f = 0.08$) 250 m längs eines horizontalen Weges und nachher längs eines ebenso langen Stückes mit einer Steigung von 1:20 hinaufgezogen. Welche Zugkraft ist in den beiden Fällen erforderlich, wenn das Zugseil um 25° gegen den Boden geneigt ist; wie gross ist die totale Arbeit und wie verteilt sie sich auf die beiden Hälften des Weges?

2) Ein Körper vom Gewichte G befindet sich im Gleichgewichte auf einer schiefen Ebene unter dem Einfluss seiner Schwere, der Reibung und einer mit dem Gewicht gleich grossen Kraft G. Welche Richtungen kann diese Kraft annehmen?

3) Ein homogener, überall gleich dicker Stab lehnt sich mit seinen Enden an zwei schiefe Ebenen, für welche der Reibungscoefficient den nämlichen Wert hat. Man bestimme das Intervall des Neigungswinkels des Stabes gegen die Horizontalebene.

4) Man bestimme graphisch und analytisch das Intervall $E_1 E_2$ in § 87, wenn der Reibungscoefficient an den beiden Stützebenen verschiedene Werte hat.

5) Ein homogenes, überall gleich dickes Lineal liegt innerhalb eines Kreisbogens in einer Verticalebene. Man berechne die Neigung des Lineals in der Grenzlage des Gleichgewichts.

6) Ein Stab durchdringt zwei Ebenen, welche wie in der Figur 413 geneigt sind, und lehnt sich an die Aussenseiten der Ebenen. Unter der Voraussetzung gleicher Reibung an beiden Ebenen untersuche man die Bedingungen des Gleichgewichtes, wenn der Stab in einem Punkte belastet ist.

7) Eine quadratische Platte $ABCD$ in einer Verticalebene (Fig. 414) lehnt sich längs der Seite AD an eine verticale Wand und bei

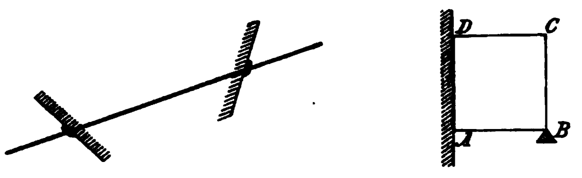


Fig. 413. Fig. 414.

B an eine horizontale Kante. Längs der Wand und an der Kante findet Reibung mit demselben Reibungscoefficienten f statt. Man berechne den kleinsten erforderlichen Wert von f.

8) Eine Person versucht eine Schublade auszuziehen, welche mit zwei symmetrisch angeordneten Handhaben versehen ist, und wendet dabei eine zur Vorderseite der Schublade senkrechte an der einen Handhabe angebrachte Kraft an. Wann gelingt dies?

9) Ein Cylinder liegt zwischen zwei Ebenen, welche unter demselben Winkel gegen die Horizontalebene geneigt sind und sich längs einer horizontalen Kante schneiden. Welchen horizontalen Druck muss man auf die Ebenen anbringen, damit der Cylinder in Bewegung gerate?

10) Drei gleich grosse Kugeln liegen auf einer Horizontalebene und berühren einander. Wie gross muss der Reibungscoefficient sein, damit man noch eine vierte gleiche Kugel auf die anderen legen könne?

11) Bei einer Frictionsverbindung ist ein Keil vom Keilwinkel 2α zwischen zwei Constructionsteilen eingeschlagen, an welchen ein Druck P übertragen wird, welcher senkrecht zur Symmetrieebene des Keiles ist. Welche Kraft muss man am Keil anbringen, um die Verbindung zu lösen? ($\varphi > \alpha$).

12) Ein gewichtsloser, in einem Punkte belasteter Stab lehnt sich an zwei Zapfen, und zwar an die obere Seite des einen und untere Seite des anderen Zapfens. Man untersuche die Bedingungen des Gleichgewichtes am Stabe.

13) Man bestimme die gefährliche Gleitfuge eines unbelasteten kreisförmigen Gewölbes von 120° Centriwinkel.

14) Welches ist der kleinste Wert des Quotienten $\frac{c}{r}$ (p. 503) am scheitrechten Gewölbe, wenn die Stützlinie innerhalb des mittleren Drittels des Gewölbedurchschnitts liegen soll, die äussersten Fugenflächen einen Winkel von 100° mit einander einschliessen und der Reibungscoefficient des Mörtels den Wert 0.52 hat?

15) Die Widerlagermauer eines Gewölbes ruht auf einer horizontalen Unterlage (Fig. 415) und wird an einer seitlichen Verschiebung durch eine Reibung mit dem Coefficienten f gehindert. Das Gewicht der Mauer ist G, dasjenige der einen Gewölbehälfte Q und der Horizontaldruck H. Man zeige, dass die Bedingung der Stabilität der Mauer gegen Gleiten

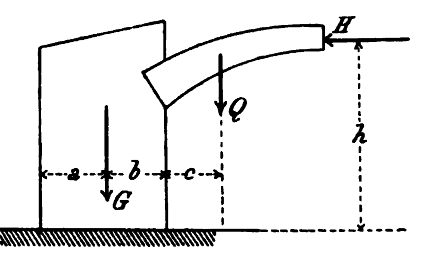


Fig. 415.

$$H < f(Q + G)$$

und gegen Kippen

$$Qc - Gb < Hh < Q(a + b + c) + Ga$$

ist.

16) Man bestimme die Grenzen des Horizontaldruckes an einem unbelasteten Systeme von verticalen Platten, wenn die Begrenzungscurven zwei Parabeln sind, die Dicke am Scheitel c und an den Widerlagern $2c$ beträgt.

17) Ein Ring vom Gewichte G, welcher in einem Punkte durch das Gewicht Q belastet ist, ruht auf einem cylindrischen Axenzapfen. Man bestimme die Gleichgewichtslage, wenn der Zapfen rotirt.

18) Die Figur 416 stellt schematisch die einfachste Anordnung der Backenbremse dar. Man leite die Beziehung

$$P = \frac{b - fc}{fa} \frac{r}{R} Q$$

zwischen der Kraft P beim Bremsen und der Last Q ab.

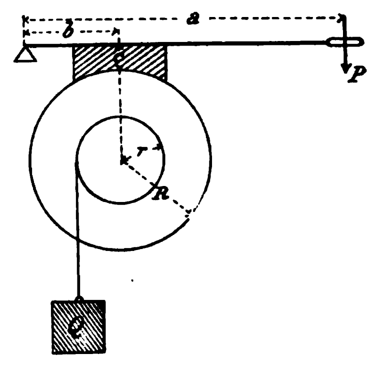


Fig. 416.

19) Man berechne das Reibungsmoment an einem abgestumpften kegelförmigen Stützzapfen mit Reibung in der Endfläche.

20) Von drei cylindrischen Zahnrädern A, B und C ist A grösser als B und B grösser als C. A und B haben äusseren, B und C inneren Eingriff. Man berechne für gegebene Teilkreise und Zahnteilungen

das einem bestimmten Lastmoment bei C entsprechende Kraftmoment bei A.

21) Eine horizontale Walze vom Radius r ruht mit ihren an den Enden angebrachten cylindrischen Zapfen vom Radius ϱ in gleichen Zapfenlagern. In der Mitte befindet sich eine Last Q am Umfang der Walze und eine Scheibe vom Radius R. Auf der Scheibe ruht ein zur Walze senkrechter horizontaler Balken vom Gewichte G, welcher ausserdem an dem einen Ende unterstützt ist. Der Balken wird in seiner Längsrichtung gezogen und die Last Q mit Hülfe der Reibung zwischen der Scheibe und des Balkens dabei gehoben. Das Gewicht G liegt zwischen dem kleinsten erforderlichen Werte, wenn die Mitte des Balkens auf der Scheibe ruht, und dem kleinsten Werte, wenn das eine Ende des Balkens auf der Scheibe ruht. Man berechne die Grenzlage des Balkens 1) wenn die Zapfenreibung vernachlässigt und 2) wenn sie in Betracht gezogen wird.

22) An einer Schraubenhebewinde mit dem Wirkungsgrad $\eta = 0.3$ ist die Steigung der Schraube 7 mm und die effective Länge des Hebels 85 cm. Wie gross ist die Last, die ein Mann damit heben kann, wenn er am Hebel im Mittel einen Druck von 15 kg ausübt?

23) Man berechne den Wirkungsgrad einer Differentialschraube, an welcher die Steigungswinkel des inneren und äusseren Gewindes 20° und 8°, ihre Radien 2.5 cm und der Reibungscoefficient den Wert $f = 0.07$ hat. Wie gross ist die Last, die ein Mann damit heben kann, wenn er mit einer Kraft von 15 kg an einem Hebel von 0.9 m Länge arbeitet?

24) Wie gross ist der Druck, den man mit Hülfe einer scharfgängigen Klemmschraube ausüben kann, wenn der mittlere Radius 26.5 mm, die Steigung 6.4 mm und der Kantenwinkel ($= 180° - 2\beta$ in § 99 B) 55° ist, wenn man ferner eine Kraft von 20 kg am Ende eines 0.4 m langen Schraubenschlüssels anwendet, und der Reibungscoefficient den Wert $f = 0.15$ hat?

25) Mit Hülfe einer einfachen Bandbremse (§ 101, 2) wird eine Last von 1 Tonne heruntergelassen. Der Radius der Welle ist 10 cm, der Bremsscheibe 35 cm, das Längenverhältnis der Hebelarme 8 cm; der Bremsband umfasst $\frac{8}{10}$ des Umfanges der Scheibe. Welche Kraft ist an der Handhabe des Hebels erforderlich, wenn $f = 0.18$ ist und die Drehungsrichtung die vorteilhaftere ist?

26) Wie gross ist die Last, die man mit Hülfe einer Differentialbremse (§ 101, 3) bremsen kann, bei welcher $r = 10$ cm, $R = 30$ cm $a = 75$ cm, $b = 20$ cm, $c = 12$ cm, $\alpha = \frac{6}{5}\pi$, $f = 0.18$ und die Bremskraft 8 kg ist?

27) Wie schwere Fahrzeuge können fünf Mann (20 kg Zugkraft

pro Mann) längs eines Hellings mit der Neigung 1 auf 15 aufwinden, wenn der Reibungscoefficient 0.08 ist 1) wenn sie ein einziges Tau benützen oder 2) wenn sie einen sechsschnittigen Flaschenzug von dem Wirkungsgrad $\eta = 0.55$ anwenden?

28) Bei einem Differentialflaschenzug haben die zusammengegossenen Scheiben die Radien $R = 90$ mm und $r = 80$ mm. Der Wirkungsgrad ist $\eta = 0.49$. Wie gross ist die Last, die man mit einer Triebkraft von 20 kg heben kann?

29) Ein Mann lässt unter Anwendung einer Kraft von 15 kg eine 200 kg schwere Last herunter, und wendet dabei eine lose Rolle ($\eta =$ 0.52) an, dessen Seil um einen runden Holzblock ($f = 0.3$) geschlungen ist. Wie viele Male muss das Seil um den Block geschlungen sein?

30) Ein horizontaler, gleichdicker und homogener Stab ruht auf zwei cylindrischen Walzen mit horizontalen, parallelen Axen, welche senkrecht zur Längsrichtung des Stabes sind (Fig. 417). Die Walzen werden mit derselben Winkelgeschwindigkeit in den Richtungen gedreht, welche die Figur zeigt. Man beweise, dass der Stab dabei eine einfache oscillirende Bewegung annimmt (wenn er nicht symmetrisch auf den Walzen liegt und gar nicht in Bewegung kommt) und berechne die Schwingungszeit der Bewegung.

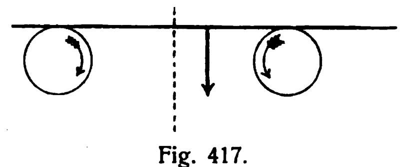


Fig. 417.

31) Ein Körper ruht in drei Punkten, welche die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes sind, auf einer horizontalen Unterlage. Die Drücke in den drei Punkten sind gleich gross. Welches in einer horizontalen Ebene liegende Kräftepaar ist erforderlich, um den Körper in Bewegung zu versetzen?

32) Ein Körper ruht in zwei Punkten A und B auf einer horizontalen Unterlage und wird durch eine verticale Kraft N, welche die Gerade AB schneidet, gegen die Unterlage gepresst. Man bestimme die Curve der Reibungscentra, wenn der eine Stützpunkt den Angriffspunkt einer horizontalen Kraft P bildet.

Vierter Teil.

Dynamik der starren Körper.

Zwölfter Abschnitt.

Die Lehre vom Trägheitsmoment.

§ 107.

Das Trägheitsmoment der Körper in Bezug auf Axen, Punkte und Ebenen.

In der Dynamik der starren Körper sind die sog. Trägheitsmomente der Körper von grosser Bedeutung. Zweckmässigerweise beginnt man deshalb die Dynamik mit der Behandlung dieser Trägheitsmomente.

Definition des Trägheitsmomentes.

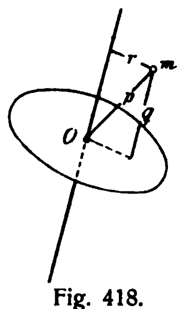


Fig. 418.

Unter dem Trägheitsmoment eines materiellen Punktes in Bezug auf eine Axe, einen Punkt oder eine Ebene versteht man das Product aus der Masse des Punktes und dem Quadrate seiner Entfernung von der Axe, dem Punkte oder der Ebene.

Es sei m die Masse des materiellen Punktes, r sein Abstand von der Axe, p von dem Punkte und q von der Ebene (Fig. 418). Die drei Trägheitsmomente sind alsdann bez.

$$mr^2,\ mp^2 \text{ und } mq^2.$$

Unter dem Trägheitsmoment eines materiellen Punktsystems (oder eines materiellen Körpers) in Bezug auf eine Axe, einen Punkt oder eine Ebene versteht man die Summe sämtlicher Producte aus der Masse eines Punktes und dem Quadrate seiner Entfernung von der Axe, dem Punkte oder der Ebene.

Die drei Trägheitsmomente sind also bez.

$$\Sigma(mr^2),\ \Sigma(mp^2) \text{ und } \Sigma(mq^2),$$

wo die Summen über das ganze System erstreckt werden müssen.

Einheit des Trägheitsmomentes.

Die Trägheitsmomente sind positive Grössen. Ihre Einheit ist

$$\text{Masseneinh.}\ (\text{Längeneinh.})^2$$

oder in dem technischen Masssysteme (p. 166)

$$\text{Krafteinh.} \times \text{Längeneinh.} \times (\text{Zeiteinh.})^2,$$

z. B. kg m Sec.^2.

Beziehungen zwischen Trägheitsmomenten verschiedener Art.

Unter den Trägheitsmomenten in Bezug auf Axen, Punkte und Ebenen haben die zuerst genannten die grösste Bedeutung bei den Anwendungen. In gewissen Fällen können jedoch die beiden letzteren Arten einfacher berechnet und die axialen Trägheitsmomente mit Hülfe derselben abgeleitet werden. Das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt heisst auch polares Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe ist gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen durch diese Axe. Denn bezeichnet man die Abstände des Punktes mit der Masse m

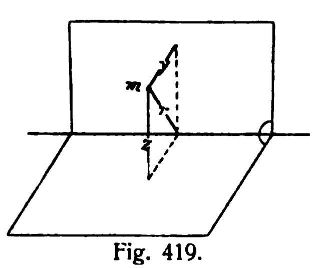


Fig. 419.

(Fig. 419) von den beiden Ebenen mit y und z, von ihrer Schnittlinie mit r, so erhält man

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

$$mr^2 = my^2 + mz^2$$

und

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(my^2) + \Sigma(mz^2). \tag{517}$$

Das polare Trägheitsmoment. in Bezug auf einen Punkt O ist gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen durch O. Denn bezeichnen x, y und z die Abstände eines Punktes von den drei Ebenen, p den Abstand von O, so ergiebt sich

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$mp^2 = mx^2 + my^2 + mz^2$$

und

$$\Sigma(mp^2) = \Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2) + \Sigma(mz^2). \tag{518}$$

Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen Punkt O ist gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf eine Ebene durch O und eine senkrecht zu dieser Ebene durch O geführte Axe.

Trägheitsradius. Im folgenden werde das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe mit K bezeichnet, also

$$K = \Sigma(mr^2).$$

Es sei $M = \Sigma m$ die Gesamtmasse des Systems; man setze

$$K = Mk^2; \tag{519}$$

die durch diese Gleichung bestimmte Grösse k, welche eine Länge ist, heisst Trägheitsradius des Systems in Bezug auf die betrachtete Axe. Die Gleichung (519) zeigt, dass *das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe gleich dem Trägheitsmomente der Gesamtmasse des Systems ist, wenn man sie in einem Punkte concentrirt, dessen Abstand von der Axe gleich dem Trägheitsradius ist.* Anstatt die ganze Masse in einem

Punkte zu concentriren, kann man sie sich auch auf einer Kreisperipherie ausgebreitet denken, deren Radius k ist und welche die betrachtete Gerade zur Axe hat.

Reducirte Masse.

Es sei K das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe; man nehme eine Länge l an und bestimme eine Grösse μ mit Hülfe der Gleichung

$$K = \mu l^2; \tag{520}$$

μ heisst die auf den Abstand l reducirte Masse. Verlegt man die Masse μ in dem Abstande l von der Axe, so liefert sie das Trägheitsmoment K des Systems.

Gemäss den Gleichungen (519) und (520) ist die auf den Abstand k, d. h. den Trägheitsradius, reducirte Masse gleich der wirklichen Masse des Systems.

Die Hauptaufgabe in der Lehre von den Trägheitsmomenten ist die Berechnung des Trägheitsmomentes eines gegebenen Massensystems in Bezug auf eine beliebige Axe des Raumes. Dabei benützt man zwei Lehrsätze, von welchen der erste lautet:

Trägheitsmomente in Bezug auf parallele Axen.

Das Trägheitsmoment eines materiellen Systems in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich der Summe des Trägheitsmomentes in Bezug auf die dieser Axe parallele Axe durch den Schwerpunkt und des Productes, das man erhält, wenn man die Masse des Systems mit dem Quadrate der gegenseitigen Entfernung beider Axen multiplicirt.

Bezeichnet man die Abstände eines Punktes mit der Masse m von der gegebenen Axe und von der Axe durch den Schwerpunkt S mit r' und r (Fig. 420), so sind die beiden Trägheitsmomente

Fig. 420.

$$K' = \Sigma(mr'^2); \; K = \Sigma(mr^2).$$

Ist ferner x der Abstand des Punktes m von einer Ebene, welche durch S senkrecht zu der Ebene der beiden pa-

rallelen Axen gelegt wird, und d der gegenseitige Abstand dieser beiden Axen, so ergiebt sich nach einem bekannten geometrischen Satze

$$r'^2 = r^2 + d^2 + 2\,xd.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit m und bildet die auf das ganze System erstreckte Summe, so findet man

$$\Sigma(mr'^2) = \Sigma(mr^2) + d^2\Sigma m + 2d\Sigma(mx).$$

$\Sigma(mx)$ bezeichnet das Massenmoment des Systems in Bezug auf eine Ebene, welche den Schwerpunkt enthält, und ist also gleich Null. Somit folgt

$$K' = K + Md^2, \tag{521}$$

w. z. b. w.

Weil der Ausdruck Md^2 positiv ist, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsaxe kleiner als das Trägheitsmoment in Bezug auf jede dazu parallele Axe.

Trägheitsmomente in Bezug auf verschiedene Axen durch einen Punkt.

Der zweite Satz oder die entsprechende Gleichung bezieht sich auf die Trägheitsmomente in Bezug auf verschiedene Axen durch denselben Punkt O. Man wähle drei zu einander senkrechte Coordinatenaxen mit O als Anfangspunkt (Fig. 421), und berechne das Trägheitsmoment K in Bezug auf eine Axe durch O, deren Richtungswinkel α, β und γ seien. Es sei r die Länge einer Senkrechten von dem Massenpunkte m mit den Coordinaten x, y und z auf diese Axe, N der Fusspunkt der Senkrechten. Bezeichnet

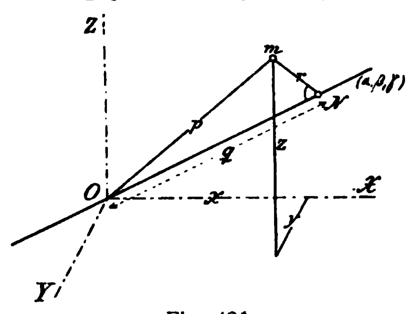


Fig. 421.

man noch die Längen Om mit r und ON mit q, so findet man

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$q^2 = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

$$r^2 = p^2 - q^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Weil

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

ist, so erhält man noch

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$- (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \cos^2\alpha\, (y^2 + z^2) +$$

$$+ \cos^2\beta\, (z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\, (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \,.\, yz$$

$$- 2 \cos \gamma \cos \alpha \,.\, zx - 2 \cos \alpha \cos \beta \,.\, xy.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit m und bildet die Summe für alle Massen des Systems, so folgt

$$K = \cos^2\alpha\, \Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\, \Sigma m(z^2 + x^2) +$$

$$+ \cos^2\gamma\, \Sigma m(x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma\, \Sigma(myz)$$

$$- 2 \cos \gamma \cos \alpha\, \Sigma(mzx) - 2 \cos \alpha \cos \beta\, \Sigma(mxy).$$

Es mögen die abkürzenden Bezeichnungen

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2),\ B = \Sigma m(z^2 + x^2),\ C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

(522)

$$D = \Sigma(myz),\ E = \Sigma(mzx),\ F = \Sigma(mxy)$$

eingeführt werden. A, B und C sind die Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf die drei Coordinatenaxen, D, E und F heissen Centrifugalmomente; sie sind Grössen derselben Art wie die Trägheitsmomente, brauchen aber nicht positiv zu sein, sondern können auch negativ werden und den Wert Null annehmen. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe mit den Richtungswinkeln α, β und γ ist nunmehr

$$(523) \qquad K = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$- 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta$$

und hängt also von den sechs Constanten A, B, C, D, E und F ab.

Trägheitsellipsoid. Die Formel (523) kann bei einer zweckmässigen Wahl des Coordinatensystems vereinfacht werden. Zu diesem Zwecke empfiehlt sich eine geometrische Veranschaulichung der Trägheitsmomente in Bezug auf Axen durch einen Punkt O. Man trage auf jeder Axe nach beiden Seiten von O aus eine Strecke ϱ ab, welche umgekehrt proportional dem Trägheitsradius k für diese Axe ist, d. h. man setze

$$(524) \qquad \varrho = \frac{\lambda^2}{k} = \lambda^2 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}},$$

wo λ eine beliebig gewählte Länge ist. Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Endpunktes H der abgetragenen Strecke. Man hat also

$$\xi = \varrho\cos\alpha, \quad \eta = \varrho\cos\beta, \quad \zeta = \varrho\cos\gamma.$$

Substituirt man die hieraus sich ergebenden Werte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ in die Gleichung (523), so findet man als Gleichung der Fläche, auf der alle Punkte H liegen,

$$(525) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = K\varrho^2 = M\lambda^4.$$

Die Fläche ist ein Ellipsoid; sie heisst das T r ä g h e i t s e l l i p s o i d für den Punkt O. Für verschiedene Werte von λ erhält man einander ähnliche Ellipsoide.

Wählt man als Coordinatenaxen die Hauptaxen des Ellipsoides (525), so vereinfacht sich die Gleichung desselben und nimmt die Form

$$(526) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = M\lambda^4$$

an. Bei dieser Wahl sind die drei Centrifugalmomente in Bezug auf die Coordinatenebenenpaare gleich Null. Die Coordinatenaxen heissen Hauptaxen für den Punkt O; die Grössen A, B und C in der Gleichung (526) sind die sog. Hauptträgheitsmomente. Unter ihnen ist eines das grösste, ein anderes das kleinste von allen Trägheitsmomenten in Bezug auf Axen durch O, und zwar entspricht das grösste Trägheitsmoment dem kleinsten Halbmesser des Ellipsoids, das kleinste Trägheitsmoment dem grössten Halbmesser. Statt der Formel (523) erhält man nun

$$K = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma. \tag{527}$$

Centralellipsoid. Freie Axen.

Wenn der Punkt O mit dem Schwerpunkte des Systems zusammenfällt, so heisst das Trägheitsellipsoid Centralellipsoid; seine Hauptaxen sind die sog. Hauptcentralaxen oder freien Axen (Vergl. hierüber § 115).

Die analytische Geometrie lehrt, wie die Hauptaxen eines Ellipsoides bestimmt werden, wenn die Gleichung des Ellipsoides gegeben ist. Man beachte, dass eine durch O geführte Axe OX eine Hauptaxe ist, wenn die beiden Bedingungen

$$\Sigma(mxy) = 0 \text{ und } \Sigma(mxz) = 0$$

erfüllt sind, wo die Coordinaten sich auf ein rechtwinkliges System beziehen. Oft gelingt es ohne weiteres gewisse Hauptaxen eines homogenen Körpers zu finden. In dieser Beziehung sind folgende Sätze nützlich, deren Richtigkeit man unmittelbar erkennt.

Wenn ein Körper eine Symmetrieebene besitzt, so ist jede Senkrechte zu derselben eine Hauptaxe in Bezug auf den in der Ebene liegenden Fusspunkt der Senkrechten.

Wenn ein Körper eine Symmetrieaxe besitzt, so ist dieselbe eine Hauptaxe in Bezug auf jeden ihrer Punkte.

Wenn zwei Hauptaxen des Trägheitsellipsoids gleich sind, so ist dass Ellipsoid ein Umdrehungsellipsoid; dann sind alle Trägheitsmomente in Bezug auf Gerade durch den Mittelpunkt des Ellipsoids senkrecht zur Umdrehungsaxe gleich gross. Wenn alle drei Hauptaxen des Ellipsoids gleich gross sind, so verwandelt sich das Ellipsoid in eine Kugel; das System besitzt dasselbe Trägheitsmoment in Bezug auf alle Axen durch den Mittelpunkt der Kugel.

§ 108.

Berechnung von Trägheitsmomenten.

Trägheitsmoment von Körpern, Flächen und Linien.

Wenn die Masse continuirlich im Raume ausgebreitet ist, so treten an Stelle der Summenausdrücke

$$\Sigma(mr^2),\ \Sigma(mp^2),\ \Sigma(mq^2)$$

für die Trägheitsmomente in Bezug auf eine Axe, einen Punkt oder eine Ebene die bestimmten Integrale

$$\int r^2 dM,\ \int p^2 dM,\ \int q^2 dM,$$

wo dM das Massenelement ist und die Integrale über die ganze Masse erstreckt werden müssen. Entspricht das Massenelement dM einem Volumenelemente dV und ist die Dichte ϱ, so sind die drei Trägheitsmomente

$$\int \varrho r^2 dV,\ \int \varrho p^2 dV,\ \int \varrho q^2 dV.$$

Ist der Körper homogen, so erhält man

$$\varrho \int r^2 dV,\ \varrho \int p^2 dV,\ \varrho \int q^2 dV$$

und die Integrale hängen nur von der Form des Körpers und der Lage der Axe, des Punktes oder der Ebene ab, in Bezug auf welche die Trägheitsmomente bestimmt werden sollen.

Man kann auch die Trägheitsmomente von Flächen und Linien, welche mit Masse belegt sind, berechnen (vergl. § 65 in der Lehre des Schwerpunktes). Um sie zu finden, ersetzt man dV in den obigen Ausdrücken durch das Flächen- oder Linienelement.

Trägheitsmoment eines Cylinders.

Cylinder.

Um das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Cylinders (Fig. 422) in Bezug auf seine Axe zu berechnen, zerlegt man den Cylinder in coaxiale röhrenförmige Elemente. Ein Element mit dem inneren Radius r und der Dicke dr hat die Masse

$$dM = \varrho\, 2\pi r h\, dr$$

und liefert das Trägheitsmoment

$$dK = \varrho\, 2\pi r^3 h\, dr.$$

Fig. 422.

Das Trägheitsmoment des Cylinders ist

$$K = \int_0^R \varrho\, 2\pi r^3 h\, dr = \varrho\, 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \varrho\, \frac{\pi}{2}\, R^4 h,$$

oder

$$K = \tfrac{1}{2} M R^2, \tag{528}$$

wo

$$M = \varrho\, \pi R^2 h$$

die Gesamtmasse des Cylinders bezeichnet.

Das Trägheitsmoment eines homogenen Cylinders in Bezug auf seine Axe wird erhalten, wenn man die halbe Masse auf die Mantelfläche verlegt.

Kreisscheibe.

Dasselbe Resultat gilt auch bei einer dünnen Kreisscheibe und einer Kreisfläche, welche gleichförmig mit Masse belegt ist.

Hohlcylinder. Für einen Hohlcylinder mit dem inneren Radius r und dem äusseren Radius R findet man in Bezug auf die Axe das Trägheitsmoment

$$(529) \qquad K = \varrho \frac{\pi}{2} h (R^4 - r^4) = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2),$$

wo

$$M = \varrho \pi h (R^2 - r^2)$$

die Masse des Hohlcylinders ist.

Trägheitsmoment einer Kreisscheibe in Bezug auf einen Durchmesser. Gemäss einem Satze auf p. 617 ist das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe in Bezug auf ihre Axe gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen durch diese Axe. Da diese beiden Trägheitsmomente gleich gross sind und das Trägheitsmoment der Scheibe in Bezug auf einen Durchmesser darstellen, so erhält man für dieses letztgenannte Trägheitsmoment den Wert

$$(530) \qquad K' = \tfrac{1}{4} M R^2.$$

Anwendung.

Man berechne das Trägheitsmoment eines homogenen Cylinders in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur geometrischen Axe geführte Axe, bestimme das Centralellipsoid und untersuche, wann es eine Kugel wird.

Der Cylinder wird in dünne kreisförmige Platten zerlegt; man berechnet ihre Trägheitsmomente für die betrachtete Axe mit Hülfe des Satzes auf p. 619 und bildet die Summe dieser Trägheitsmomente vermittelst eines Integrals. Das Centralellipsoid wird eine Kugel für $h = \sqrt{3}\, R$.

Trägheitsmoment eines Stabes, einer rechteckigen Platte und eines Parallelepipeds.

Rechteckige Platte. Um das Trägheitsmoment einer Rechtecksfläche (Fig. 423), die gleichförmig mit Masse belegt ist, in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gezogene Parallele zu zwei Kanten zu berechnen, zerlegt man das Rechteck in

schmale Streifen, die den Kanten parallel sind. Mit den Bezeichnungen der Figur findet man

$$K = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varrho b\, dx \,.\, x^2 = 2\varrho b \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \tfrac{1}{12}\, \varrho b a^3$$

oder

(531) $K = \frac{1}{12} M a^2$,

wo M die über das Rechteck ausgebreitete Masse ist.

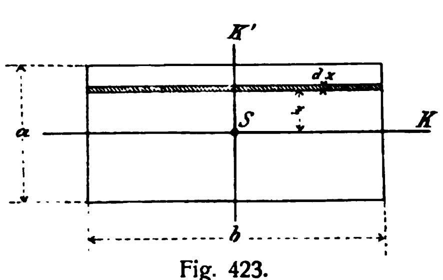


Fig. 423.

In Bezug auf eine den Kanten a parallele Axe durch S erhält man in derselben Weise das Trägheitsmoment

$$K' = \tfrac{1}{12} M b^2.$$

Mit Hülfe eines Satzes auf p. 617 ergiebt sich nun für das Trägheitsmoment K_s in Bezug auf eine Axe durch S senkrecht zur Fläche des Rechteckes

$$K_s = K + K' = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

oder

(532) $$K_s = \tfrac{1}{12} M d^2,$$

wo d die Diagonale des Rechteckes ist.

Die Formel (531) gilt auch, wenn die Breite der Scheibe sehr klein ist, so dass sie in einen dünnen geraden Stab oder in eine mit Masse gleichförmig belegte Strecke übergeht. Wenn L die Länge, M die Masse des Stabes ist, so ergiebt sich für sein Trägheitsmoment K in Bezug auf eine zu ihm senkrechte Axe durch den Schwerpunkt

(533) $$K = \tfrac{1}{12} M L^2.$$

Parallelepiped.

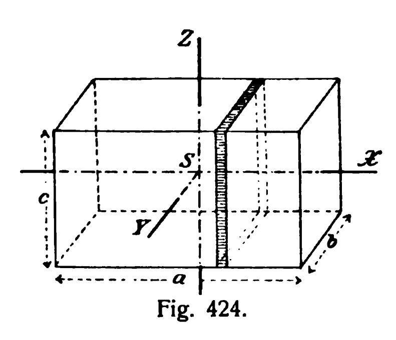


Fig. 424.

Mit Hülfe der Formel (532) berechnet man das Trägheitsmoment eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipeds in Bezug auf eine der Kante a (Fig. 424) parallele Schwerpunktsaxe. Eine der yz-Ebene parallele rechteckige Platte von der Masse dM liefert in Bezug auf die x-Axe das Trägheitsmoment

$$dK_x = \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2)\, dM.$$

Für das ganze Parallelepiped erhält man also

$$(534) \qquad K_x = \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2) \int dM = \tfrac{1}{12} M (b^2 + c^2),$$

wie für die rechteckige Platte nach der Formel (532).

In Bezug auf die Axen SY und SZ der Figur ergiebt sich in derselben Weise

$$K_y = \tfrac{1}{12} M (c^2 + a^2),$$
$$K_z = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Die drei Axen SX, SY und SZ sind Hauptcentralaxen. Gemäss der Gleichung (526) stellt

$$(526) \quad (b^2 + c^2)\, \xi^2 + (c^2 + a^2)\, \eta^2 + (a^2 + b^2)\, \zeta^2 = 12\lambda^4$$

das Centralellipsoid dar. Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsaxe mit den Richtungswinkeln α, β und γ ist nach der Gleichung (527)

$$K = \tfrac{1}{12} M \{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + $$
$$+ (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\}.$$

Speciell ergiebt sich in Bezug auf eine Diagonale des Parallelepipeds

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{a}{d},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{b}{d},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{c}{d},$$

$$K = \tfrac{1}{6} M \frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{d^2}.$$

Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers.

Umdrehungskörper.

Um das Trägheitsmoment eines homogenen Umdrehungskörpers (Fig. 425) in Bezug auf seine Axe zu berechnen, zerlegt man den Körper durch zur Axe normale Ebenen in unendlich dünne scheibenförmige Elemente. Eine Scheibe vom Radius $z = f(x)$ und mit der Dicke dx liefert das Trägheitsmoment (vergl. (528))

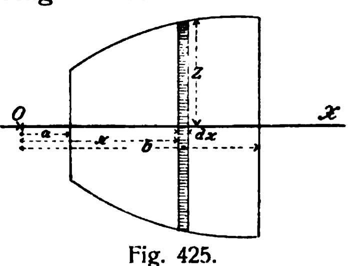


Fig. 425.

$$dK = \varrho\, \tfrac{1}{2} \pi z^4\, dx.$$

Für den Teil des Umdrehungskörpers, welcher zwischen den beiden zur Axe senkrechten Ebenen mit den Abscissen a und b liegt, ergiebt sich das Trägheitsmoment

$$K = \varrho \frac{\pi}{2} \int_a^b z^4\, dx,$$

wo $z = f(x)$ eingesetzt werden muss.

Kegel.

Kegel. Für einen Kegel von der Höhe h (Fig. 426), dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius R ist, findet man

$$z = \frac{x}{h} R,$$

$$a = 0,\ b = h,$$

und

$$K = \varrho \frac{\pi}{2} \int_0^h \frac{x^4}{h^4} R^4\, dx = \tfrac{1}{10} \varrho \pi R^4 h.$$

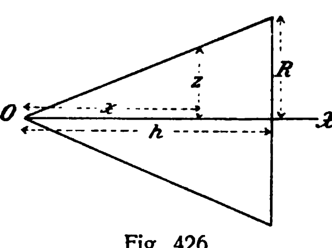


Fig. 426.

Die Masse des Kegels beträgt

$$M = \tfrac{1}{3} \varrho \pi R^2 h,$$

daher hat man noch

(536) $K = \tfrac{3}{10} M R^2.$

Umdrehungsparaboloid.

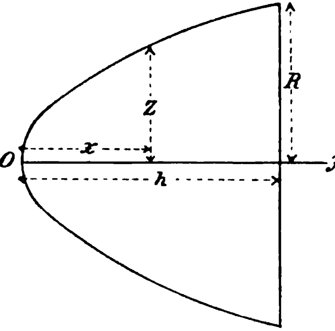


Fig. 427.

Umdrehungsparaboloid. Die Gleichung der Meridiancurve des Umdrehungsparaboloides ist mit den Bezeichnungen der Fig. 427

$$z^2 = \frac{R^2}{h} x.$$

Mit Hülfe der Gleichung (535) erhält man

$$K = \varrho \frac{\pi}{2} \int_0^h \frac{R^4}{h^2} x^2 dx = \varrho \frac{\pi}{6} R^4 h.$$

Die Masse des Paraboloides beträgt

$$M = \varrho \frac{\pi}{2} R^2 h.$$

Es ergiebt sich somit

(537) $K = \tfrac{1}{3} M R^2.$

Trägheitsmoment der Kugel.

Das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf einen Durchmesser könnte mit Hülfe der Gleichung (535) berechnet werden. Einfacher ist es jedoch, zunächst das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel zu berechnen. Eine sphärische Schicht vom Radius p und von der Dicke dp (Fig. 428) enthält die Masse $\varrho\, 4\pi p^2\, dp$ und liefert in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel das Trägheitsmoment $\varrho\, 4\pi p^4\, dp$; das polare Trägheitsmoment K_0 der Kugel ist also

Kugel.

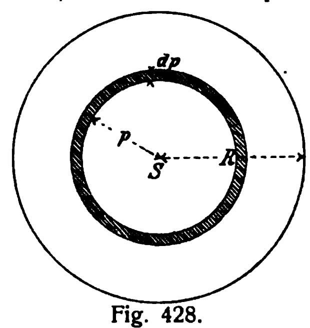


Fig. 428.

$$K_0 = \int_0^R \varrho\, 4\pi p^4 dp = 4\pi\varrho \int_0^R p^4 dp = 4\pi\varrho \frac{R^5}{5}.$$

Die Masse der Kugel beträgt

$$M = \tfrac{4}{3}\, \pi\varrho R^3.$$

Man findet daher

(538) $$K_0 = \tfrac{3}{5}\, MR^2.$$

Gemäss einem Satze auf p. 618 ist das polare Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf drei zu einander senkrechte Diametralebenen. Da diese alle gleich sind, so hat jedes von ihnen den Wert $\tfrac{1}{5}\, MR^2$. Das Trägheitsmoment K in Bezug auf einen Durchmesser ist gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Diametralebenen, d. h. man erhält

(539) $$K = \tfrac{2}{5}\, MR^2.$$

§ 109.

Übungsaufgaben zur Lehre von den Trägheitsmomenten.

1) Die Trägheitsmomente einer homogenen Halbkugel sollen in Bezug auf die Grundfläche und in Bezug auf einen Durchmesser der Grundfläche berechnet werden.

2) Man bestimme das Trägheitsellipsoid eines homogenen Würfels für den Halbirungspunkt einer Kante des Würfels als Mittelpunkt.

3) Der Ausdruck für das Trägheitsmoment eines homogenen Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, soll für eine beliebige Schwerpunktaxe aufgestellt werden.

4) Man berechne das Trägheitsmoment eines homogenen abgestumpften Kegels in Bezug auf seine Axe.

5) Ein Kreis dreht sich um eine in seiner Ebene liegende Axe, die den Kreis nicht schneidet. Man berechne das Trägheitsmoment des ringförmigen Umdrehungskörpers in Bezug auf diese Axe.

6) Ein Kreuz wird von zwei gleich langen und gleich schweren Stäben gebildet, welche an ihren Halbirungspunkten senkrecht zu einander befestigt werden. Man berechne das Trägheitsmoment des Kreuzes in Bezug auf eine beliebige Axe in seiner Ebene.

7) Man beweise, dass eine homogene dreieckförmige Platte mit gleich langen Seiten in Bezug auf eine beliebige Axe des Raumes dasselbe Trägheitsmoment liefert wie drei gleich grosse Massen in den Halbirungspunkten der Dreiecksseiten, deren Gesamtmasse gleich der Masse der Platte ist.

8) Die Centrifugalmomente eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipeds sollen in Bezug auf ein Coordinatensystem berechnet werden, dessen Anfangspunkt ein Eckpunkt des Parallelepipeds ist und dessen Axen die drei Kanten sind.

9) Welche Beziehung besteht zwischen den Trägheitsmomenten eines Körpers in Bezug auf zwei einander parallele Ebenen?

10) Wie leitet man aus dem polaren Trägheitsmomente eines Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt das polare Trägheitsmoment in Bezug auf einen beliebigen Pol ab?

11) K_1 und K_2 seien die Trägheitsmomente zweier Körper von den Massen M_1 und M_2 in Bezug auf zwei einander parallele Axen durch ihre Schwerpunkte. Der Abstand dieser Axen sei d. Man beweise, dass

$$K = K_1 + K_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} d^2$$

das Trägheitsmoment des aus den beiden Körpern zusammengesetzten Systems in Bezug auf die parallel den gegebenen Axen durch den Systemschwerpunkt gelegte Axe darstellt.

12) Das Centralellipsoid eines Körpers sei ein Umdrehungsellipsoid, dessen längere Axe die Umdrehungsaxe ist. Man beweise, dass es zwei Punkte giebt, für welche das Centralellipsoid eine Kugel ist und bestimme die Lage dieser Punkte.

Dreizehnter Abschnitt.

Allgemeine Lehrsätze.

§ 110.

Princip von d'Alembert.

D'Alemberts Princip.

Die Bedingungen des Gleichgewichts von Kräften, welche auf ein materielles System wirken, sind in der Statik aufgestellt worden. Die allgemeinste Methode zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen liefert bekanntlich der Satz von der virtuellen Arbeit, welcher ja sowohl für unveränderliche als veränderliche, freie und nicht freie Systeme gilt. Wenn die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt sind, so besitzt das System eine Bewegung, deren Untersuchung der Dynamik angehört. Als Ausgangspunkt für diese Untersuchung dient ein allgemeiner Satz, das sog. d'Alembertsche Princip, und zwar ermöglicht dieses Princip die dynamische Aufgabe auf eine statische zurückzuführen.

Wenn die Punkte des materiellen Punktsystems, dessen Bewegung untersucht werden soll, von einander unabhängig sind, so zerfällt die Aufgabe in ebenso viele einzelne Aufgaben, als das System Punkte enthält (vergl. § 18); auf jeden der Punkte können die in der Mechanik des materiellen Punktes erhaltenen Gesetze angewandt werden.

Wenn dagegen die Punkte des Systems in irgend einer Weise von einander abhängig sind, so muss man

bei der Untersuchung der Bewegung der Punkte darauf Rücksicht nehmen. Die Abhängigkeit kann in gewissen physischen Verbindungen zwischen einzelnen Punkten des Systems bestehen; auch können materielle Hindernisse vorhanden sein, durch welche die freie Beweglichkeit gewisser Teile des Systems beschränkt ist, entweder von aussen her oder durch andere Teile desselben Systems. Beispielsweise können zwei Punkte des Systems gezwungen sein ihren Abstand unverändert beizubehalten, wenn sie einem starren Körper angehören oder wenn sie durch einen unbiegsamen und unausdehnbaren Stab mit einander verbunden sind. Ein dem System angehörender starrer Körper kann mit einem anderen starren Körper des Systems so verbunden sein, dass er sich nur um einen dem zweiten Körper angehörenden Punkt oder um eine Axe drehen kann. Zwei starre Körper des Systems können gezwungen sein sich an ihren Oberflächen fortwährend zu berühren u. s. w. Wenn sämtliche Abstände zweier materieller Punkte des Systems unveränderlich sind, so ist das System selbst ein unveränderliches oder bildet einen starren Körper. Die Verbindungen innerhalb des Systems können im allgemeinen durch Kräfte, sog. innere Kräfte ersetzt werden. Wie das Princip der Wirkung und Gegenwirkung lehrt, kommen diese Kräfte paarweise vor, sind gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

Widerstandskräfte.

Wenn das System nicht frei ist, so muss man ausser den inneren Kräften noch Widerstandskräfte oder Reactionen in Betracht ziehen, welche z. B. dadurch entstehen, dass gewisse Punkte gezwungen sind sich auf festen Curven oder Flächen, welche dem System nicht angehören, zu bewegen oder, dass gewisse Punkte des Systems unbeweglich gemacht sind u. s. w. Wenn das Gegenteil nicht besonders hervorgehoben wird, so setzt man voraus, dass die Widerstandskräfte normal zu den Flächen und Curven sind, welche sie erzeugen. Es kann

der Fall eintreten, dass diese Widerstandskräfte auch tangentiale Componenten besitzen; beispielsweise könnten sie Reibungswiderstände sein. Ferner wird vorausgesetzt, dass sämtliche Verbindungen und Widerstände doppelseitig sind (vergl. § 40).

Äussere Kraft. Effective Kraft.

Das materielle Punktsystem möge ein freies System sein. Auf einen einzelnen Punkt von der Masse m (Fig. 429) wirke eine von dem System selbst unabhängige sog. äussere Kraft P, welche in gewissen Punkten des Systems auch gleich Null sein kann. Die inneren Kräfte, welche auf den Punkt m wirken, liefern eine Resultirende S, welche den Zwang darstellt, den der Punkt durch seine Verbindungen mit anderen Punkten des Systems erfährt. Die Resultirende der äusseren Kraft P und der inneren Kraft S ist eine Kraft R, welche in jedem Augenblicke dem Punkte m seine wirkliche Beschleunigung erteilen würde, wenn er frei wäre. Die Kraft R heisst effective Kraft; sie ist gleich dem Product ma aus der Masse m und der Beschleunigung a des Punktes, ihre Richtung ist diejenige von a.

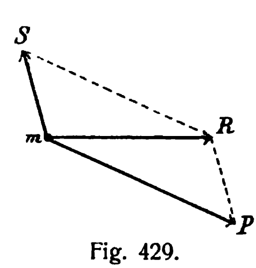


Fig. 429.

Verlorene Kraft.

Wenn die äussere Kraft P in zwei Componenten zerlegt wird, von welchen die eine gleich der effectiven Kraft R ist, so ist die zweite Componente Q gleich und entgegengesetzt der inneren Kraft S (Fig. 430). Die Componente Q hebt die innere Kraft S auf, während die andere Componente R die Beschleunigung des Punktes verursacht. Die Kraftcomponente Q oder (S), welche gewissermassen für

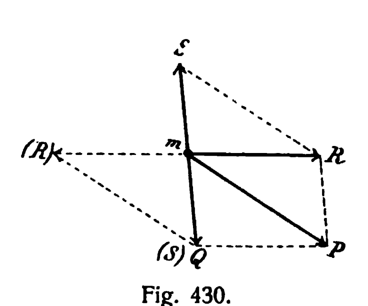


Fig. 430.

die Bewegung des Punktes verloren geht, wird verlorene Kraft genannt. Sie ist auch gleich der Resultirenden von P und der zu R entgegengesetzten Kraft (R), d. h. *die verlorene Kraft ist die Resultirende der äusseren Kraft und der in entgegengesetzter Richtung genommenen effectiven Kraft.*

D'Alemberts Princip für ein freies System.

Das d'Alembertsche Princip lautet für ein freies System: *An einem Punktsystem, das sich in Bewegung befindet, halten sich die verlorenen Kräfte in jedem Augenblick das Gleichgewicht mit Rücksicht auf die Bedingungen des Systems.*

Die Richtigkeit des Princips geht daraus hervor, dass die inneren Kräfte S paarweise gleich und entgegengesetzt gerichtet vorkommen, und einander mit Rücksicht auf die materiellen Bedingungen des Systems Gleichgewicht halten. Folglich halten sich auch die ihnen entgegengesetzten und gleichen Kräfte, die verlorenen Kräfte, das Gleichgewicht.

Da Q die Resultirende von P und (R) ist, so kann man das d'Alembertsche Princip auch so formulieren: *Während der Bewegung eines freien Systems halten die äusseren Kräfte mit Rücksicht auf die materiellen Bedingungen des Systems in jedem Augenblick den Kräften das Gleichgewicht, welche entgegengesetzt gleich den effectiven Kräften sind.*

D'Alemberts Princip für ein nicht freies System.

Wenn das materielle Punktsystem kein freies ist, so lässt es sich dadurch in ein freies System verwandeln, dass man zu den äusseren Kräften die (im allgemeinen unbekannten) Widerstandskräfte oder Reactionen hinzufügt, durch welche die Bedingungen ersetzt werden können. Auf das so erhaltene System lässt sich das d'Alembertsche Princip anwenden und liefert für nicht freie Systeme den Satz:

Während der Bewegung halten die Reactionen mit Rücksicht auf die Bedingungen des Systems in jedem Augenblick den verlorenen Kräften das Gleichgewicht.

Der Satz lässt sich auch so formulieren: ***Während der Bewegung eines materiellen Systems, dessen Bewegung durch gewisse Hindernisse beschränkt ist, halten sich die verlorenen Kräfte mit Rücksicht auf diese Hindernisse und auf die inneren Bedingungen des Systems in jedem Augenblick das Gleichgewicht.***

Analytischer Ausdruck des Princips von d'Alembert.

D'Alemberts Princip, welches das Hauptprincip der Dynamik ist, liefert zunächst eine Anzahl von Gleichungen, welche die Beschleunigungen der Punkte des Systems bestimmen und somit Differentialgleichungen der Bewegung des Systems sind. Um diese Gleichungen aufzustellen, wendet man die durch die Beschaffenheit des Systems bedingten Gleichgewichtsbedingungen auf die verlorenen Kräfte an. Am zweckmässigsten bedient man sich dabei des Satzes von der virtuellen Arbeit. Er liefert einen analytischen Ausdruck für das Princip von d'Alembert.

Man erteilt den Punkten des Systems virtuelle Verschiebungen, welche mit den Bedingungen im Einklang sind und welche die an einem nicht freien System aus den Hindernissen erwachsenden Bedingungen befriedigen. Solche virtuelle Verschiebungen können mit einem gemeinsamen Namen als mit den Bedingungen des Systems verträgliche virtuelle Verschiebungen bezeichnet werden. Nach dem Satze von der virtuellen Arbeit und dem Princip von d'Alembert ist *die Summe der virtuellen Arbeiten der verlorenen Kräfte für alle mit den Bedingungen des Systems verträglichen virtuellen Verschiebungen gleich Null.* Bezeichnet man mit δq die Projection der virtuellen Verschiebung δq eines Punktes auf die auf ihn wirkende verlorene Kraft Q (vergl. § 81), so besteht die Gleichung

$$\Sigma(Q\delta q) = 0. \tag{540}$$

Wählt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem und bezeichnet mit x, y und z die Coordinaten des Punktes mit

der Masse m, d. h. des Angriffspunktes der Kraft Q, die Componenten seiner Beschleunigung nach den gewählten Axen mit a_x, a_y und a_z, die Componenten der äusseren Kraft P mit X, Y und Z, so sind die Componenten der effectiven Kraft R

$$R_x = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$R_y = m a_y = m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$R_z = m a_z = m \frac{d^2 z}{dt^2},$$

und die Componenten der verlorenen Kraft Q, welche die Resultirende von P und (R) ist,

$$\begin{aligned} Q_x &= X - m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ Q_y &= Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ Q_z &= Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{541}$$

Bezeichnet man noch die Projectionen von δs auf die Coordinatenaxen mit δx, δy und δz, so erhält man nach einer Formel auf p. 417 als virtuelle Arbeit der Kraft Q

$$Q \delta q = Q_x \delta x + Q_y \delta y + Q_z \delta z =$$

$$= \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z.$$

Der analytische Ausdruck von d'Alemberts Princip ist also

(542)

$$\Sigma \left\{ \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z \right\} = 0,$$

wo die Summe über sämtliche Punkte des Systems erstreckt werden muss. Diese Form des Princips rührt von Lagrange her. Den Grössen δx, δy und δz kann man alle möglichen mit den Bedingungen des Systems verträglichen Werte beilegen; dadurch wird es möglich die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems aufzustellen.

Bevor specielle Anwendungen des Princips von d'Alembert gemacht werden, sollen mit Hülfe desselben einige allgemeine Sätze der Dynamik aufgestellt werden, welche oft vom Nutzen bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung sind, d. h. bei der Ableitung solcher Bewegungsgleichungen, welche nur die Coordinaten der Punkte des Systems und die Zeit, aber keine Ableitungen in Bezug auf die Zeit enthalten.

§ 111.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Princip der lebendigen Kraft.

Wenn die Bedingungen keine Veränderung mit der Zeit erleiden, so kann man δx, δy und δz durch die wirklichen Coordinatenänderungen dx, dy und dz während der unendlich kurzen Zeit dt ersetzen. Die Gleichung (542) wird dann

$$\Sigma\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right\}=0,$$

oder

(543)

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt=\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Durch Differentiation der für die Geschwindigkeit eines Punktes geltenden Gleichung

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mit Bezug hierauf folgt aus der Gleichung (543)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\, d(u^2) = \tfrac{1}{2}\, d\Sigma(mu^2) = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Integrirt man diese Gleichung von einer Zeit t_0, welcher die Geschwindigkeit u_0 des Punktes entspricht, bis zu einer beliebigen Zeit t, und beachtet zugleich, dass die Reihenfolge der Integration und der Summation gleichgültig ist, so findet man

$$(544) \quad \tfrac{1}{2}\{\Sigma(mu^2) - \Sigma(mu_0^2)\} = \Sigma\int(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Die Grösse $\Sigma(mu^2)$ ist die Summe der lebendigen Kräfte sämtlicher Punkte des Systems zur Zeit t und heisst lebendige Kraft des Systems, ihre Hälfte $\tfrac{1}{2}\Sigma(mu^2)$ ist die aktuelle oder kinetische Energie des Systems. Gemäss der Gleichung (132) bezeichnet $\int(Xdx + Ydy + Zdz)$ die Arbeit, welche die auf den Massenpunkt m wirkende äussere Kraft P während der Zeit $t - t_0$ verrichtet, also die rechte Seite der Gleichung (544) die ganze Arbeit, welche die auf das System wirkenden äusseren Kräfte während dieser Zeit verrichten. Die Gleichung (544) drückt den Satz von der Äquivalenz der Arbeit und der kinetischen Energie aus: *Die Zunahme der kinetischen Energie eines materiellen Systems während der Bewegung aus einer Lage in eine andere ist gleich der von den äusseren Kräften verrichteten Arbeit.* (Man vergleiche den entsprechenden für einen einzelnen Punkt geltenden Satz in § 48.)

Wird die verrichtete Arbeit mit A bezeichnet, so nimmt die Gleichung (544) die Form an

$$\frac{1}{2}\Sigma(mu^2) - \frac{1}{2}\Sigma(mu_0^2) = A. \tag{545}$$

Das Princip der lebendigen Kraft ist namentlich in denjenigen Fällen von grosser Bedeutung, in welchen die Arbeit

$$A = \Sigma \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

wirklich berechnet werden kann. Es würde uns jedoch zu weit führen, das Vorhandensein solcher Fälle näher zu untersuchen. Der denkbar einfachste Fall ist der, in welchem keine äusseren Kräfte vorhanden sind, sondern die Bewegung des materiellen Systems nur durch einen gewissen ursprünglichen Geschwindigkeitszustand verursacht ist. In diesem Falle ist $A = 0$ und man erhält

$$\frac{1}{2}\Sigma(mu^2) = \frac{1}{2}\Sigma(mu_0^2), \tag{546}$$

d. h. *Während der Bewegung eines materiellen Systems, auf das keine äusseren Kräfte wirken, bleibt die kinetische Energie des Systems unverändert.*

§ 112.

Die kinetische Energie eines starren Körpers.

Bei einem starren Körper ergeben sich einfache Ausdrücke für die kinetische Energie.

Translatorische Bewegung.

Wenn die Bewegung des starren Körpers in einem bestimmten Augenblicke eine translatorische mit der gemeinsamen Gechwindigkeit u sämtlicher Punkte ist, so ist die kinetische Energie gleich der Hälfte des Productes aus der Masse des Körpers und dem Quadrate der Translationsgeschwindigkeit, also die gleiche, als ob die

ganze Masse des Körpers in einem Punkte concentrirt wäre.

Drehende Bewegung.

Wenn der starre Körper sich in einem bestimmten Augenblicke um eine Axe O (Fig. 431) mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so besitzt ein Punkt mit der Masse m in dem Abstande r von der Drehaxe die Geschwindigkeit $r\omega$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$. Die kinetische Energie des ganzen Körpers ist

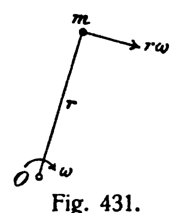


Fig. 431.

$$E = \tfrac{1}{2}\Sigma(mr^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}\omega^2\Sigma(mr^2),$$

d. h.

$$E = \tfrac{1}{2}K\omega^2, \tag{547}$$

wo K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe der Drehung bezeichnet. *Die kinetische Energie eines sich drehenden starren Körpers ist also gleich der Hälfte des Productes aus dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Drehaxe und dem Quadrate seiner Winkelgeschwindigkeit.*

Princip der lebendigen Kraft.

Wenn die Drehaxe unveränderlich ist und A die Arbeit bezeichnet, welche die auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte verrichten, während die Winkelgeschwindigkeit von ω_0 bis ω wächst, so liefert das Princip der lebendigen Kraft die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}K(\omega^2 - \omega_0^2) = A. \tag{548}$$

Würden die auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so wäre die Summe ihrer Momente in Bezug auf die feste Axe gleich Null, man erhielte $A = 0$ und $\omega = \omega_0$, d. h. die Winkelgeschwindigheit der Drehung um die feste Axe würde unverändert bleiben. Von diesem Resultate, welches in § 94 in anderer Weise abgeleitet wurde, ist ein ausgedehnter Gebrauch in der Lehre von der Reibung gemacht worden.

Allgemeine Bewegung.

Um die kinetische Energie eines starren Körpers zu berechnen, welcher die allgemeinste Bewegung besitzt, denkt man sich die Bewegung aus einer mit der Bewegung des Schwerpunktes identischen translatorischen Bewegung und einer relativen Drehung um den Schwerpunkt zusammengesetzt. Für die Drehung um den Schwerpunkt giebt es in jedem Augenblick eine bestimmte Drehaxe (§ 25). Man wähle den Schwerpunkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 432), dessen x-Axe mit der Drehaxe zusammenfällt und dessen z-Axe so angenommen ist, dass die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes in der xz-Ebene liegt. Die Geschwindigkeit U eines Punktes des Körpers, dessen Coordinaten x, y und z sind, ist die Resultirende der allen Punkten gemeinsamen translatorischen Geschwindigkeit u und der durch die Drehung erzeugten Geschwindigkeit $r\omega$, welche senkrecht zur x-Axe und zum Radius r ist. Bezeichnet man mit α den Winkel, den die Geschwindigkeit u mit der x-Axe einschliesst, so erhält man folgende Tabelle für die Geschwindigkeitscomponenten nach der

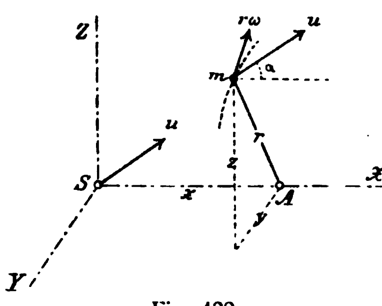


Fig. 432.

	X-Axe	Y-Axe	Z-Axe
u:	$u \cos \alpha$	0	$u \sin \alpha$
$r\omega$:	0	$-z\omega$	$y\omega$
U:	$u \cos \alpha$	$-z\omega$	$u \sin \alpha + y\omega$.

Daraus ergiebt sich

$$U^2 = (u \cos \alpha)^2 + (z\omega)^2 + (u \sin \alpha + y\omega)^2 =$$
$$= u^2 + r^2\omega^2 + 2\omega u \sin \alpha \,.\, y$$

und

$$mU^2 = mu^2 + mr^2\omega^2 + 2m\omega u \sin\alpha \,.\, y.$$

Für die doppelte kinetische Energie des Körpers berechnet man ferner

$$2E = \Sigma(mU^2) = u^2\Sigma m + \omega^2\Sigma(mr^2) + 2\omega u \sin\alpha\, \Sigma(my),$$

wo

$$\Sigma m = \text{der Masse } M,$$

$$\Sigma(mr^2) = \text{dem Trägheitsmomente } K$$

und

$$\Sigma(my) = 0,$$

weil die linke Seite ein Massenmoment in Bezug auf eine Ebene durch den Schwerpunkt darstellt. Also wird

(549) $$E = \tfrac{1}{2} Mu^2 + \tfrac{1}{2} K\omega^2,$$

d. h. ***die totale kinetische Energie eines starren Körpers ist gleich der Summe der Energien, welche einer mit der Bewegung des Schwerpunktes übereinstimmenden translatorischen Bewegung und der Drehung des Körpers um den Schwerpunkt enstprechen.***

Rollende Bewegung.

Der Körper sei ein homogener Umdrehungskörper, der ohne zu gleiten längs einer Ebene rollt (Fig. 433); die Winkelgeschwindigkeit sei ω und somit die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $u = r\omega$. Mit Hülfe der Gleichung (549) findet man dann

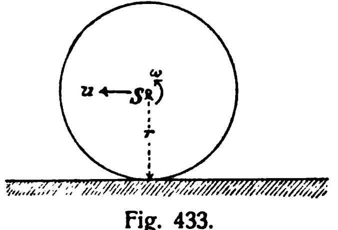


Fig. 433.

$$E = \tfrac{1}{2} Mu^2 + \tfrac{1}{2} K\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left\{M + \frac{K}{r^2}\right\} u^2$$

oder

(550) $$E = \tfrac{1}{2}(M + \mu)\, u^2,$$

wo μ die auf den Radius r des die Ebene berührenden Kreises reducirte Masse bezeichnet.

§ 113.

Bewegungsgrösse.

Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Bewegungsgrösse.

Unter der Bewegungsgrösse eines materiellen Punktes von der Masse m, dessen Geschwindigkeit u ist, versteht man das Product mu aus der Masse und der Geschwindigkeit; die Bewegungsgrösse hat dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit. Die Bewegungsgrössen werden durch Strecken geometrisch in derselben Weise wie Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte dargestellt. Die Bewegungsgrössen der Elemente eines starren Körpers können für jeden Augenblick auf eine Resultirende und ein resultirendes Paar reducirt werden.

Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

Man bezeichne die Coordinaten eines Punktes von der Masse m, welcher einem veränderlichen oder unveränderlichen materiellen Punktsysteme angehört, in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume mit x, y und z, die Coordinaten des Schwerpunktes mit ξ, η und ζ, die ganze Masse mit M. Nach § 64 bestehen zu jeder Zeit die Gleichungen

$$M\xi = \Sigma(mx),$$
$$M\eta = \Sigma(my),$$
$$M\zeta = \Sigma(mz),$$

wo die Summen über das ganze System erstreckt werden müssen. Die Grössen x, y, z, ξ, η und ζ sind Functionen der Zeit t. Bildet man die Ableitungen in Bezug auf t, so findet man

$$M\frac{d\xi}{dt}=\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right),$$

(551)
$$M\frac{d\eta}{dt}=\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right),$$

$$M\frac{d\zeta}{dt}=\Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right).$$

Die Grössen $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$ und $m\frac{dz}{dt}$ sind die Componenten der Bewegungsgrösse mu nach den Coordinatenaxen; die rechten Seiten der Gleichungen stellen die für das ganze System gebildeten Summen dieser Componenten, d. h. die Componenten der Resultirenden der Bewegungsgrössen dar. Man erhält also die Resultirende, wenn man sich die ganze Masse M des Systems im Schwerpunkte concentrirt denkt.

Da die Richtung einer Coordinatenaxe beliebig gewählt werden kann, so folgt: *Die Summe der Projectionen der Bewegungsgrössen eines materiellen Punktsystems auf eine beliebige Axe ist gleich der Projection der Bewegungsgrösse des Schwerpunktes auf diese Axe, wenn die ganze Masse des Systems im Schwerpunkte concentrirt wird.*

Sind die Massen und Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Systems bekannt, so liefern die Gleichungen (551) die Geschwindigkeit des Schwerpunktes. Differentiirt man diese Gleichungen nochmals, so erhält man

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

(552)
$$M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen die Projectionssummen der effectiven Kräfte nach den Coordinatenaxen dar, die linken Seiten sind die Projectionen der effectiven Kraft für die im Schwerpunkte concentrirte Gesamtmasse des Systems.

Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Es werde angenommen, das System sei so beschaffen, dass kleine translatorische Verschiebungen parallel den Coordinatenaxen möglich seien, während das System unverändert bleibt, und zwar seien δx, δy und δz diese drei Verschiebungen. Bei einem freien System sind diese Bedingungen immer erfüllt. Wendet man auf die Verschiebung parallel der x-Axe d'Alemberts Princip (die Gleichung 542) an, indem man δx constant, $\delta y = \delta z = 0$ wählt, so findet man

$$\Sigma \left\{ \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x \right\} = \delta x \, \Sigma \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0$$

d. h.

$$\Sigma \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0$$

und

$$\Sigma \left(m \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \Sigma X.$$

In derselben Weise folgt für Verschiebungen parallel den beiden übrigen Axen

$$\Sigma \left(m \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma Y,$$

$$\Sigma \left(m \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \Sigma Z.$$

Werden diese Werte in die Gleichungen (552) eingesetzt, so ergiebt sich

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma X,$$

(553) $$M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Sigma Y,$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Vergleicht man diese Differentialgleichungen mit denjenigen für die Bewegung eines Punktes (96), so erhält man den sog. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes:

Der Schwerpunkt eines materiellen Systems bewegt sich so, als ob alle äusseren Kräfte mit unveränderter Grösse und Richtung in ihm angebracht und die ganze Masse des Systems in ihm concentrirt wäre.

Man darf aber nicht vergessen, dass dieser Satz nur dann gültig ist, wenn das System ohne sich zu verändern virtuelle Parallelverschiebungen nach drei Richtungen des Raumes (oder nach jeder beliebigen Richtung) annehmen kann.

Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Wenn das System frei ist und von keinen äusseren Kräften beeinflusst wird, so hat man

$$\Sigma X=0,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma Z=0$$

und die Gleichungen (553) liefern

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=0.$$

Durch Integration dieser Gleichungen findet man

$$\xi=\alpha t+a,$$

$$\eta=\beta t+b,$$

$$\zeta=\gamma t+c,$$

d. h. die Gleichungen einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung. Man erhält den sog. Satz von der Er-

haltung der Bewegung des Schwerpunktes: *Der Schwerpunkt eines freien materiellen Systems, auf das keine äusseren Kräfte wirken, bewegt sich geradlinig und gleichförmig.*

Der Satz findet Anwendung auf die Bewegung unseres Sonnensystems, weil man dabei von der Anziehung der Fixsterne absehen kann.

Anwendungen.

1) Ein schwerer fester Körper wird in irgend einer Weise im luftleeren Raume geworfen. Der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich dabei längs einer Parabel in einer Verticalebene (vergl. § 15). Die vollständige Bewegung des Körpers setzt sich zusammen aus der Bewegung des Schwerpunktes und einer Drehung um den Schwerpunkt, welche in jedem Augenblicke um eine bestimmte Axe geschieht, während sich diese Axe continuirlich ändert. Wenn der Körper plötzlich zerbricht (wie bei der Explosion eines Geschosses), so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems fortwährend in derselben parabolischen Bahn, da ja durch die Explosion nur paarweise entgegengesetzt gleiche Kräfte in Wirksamkeit treten. Eine Veränderung in der Bahn des Schwerpunktes entsteht erst, wenn ein Stück des Körpers z. B. die Erdoberfläche trifft, wobei eine äussere Widerstandskraft in Wirksamkeit tritt. In der Bahn des Schwerpunktes zeigt sich in diesem Augenblicke eine plötzliche Richtungsänderung; der Schwerpunkt bewegt sich weiter längs einer zweiten Parabel, bis ein anderes Stück den Erdboden trifft u. s. w.

2) Für eine Person, welche sich auf einer vollkommen glatten horizontalen Eisfläche befindet, gilt der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes bei allen Bewegungen in horizontaler Richtung. Wenn die Person ursprünglich in Ruhe war, so kann sie sich nicht von selbst aus der Stelle bewegen. In der Wirklichkeit wird die Bewegung nur durch die Reibung ermöglicht. Dabei entsteht eine horizontale Kraft, welche dem ursprünglich ruhenden Schwerpunkte eine horizontale Beschleunigung erteilt, während die Wirkung der Gegenkraft auf die Erde unmerklich ist. Bei der Aufstellung des Princips von d'Alembert wurde angenommen, dass tangentiale Widerstandskräfte nicht vorhanden seien; giebt es solche, so muss man sie mit den äusseren Kräften zusammen in Betracht ziehen.

Je glatter die Fläche ist, auf der wir bestrebt sind uns zu bewegen, um so schwerer ist das Gehen. Auf einer geölten Spiegelglasfläche wäre es mit grossen Schwierigkeiten verbunden.

3) Eine Locomotive sei vermittelst Ketten so aufgehängt, dass sie als ein Pendel schwingen kann. Die Locomotive sei ursprünglich in Ruhe; durch einströmenden Dampf sollen die Kolben und Triebräder in Bewegung gesetzt werden. Es findet dabei eine Verschiebung des Schwerpunktes innerhalb des Systems statt. Weil aber der Schwerpunkt im Raume in Ruhe bleiben muss, da keine äusseren Kräfte hinzugefügt worden sind, so wird die Locomotive selbst in eine hin und her schwingende Bewegung geraten. Während die Kolben sich nach vorwärts bewegen, schwingt die Locomotive nach rückwärts und umgekehrt. Natürlich ist vorausgesetzt, dass die beweglichen Massen nicht so balancirt sind, dass der Systemschwerpunkt seine Lage überhaupt nicht ändert.

§ 114.

Der Flächensatz.

Virtuelle Drehung.

Wenn ein materielles Punktsystem so beschaffen ist, dass es zu jeder Zeit eine virtuelle Rotation um drei Coordinatenaxen des Raumes zulässt, während es unverändert bleibt, so ergiebt sich aus dem Principe von d'Alembert ein sehr bemerkenswerter Satz der Dynamik, der sog. Flächensatz. Diese Bedingungen sind an jedem freien System erfüllt, und ebenso an einem System mit einem festen Punkte, in Bezug auf Drehungen um Axen durch diesen Punkt. Bei der Drehung des Systems um den unendlich kleinen Winkel $\delta\varphi$ im positiven Sinne um die x-Axe erfährt nach § 81 p. 424 ein Punkt mit den Coordinaten x, y und z eine virtuelle Verschiebung, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen

$$\delta x = 0,$$

$$\delta y = - z\delta\varphi,$$

$$\delta z = y\delta\varphi$$

sind. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (542) ein, so erhält man

$$\Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z\delta\varphi - \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y\delta\varphi = 0\,,$$

d. h.

$$\Sigma z\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \Sigma y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

oder

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY)\,.$$

Da

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}$$

ist, so liefert die letzte Gleichung

$$\text{(554)} \qquad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(yZ - zY)\,.$$

In derselben Weise ergiebt sich für Drehungen um die beiden anderen Coordinatenaxen

$$\text{(554)} \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \Sigma(zX - xZ)\,,\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \Sigma(xY - yX)\,. \end{aligned}$$

Gemäss den Formeln (173) bezeichnen die rechten Seiten dieser Gleichungen die Summen der Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf die Coordinatenaxen, d. h.

$$\text{(555)} \qquad \begin{aligned} M_x &= \Sigma(yZ - zY)\,,\\ M_y &= \Sigma(zX - xZ)\,,\\ M_z &= \Sigma(xY - yX)\,. \end{aligned}$$

Die linken Seiten sind die Ableitungen der Grössen

$$G_x = \Sigma \left\{ y \,.\, m \frac{dz}{dt} - z \,.\, m \frac{dy}{dt} \right\},$$

(556)
$$G_y = \Sigma \left\{ z \,.\, m \frac{dx}{dt} - x \,.\, m \frac{dz}{dt} \right\},$$

$$G_z = \Sigma \left\{ x \,.\, m \frac{dy}{dt} - y \,.\, m \frac{dx}{dt} \right\},$$

welche dieselbe Form wie die Grössen (555) besitzen, mit dem Unterschiede, dass X, Y und Z durch $m \frac{dx}{dt}$, $m \frac{dy}{dt}$ und $m \frac{dz}{dt}$ ersetzt sind. Die Ausdrücke (556) stellen also die Summen der Momente der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Coordinatenaxen dar. Mit den obigen Bezeichnungen nehmen die Gleichungen (554) die einfache Form

(557)
$$\frac{dG_x}{dt} = M_x, \frac{dG_y}{dt} = M_y, \frac{dG_z}{dt} = M_z$$

an, und drücken aus, dass *die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf eine Axe gleich der in Bezug auf die Zeit genommenen Ableitung der Momentensumme der Bewegungsgrössen ist.*

Wenn dieser Satz für die drei betrachteten Axen gilt, so gilt derselbe auch für jede Axe durch den Coordinatenanfangspunkt O; denn eine virtuelle Drehung um eine beliebige Axe durch O kann aus virtuellen Drehungen um die drei Axen zusammengesetzt werden.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, in welchem es eine Axe giebt, in Bezug auf welche die Momentensumme der äusseren Kräfte gleich Null ist. Wählt man sie zur x-Axe, so erhält man

$$\frac{dG_x}{dt} = 0$$

und

$$(558) \qquad G_x = \text{constant},$$

d. h. *wenn die Summe der Momente der äusseren Kräfte gleich Null ist in Bezug auf eine Axe, um welche eine virtuelle Drehung des Systems möglich ist, während das System sich nicht verändert, so bleibt die Summe der Momente der Bewegungsgrössen in Bezug auf diese Axe während der Bewegung constant.*

Flächengeschwindigkeit.

Der Satz kann in anderer Weise ausgesprochen werden, indem man die sog. Flächengeschwindigkeit einführt. Der Radiusvector des Massenpunktes m (Fig. 434) werde auf die yz-Ebene projiciirt. Der Endpunkt der Projection hat zur Zeit t die Coordinaten y und z, zur Zeit $t + dt$ die Coordinaten $y + dy$, $z + dz$. Während der Zeit dt beschreibt die Projection des Radiusvectors eine Fläche (vergl. p. 316)

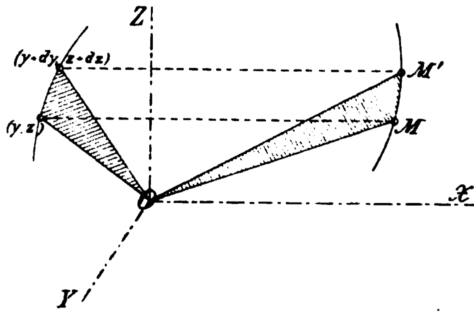


Fig. 434.

$$dA_x = \tfrac{1}{2}\left\{y\,dz - z\,dy\right\}.$$

Der Quotient aus dieser Fläche und der Zeit dt, d. h.

$$(559) \qquad \frac{dA_x}{dt} = \tfrac{1}{2}\left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\}$$

wird Flächengeschwindigkeit der Projection des Radiusvectors auf die yz-Ebene zur Zeit t genannt.

Man findet nun

$$(560) \qquad G_x = 2\Sigma\left(m\frac{dA_x}{dt}\right),$$

wo die Summe über das ganze System zu erstrecken ist. *Das resultirende Moment der Bewegungsgrössen in Bezug auf eine Axe ist also gleich der doppelten Summe aller Producte, welche man erhält, wenn die Masse jedes Punktes mit der Flächengeschwindigkeit der Projection seines Radiusvectors auf eine zur Axe senkrechte Ebene multiplicirt wird.*

Der Flächensatz.

Der sog. Flächensatz lautet dann: *Wenn die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf eine Axe fortwährend verschwindet, so bleibt die Summe aller derjenigen Producte constant, welche man erhält, wenn die Masse jedes Punktes mit der Flächengeschwindigkeit der Projection seines von einem Punkte der Axe aus gezogenen Radiusvectors auf eine zur Axe senkrechte Ebene multiplicirt wird.* Der Flächensatz oder das Princip der Flächen wird analytisch durch die Gleichung

$$\Sigma\left(m\frac{dA_x}{dt}\right) = \text{constant}, \tag{561}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\Sigma(mA_x) = C$$

ausgedrückt. Nach einmaliger Integration findet man

$$\Sigma(mA_x) = Ct + C', \tag{562}$$

wo C' eine zweite Constante ist. Die linke Seite dieser Gleichung bezeichnet die Summe sämtlicher Producte aus der Masse eines Punktes und der Fläche, welche die Projection seines Radiusvectors von einem gewissen Momente an beschrieben hat. Diese Summe wird der Kürze wegen die Flächensumme genannt. *Wenn also die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf eine Axe fortwährend gleich Null bleibt, so wächst die Flächensumme für eine zur Axe senkrechte Ebene proportional der Zeit.*

Unter den Fällen, in welchen die äusseren Kräfte keine Momentensumme in Bezug auf eine Axe liefern, seien die folgenden erwähnt: 1) es wirken keine äusseren Kräfte, 2) sämtliche äusseren Kräfte sind parallel der betrachteten Axe und 3) sämtliche äusseren Kräfte schneiden die Axe.

Anwendungen.

1) Wenn eine Person auf einer absolut glatten horizontalen Unterlage mit den Armen nach vorne gestreckt steht und dann beide Arme ebenso weit nach beiden Seiten bewegt, so bleibt der Körper in Ruhe, weil die Flächensummen der beiden Arme sich aufheben. Bewegt er dagegen nur den einen Arm nach der Seite, so muss sich der Körper etwas in entgegengesetzter Richtung drehen, damit die totale Flächensumme der Person unverändert bleibe. Dasselbe gilt, wenn man den Kopf nach der einen Seite dreht, ohne den Körper oder die Arme zu bewegen. In allen diesen Fällen hat die Constante C der Gleichung (562) den Wert Null, weil keine ursprünglichen Geschwindigkeiten vorhanden sind.

Mit dem obigen ist keineswegs gesagt, dass es für die Person unmöglich wäre, sich um eine verticale Axe zu drehen, beispielsweise durch zweckmässiges Drehen des Kopfes sowie gleichzeitiges Heben und Senken der Arme. Um die Möglichkeit einer derartigen Rotation eines veränderlichen Systems ohne den Einfluss äusserer Kräfte einzusehen, möge folgendes Beispiel gewählt werden.

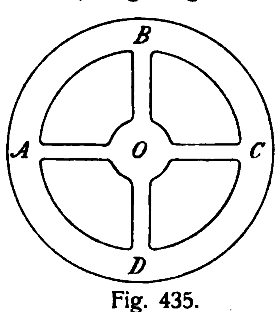


Fig. 435.

2) Ein horizontales Rad sei ohne Reibung um eine feste verticale Axe drehbar (Fig. 435). Auf dem Rade mögen sich vier Personen A, B, C und D befinden, und zwar an den Endpunkten von zwei zu einander senkrechten Durchmessern. Der Flächensatz gilt hier in Bezug auf die verticale Drehaxe. Wenn A einen Schritt nach B hin und C einen Schritt nach D hin längs des Umfanges macht, so muss das Rad, welches ursprünglich in Ruhe gewesen ist, sich etwas im entgegengesetzten Sinne, sagen wir im negativen Sinne drehen. Nehmen A und C dann ihre früheren Plätze wieder ein, so kehrt auch das Rad in die frühere Lage zurück. Es werde aber angenommen, dass die Personen B und D sich in der Zwischenzeit nach dem Mittelpunkte O hin bewegt haben. Eine solche Bewegung für sich

hat keinen Einfluss auf die Lage des Rades. Nehmen aber *A* und *C* erst jetzt ihre früheren Plätze wieder ein, so dreht sich das Rad im positiven Sinne und zwar mehr als in dem vorigen Falle, weil ja *B* und *D* jetzt kleinere Beiträge zu der Flächensumme liefern als vorhin und die Compensation durch eine grössere Drehung des Rades geschehen muss. Es mögen *B* und *D* sich wieder nach dem Umfange bewegen, was auf die Lage des Rades keinen Einfluss hat. Die gegenseitige Lage der Personen ist dann die ursprüngliche, das Rad hat sich aber im positiven Sinne gedreht. Wenn dieselben Bewegungen wiederholt werden, so dreht sich das Rad aufs neue u. s. w. Die Bewegungen der vier Personen können auch gleichzeitig geschehen und zwar so, dass das Rad sich continuirlich dreht.

3) Eine ähnliche Erscheinung tritt ein, wenn eine Katze, die man auf den Rücken fallen lässt, sich während des Falles dreht und auf die Füsse zu stehen kommt.

4) Eine Schaukel, welche ursprünglich in Ruhe war, kann durch die Körperbewegungen der darin sitzenden Personen nicht nur in Bewegung gesetzt, sondern auch zum Schwingen gebracht werden.

Vierzehnter Abschnitt.

Bewegung starrer Körper.

§ 115.

Gleichförmige Drehung um eine feste Axe.

Bedingungen der gleichförmigen Drehung.

In den §§ 94 und 112 ist hervorgehoben, dass die Bedingung für die gleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Axe darin besteht, dass die Summe der Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf die Axe gleich Null sein muss. Zu diesem Resultate führt auch das Princip der Flächen in sehr einfacher Weise. Ein Punkt mit der Masse m, dessen Abstand von der Drehaxe r ist, besitzt die Bewegungsgrösse $mr\omega$, wo ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist; das Moment der Bewegungsgrösse in Bezug auf die Axe ist $mr^2\omega$. Für den starren Körper ergiebt sich als Momentensumme der Bewegungsgrössen

$$G = \Sigma(mr^2\omega) = \omega\Sigma(mr^2) = K\omega, \tag{563}$$

wo K das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehaxe ist. Nach den Gleichungen (557) ist

$$\frac{dG}{dt} = K\frac{d\omega}{dt} = M, \tag{564}$$

wo M die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Drehaxe bezeichnet. Wenn sie gleich Null ist, so folgt

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

und

$$\omega = \text{constant},$$

sowie umgekehrt.

Drehung ohne äussere Kräfte. Reactionen.

Es soll angenommen werden, dass keine äusseren Kräfte wirken; dann ist $M = 0$. Wir wollen die Reactionen an der festen Axe berechnen. Nach dem Princip von d'Alembert müssen diese Reactionen den äusseren Kräften und den den effectiven Kräften entgegengesetzt gleichen Kräften das Gleichgewicht halten. Da es keine äusseren Kräfte giebt und die effectiven Kräfte der gleichförmigen Drehung die Centripetalkräfte sind, so halten demnach die Reactionen den Centrifugalkräften das Gleichgewicht. Um sie zu berechnen, reducirt man die Centrifugalkräfte für einen Reductionspunkt auf der Drehaxe, am zweckmässigsten für den Fusspunkt O der Senkrechten vom Schwerpunkte S des Körpers auf die Axe (Fig. 436).

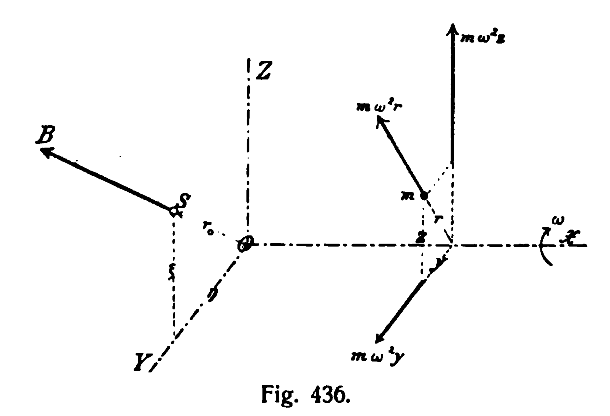


Fig. 436.

Man wähle den Punkt O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, in welchem die Drehaxe die x-Axe ist. Für einen Punkt mit der Masse m, den Coordinaten x, y, z und dem Abstande

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

von der Drehaxe ist die Centrifugalkraft $m\omega^2 r$ und hat die Richtung längs des Radius r nach aussen. Ihre Componenten nach den drei Axen sind der Reihe nach

(565) $$0,\ m\omega^2 y \text{ und } m\omega^2 z,$$

die Componenten der Resultirenden sämtlicher Centrifugalkräfte sind also:

$$\mathfrak{R}_x = 0,$$

$$\mathfrak{R}_y = \Sigma(m\omega^2 y) = \omega^2 \Sigma(my),$$

$$\mathfrak{R}_z = \Sigma(m\omega^2 z) = \omega^2 \Sigma(mz).$$

$\Sigma(my)$ und $\Sigma(mz)$ sind die Massenmomente des Körpers in Bezug auf die xz- und die xy-Ebenen. Bezeichnet man die Gesamtmasse des Körpers mit M, seine Schwerpunktscoordinaten mit η und ζ bez., so erhält man

$$\Sigma(my) = M\eta,$$

$$\Sigma(mz) = M\zeta,$$

und

(566) $$\mathfrak{R}_x = 0,\ \mathfrak{R}_y = \omega^2 M\eta,\ \mathfrak{R}_z = \omega^2 M\zeta.$$

Vergleicht man diese Werte mit den für einen einzelnen Punkt geltenden Ausdrücken (565), so erkennt man, dass *die Resultirende sämtlicher Centrifugalkräfte gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte concentrirten ganzen Masse des Körpers ist.* Diese Resultirende hat die Grösse

(567) $$\mathfrak{R} = \omega^2 M \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = \omega^2 M r_0$$

und ist von O nach dem Schwerpunkte S hin gerichtet.

Um das resultirende Paar der Centrifugalkräfte zu berechnen, beachte man zunächst, dass die Momente der Centrifugalkraft der Masse m in Bezug auf die drei Axen gleich

$$0,\ -m\omega^2 xz \text{ und } m\omega^2 xy$$

sind. Bildet man die Summen dieser Ausdrücke für sämtliche Massenelemente des Körpers, so erhält man als Componenten des resultirenden Paares

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x &= 0\,, \\
\mathfrak{M}_y &= -\,\omega^2\,\Sigma(mxz)\,, \qquad (568)\\
\mathfrak{M}_z &= \omega^2\,\Sigma(mxy)\,.
\end{aligned}
$$

Die Axe des Momentes liegt somit in der yz-Ebene und hat die Grösse

$$
(569) \qquad \mathfrak{M} = \omega^2 \sqrt{\{\Sigma(mxy)\}^2 + \{\Sigma(mxz)\}^2}\,;
$$

sie bildet mit der y-Axe einen durch die Gleichung

$$
(570) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}_y} = -\frac{\Sigma(mxy)}{\Sigma(mxz)}
$$

bestimmten Winkel φ. Die Ebene des Paares geht durch die Drehaxe.

Die Grösse $\Sigma(mxy)$ ist das Centrifugalmoment in Bezug auf die beiden Coordinatenebenen durch die z-Axe, die Grösse $\Sigma(mxz)$ das Centrifugalmoment in Bezug auf die beiden Coordinatenebenen durch die y-Axe.

Die Reactionen an der festen Axe sind äquivalent einer mit R entgegengesetzt gleichen Resultirenden im Punkte O und einem dem oben betrachteten Kräftepaare entgegengesetzten Paare $\mathfrak{M}$.

Wenn die äusseren Kräfte, welche auf einen gleichförmig sich drehenden Körper wirken, sich nicht das Gleichgewicht wie an einem freien Körper halten, so liefern sie bei der Reduction für den Punkt O im allgemeinen eine Resultirende mit gewissen Componenten R_x, R_y und R_z sowie ein resultirendes Kräftepaar mit den Componenten 0, M_y und M_z. Die Reactionen an der festen Axe sind in diesem Falle äquivalent einer Kraft im Punkte O mit den Componenten

$$
\begin{aligned}
&-R_x, \\
(571)\qquad &-R_y - \mathfrak{R}_y = -R_y - \omega^2 M\eta, \\
&-R_z - \mathfrak{R}_z = -R_z - \omega^2 M\zeta,
\end{aligned}
$$

und einem resultirenden Paare mit den Componenten

$$
\begin{aligned}
&0, \\
(572)\qquad &-M_y - \mathfrak{M}_y = -M_y + \omega^2(\Sigma mxz), \\
&-M_z - \mathfrak{M}_z = -M_z - \omega^2(\Sigma mxy).
\end{aligned}
$$

Freie Axe. Wenn keine äusseren Kräfte vorkommen und wenn zugleich

$$\mathfrak{R} = 0 \text{ och } \mathfrak{M} = 0$$

sind, d. h. wenn die Centrifugalkräfte sich das Gleichgewicht wie an einem freien starren Körper halten, so sind die Reactionen an der festen Axe gleich Null. Der Körper behält deshalb diese Axe als Umdrehungsaxe, auch wenn sie aufhört fest zu sein. Eine solche Axe heisst eine freie Axe. Gemäss den Gleichungen (567) und (569) sind die Bedingungen für eine freie Axe

$$
\begin{aligned}
&r_0 = 0, \\
(573)\qquad &\Sigma(mxy) = 0, \\
&\Sigma(mxz) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung $r_0 = 0$ giebt an, dass die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers gehen muss; die beiden letzteren Bedingungen drücken nach p. 623 aus, dass die freie Axe eine Hauptträgheitsaxe ist. Im allgemeinen besitzt der Körper also nur drei freie Axen, und zwar die centralen Hauptträgheitsaxen (siehe p. 623). Wenn aber das Centralellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, so giebt es unendlich viele freie Axen, d. h. alle Durchmesser in der Äquatorebene des Ellipsoids sowie die Um-

drehungsaxe selbst. Wäre das Centralellipsoid eine Kugel, so wären alle Schwerpunktaxen freie Axen.

Ein Beispiel einer freien Axe bietet die Erdaxe dar. Allgemeiner ist die Umdrehungsaxe jedes homogenen Umdrehungskörpers eine freie Axe.

Gleichförmige Drehung unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Ein starrer Körper, auf den nur die Schwerkraft wirkt, kann eine gleichförmige Drehung um eine feste verticale Axe besitzen, weil das Moment der Schwere in Bezug auf diese Axe gleich Null ist. Ein schwerer Körper kann sich auch gleichförmig um eine beliebige Axe durch den Schwerpunkt drehen.

§ 116.

Beispiele der gleichförmigen Drehung um eine feste Axe.

Physisches Centrifugalpendel.

1) Das Centrifugalpendel. Das physische Centrifugalpendel besteht aus einem starren Körper, welcher in einem Punkte O befestigt ist und unter dem Einfluss seiner Schwere sich derart um O dreht, dass der Schwerpunkt S mit gleichförmiger Bewegung einen Kreis um die Verticale OX als Axe beschreibt (Fig. 437). Der Körper kann sich gleichzeitig um die Axe OS drehen; es soll aber nur der Fall behandelt werden, in welchem der Körper ein homogener Umdrehungskörper mit der Axe OS ist und die Ebene XOS eine feste Ebene innerhalb des Körpers bleibt. Man kann eine solche Bewegung in der Weise zu Stande bringen, dass man den Körper an einer horizontalen, durch O geführten Charnieraxe aufhängt, welche die Drehung des Körpers um OX mit-

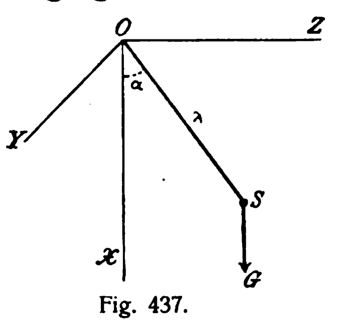


Fig. 437.

macht. Es sollen die Bedingungen für die Möglichkeit der Bewegung aufgestellt werden. Sind sie erfüllt, so geschieht die Bewegung in derselben Weise, als ob OX eine feste Axe wäre.

Da nur der Punkt O der Axe OX, um welche der Körper sich gleichförmig drehen soll, fest ist, müssen sämtliche Reactionen an der Axe auf eine einzige durch O gehende Resultirende zurückgeführt werden können. Bei der Reduction der Centrifugalkräfte und der Schwerkraft G für den Punkt O muss also das resultirende Paar verschwinden. Wählt man O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems mit einer verticalen x-Axe und einer in der Ebene SOX liegenden z-Axe, nennt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ω, bezeichnet ferner den Winkel XOS mit α und den Abstand OS mit λ, so ergiebt sich für die Grössen M_x, M_y, M_z und $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ in § 115,

$$\begin{aligned} M_x &= 0, \\ M_y &= G\lambda \sin \alpha, \\ M_z &= 0, \\ \mathfrak{M}_x &= 0, \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2 \Sigma(mxz), \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2 \Sigma(mxy). \end{aligned}$$

Das resultirende Paar verschwindet also, wenn die beiden Gleichungen

$$(574) \qquad \begin{aligned} G\lambda \sin \alpha - \omega^2 \Sigma(mxz) &= 0, \\ \Sigma(mxy) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Die zweite dieser Bedingungen ist in dem betrachteten Falle erfüllt, weil die Massenverteilung des Umdrehungskörpers symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene ist. In der ersten Gleichung kommt das Centrifugalmoment $\Sigma(mxz)$ in Bezug auf die xy- und die yz-Ebenen vor. Um der Gleichung eine zweckmässige Form zu geben, mögen

die x- und z-Axe in ihrer Ebene so gedreht werden, dass die neue x-Axe mit der Geraden OS zusammenfällt. Man erhält dann

$$x = x' \cos a - z' \sin a,$$
$$z = x' \sin a + z' \cos a$$

und

$$\Sigma(mxz) = \sin a \cos a \, \Sigma m(x'^2 - z'^2) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \, \Sigma(mx'z').$$

Weil die Massenverteilung des Rotationskörpers auch in Bezug auf die Ebene SOY symmetrisch ist, so hat man $\Sigma(mx'z') = 0$, und erhält

$$\Sigma(mxz) = \sin a \cos a \left\{ \Sigma m(x'^2 + z'^2) - 2\Sigma(mz'^2) \right\}$$

oder

$$\Sigma(mxz) = \sin a \cos a \, (K - 2Q),$$

wo K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die y-Axe und Q das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene SOY ist.

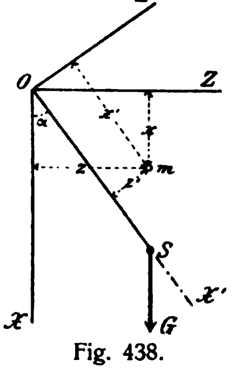


Fig. 438.

Aus der ersten Gleichung (574) ergiebt sich nun

$$(575) \qquad \cos a = \frac{G\lambda}{\omega^2 (K - 2Q)},$$

also eine Beziehung zwischen dem Winkel a und der constanten Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung.

Die Zeit T einer ganzen Umdrehung beträgt *Umlaufszeit.*

$$(576) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(K - 2Q) \cos a}{G\lambda}}.$$

Die Umlaufszeit des zusammengesetzten Centrifugalpendels stimmt mit der Umlaufszeit eines einfachen Centrifugalpendels von der Länge *Reducirte Pendellänge.*

$$(577) \qquad l = \frac{(K - 2Q) g}{G\lambda} = \frac{K - 2Q}{M\lambda}$$

überein. Die Grösse l heisst die reducirte Pendellänge des zusammengesetzten Centrifugalpendels.

Anwendung. Das einfachste zusammengesetzte Centrifugalpendel besteht aus zwei concentrirten Massen M und m (Fig. 439), welche vermittelst eines gewichtslosen, unbiegsamen, in O befestigten Stabes mit einander verbunden sind. Die Bedingungen in Bezug auf die Massenverteilung sind hier erfüllt und das Trägheitsmoment Q gleich Null, weil die Massen in der Ebene SOY liegen. Mit den Bezeichnungen der Figur 439 ergiebt sich

$$K = ML^2 + ml^2$$

und

$$G\lambda = g(ML - ml).$$

Fig. 439.

Die Gleichung (575) liefert dann als Beziehung zwischen ω und α

$$\text{(578)} \qquad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}\frac{ML - ml}{ML^2 + ml^2},$$

und die Gleichung (576) die Umlaufszeit

$$\text{(579)} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{(ML^2 + ml^2)\cos\alpha}{(ML - ml)g}}.$$

Die Gleichung (578) soll noch verallgemeinert werden, unter der Annahme, dass das Gewicht des Stabes berücksichtigt wird. Es sei das Stabgewicht gleich μg und gleichförmig über die ganze Länge des Stabes verteilt. Der Abstand d des Punktes O von dem Halbirungspunkte des Stabes beträgt

$$d = \frac{L - l}{2};$$

das Trägheitsmoment des Stabes in Bezug auf eine zu seiner Längsrichtung senkrechte Axe durch O ist nach den Formeln (533) und (521)

$$\frac{1}{12}\mu(L+l)^2+\mu\left(\frac{L-l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\mu(L^2-Ll+l^2).$$

Das statische Moment des Stabgewichtes in Bezug auf dieselbe Axe hat für die horizontale Lage des Stabes den Wert

$$\mu g d=\mu g\frac{L-l}{2}.$$

Für das ganze System findet man also

$$K=ML^2+ml^2+\frac{1}{3}\mu(L^2-Ll+l^2)$$

und

$$G\lambda=g\left\{ML-ml+\mu\frac{L-l}{2}\right\}.$$

Die Beziehung zwischen ω und α nimmt nunmehr die Form an

$$\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2}\frac{ML-ml+\frac{1}{2}\mu(L-l)}{ML^2+ml^2+\frac{1}{3}\mu(L^2-Ll+l^2)}.$$

Wenn die Massen M und m nicht in zwei Punkten concentrirt wären, sondern homogene Kugeln von den Radien R und r bilden würden, so käme zu K noch das Correctionsglied $\frac{2}{5}(MR^2+mr^2)$ (vergl. die Formel 539), es würde aber durch das damit gleich grosse Glied $2Q$ der Gleichung (575) wieder aufgehoben werden.

Centrifugal-regulator.

2) Centrifugalregulator von Watt. Die Figur 440 zeigt schematisch die Anordnung der Kugeln und Stäbe des sog. Centrifugal- oder Schwungkugelregulators. Er wird zur Regulirung des Dampfzuflusses im Cylinder und damit der Ganggeschwindigkeit einer Dampfmaschine benützt. Die längs der verticalen Umdrehungsaxe bewegliche Hülse EE' steht durch ein He-

belsystem in Verbindung mit dem Dampfventil. Die Kugelmittelpunkte und die Stabaxen liegen in einer Ebene, in welcher AA eine Symmetrieaxe für die ganze Figur ist. Zu dieser Ebene sind sämtliche Charnieraxen senkrecht. Das Gewicht jeder Kugel sei G, die Belastung der be-

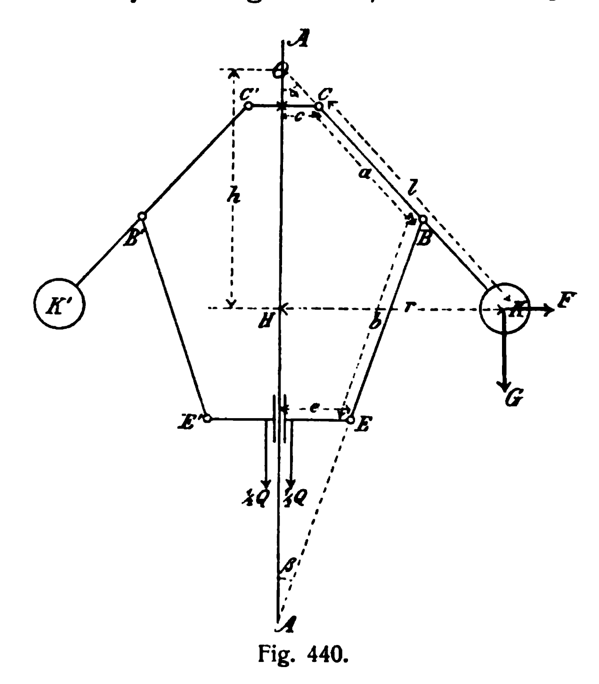


Fig. 440.

weglichen Hülse Q. Die Centrifugalkräfte für die Kugeln haben die Grösse

$$F = \frac{G}{g} r\omega^2, \tag{580}$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist. Der Einfluss der übrigen Centrifugalkräfte und der Gewichte der einzelnen Stäbe ist von geringerer Bedeutung und soll hier nicht in Betracht gezogen werden. Es soll die Beziehung gefunden werden zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung und der durch einen der

Winkel α oder β bestimmten Configuration des Regulators. Zwischen diesen beiden Grössen besteht die Gleichung

(581) $$c + a \sin \alpha = e + b \sin \beta.$$

Nach dem Princip von d'Alembert halten die äusseren Kräfte den Centrifugalkräften an dem veränderlichen System das Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsbedingung wird am einfachsten gefunden, wenn man dem System eine unendlich kleine virtuelle Verschiebung in seiner Ebene erteilt, wobei α in $\alpha + \delta\alpha$ übergeht, und die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null setzt. Mit den Bezeichnungen der Figur 441 ergiebt sich dabei

$$2F \cos \alpha \,.\, l\delta\alpha - 2G \sin \alpha \,.\, l\delta\alpha + \\ + Q\delta z = 0.$$

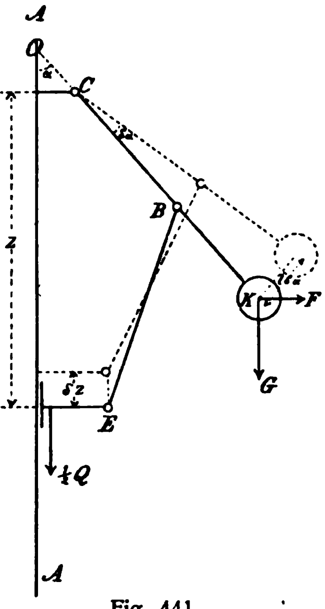


Fig. 441.

Die Grösse δz wird durch $\delta\alpha$ bestimmt. Man hat in der That

$$z = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

und erhält hieraus durch Differentiation

$$-\delta z = a \sin \alpha \,.\, \delta\alpha + b \sin \beta \,.\, \delta\beta.$$

Aus der Gleichung (581) folgt ferner

$$a \cos \alpha \,.\, \delta\alpha = b \sin \beta \,.\, \delta\beta.$$

Eliminirt man jetzt $\delta\beta$ und δz aus den drei Gleichungen, welche sie enthalten, so ergiebt sich

$$2F\cos\alpha\,.\,l\delta\alpha - 2G\sin\alpha\,.\,l\delta\alpha = Qa\,(\sin\alpha + \cos\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\beta)\,\delta\alpha,$$

wo $\delta\alpha$ allein vorkommt. Nach Einsetzung des Wertes von F findet man durch einfache Transformation die Gleichung

$$\omega^2 = \frac{g}{r}\,\mathrm{tg}\,\alpha\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q}{G}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right\}. \tag{582}$$

Wendet man noch die Bezeichnung

$$h = \frac{r}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

an, so wird

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q}{G}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right\}. \tag{583}$$

Bei der am meisten benützten rhombischen Anordnung ist $c = e$, $a = b$, also auch $\alpha = \beta$. Die Formel (583) liefert dann die einfachere Formel

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left\{1 + \frac{a}{l}\frac{Q}{G}\right\}. \tag{584}$$

§ 117.

Ungleichförmige Drehung um eine feste Axe.

Winkelbeschleunigung. Auf einen starren Körper, welcher eine feste Axe besitzt, mögen äussere Kräfte wirken, deren Momentensumme in Bezug auf die Axe nicht verschwindet. Die Drehung des Körpers um die feste Axe ist dann ungleichförmig. Nach der Gleichung (564) ist die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (siehe § 64)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{K}, \tag{585}$$

d. h. *die Winkelbeschleunigung ist gleich dem Quotienten aus der Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug*

auf die Drehaxe und dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf dieselbe Axe.

Die obige Ableitung der Gleichung (585) gründet sich auf das Princip der Flächen, aus dem ja die Gleichung (564) hervorgegangen war. Wegen der grossen Bedeutung der Formel (585) möge sie noch in anderer Weise abgeleitet werden, und zwar zunächst direct mit Hülfe des Princips von d'Alembert. Gemäss diesem Princip muss die Summe der Momente der äusseren Kräfte und der mit den effectiven Kräften entgegengesetzt gleichen Kräfte in Bezug auf die feste Axe gleich Null sein. Die Momentensumme der äusseren Kräfte ist mit M bezeichnet worden; für einen Punkt von der Masse m in dem Abstande r von der Axe setzt sich die effective Kraft aus der Componente $mr\omega^2$ längs des Radius nach innen und der Componente $mr\varepsilon$ längs der Tangente der kreisförmigen Bahn des Punktes zusammen. Das Moment der ersten Componente in Bezug auf die Drehaxe ist gleich Null, das Moment der zweiten Componente gleich $mr\varepsilon$. Die Momentensumme sämtlicher effectiven Kräfte ist also

$$\Sigma(mr^2\varepsilon) = \varepsilon\,\Sigma(mr^2) = \varepsilon K.$$

Mit Hülfe des Princips von d'Alembert ergiebt sich dann

$$M - K\varepsilon = 0$$

d. h.

$$\varepsilon = \frac{M}{K}$$

wie vorhin.

Der auf die Drehung angewandte Satz der lebendigen Kraft (p. 641) liefert

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2A}{K}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dA}{dt},$$

d. h.

(586) $$\varepsilon = \frac{1}{K} \frac{1}{\omega} \frac{dA}{dt}.$$

Bei einer Drehung um den Winkel ωdt ist die Arbeit der äusseren Kräfte

(587) $$dA = M\omega dt.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (586) ein, so erhält man wieder

$$\varepsilon = \frac{M}{K}.$$

Es sollen jetzt die Reactionen an der festen Axe für eine Zeit t berechnet werden, für welche die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε ist. Die Reactionen halten den äusseren Kräften und den Trägheitswiderständen das Gleichgewicht. Die Trägheitswiderstände sollen für denselben Punkt O wie in § 115

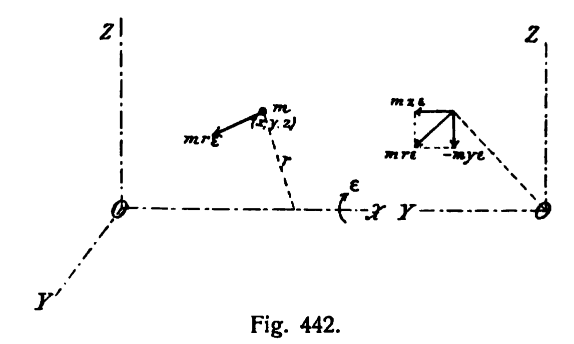


Fig. 442.

reducirt werden. Da die Centrifugalkräfte dort schon reducirt wurden, so ist es nur erforderlich die tangentialen, ε als Factor enthaltenden Componenten der Trägheitswiderstände zu reduciren. Eine einzelne Componente $mr\varepsilon$ (Fig. 442) liefert als Projectionen auf die x-,

y- und z-Axe die Ausdrücke 0, $mz\varepsilon$ und $-my\varepsilon$; ihre Momente in Bezug auf dieselben Axen haben die Grösse $-my^2\varepsilon - mz^2\varepsilon$, $mxy\varepsilon$ und $mxz\varepsilon$. Für den ganzen Körper ergiebt sich eine Resultirende mit den Componenten

$$(588)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}_x' &= 0, \\ \mathfrak{R}_y' &= \Sigma(mz\varepsilon) = \varepsilon\Sigma(mz) = \varepsilon M\zeta, \\ \mathfrak{R}_z' &= -\Sigma(my\varepsilon) = -\varepsilon\Sigma(my) = -\varepsilon M\eta \end{aligned}$$

und ein resultirendes Moment mit den Componenten

$$(589)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_x' &= -\Sigma(my^2\varepsilon) - \Sigma(mz^2\varepsilon) = -\varepsilon\Sigma m(y^2+z^2) = -\varepsilon K, \\ \mathfrak{M}_y' &= \Sigma(mxy\varepsilon) = \varepsilon\Sigma(mxy), \\ \mathfrak{M}_z' &= \Sigma(mxz\varepsilon) = \varepsilon\Sigma(mxz). \end{aligned}$$

Nimmt man auf die Formeln (566) und (568) Rücksicht, so erkennt man, dass das aus sämtlichen Trägheitswiderständen bestehende Kräftesystem durch die sechs Grössen

$$(590)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_x' &= 0, \\ \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_y' &= M(\omega^2\eta + \varepsilon\zeta), \\ \mathfrak{R}_z + \mathfrak{R}_z' &= M(\omega^2\zeta - \varepsilon\eta), \end{aligned}$$

$$(591)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_x' &= -\varepsilon K, \\ \mathfrak{M}_y + \mathfrak{M}_y' &= -\omega^2\Sigma(mxz) + \varepsilon\Sigma(mxy), \\ \mathfrak{M}_z + \mathfrak{M}_z' &= \omega^2\Sigma(mxy) + \varepsilon\Sigma(mxz) \end{aligned}$$

bestimmt ist. In diesen Ausdrücken könnte man noch

$$(592)\qquad \varepsilon = \frac{M_x}{K}$$

einsetzen, wo die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die feste Axe mit M_x bezeichnet ist.

Zu den Ausdrücken (590) und (591) liefern die äusseren Kräfte die Beiträge R_x, R_y und R_z sowie M_x, M_y und M_z. Kehrt man dann überall die Zeichen um, so erhält man ein mit den Reactionen äquivalentes Kräftesystem.

Eigenschaften einer freien Axe.

Die äusseren Kräfte mögen sich auf ein Kräftepaar von dem Momente M_x in einer zur Drehaxe senkrechten Ebene beschränken. Es wird gefragt, wann die Drehaxe eine Drehaxe bleibt, auch wenn sie nicht fest ist. Dazu muss zunächst die Resultirende der Trägheitswiderstände gleich Null sein, was gemäss den Gleichungen (590) für

$$\eta = 0 \text{ und } \zeta = 0$$

eintrifft; die Drehaxe geht dann durch den Schwerpunkt des Körpers. Ferner muss das resultirende Paar der Trägheitswiderstände dem Kräftepaare M_x das Gleichgewicht halten. Nach den Gleichungen (591) sind die Bedingungen dafür

$$\Sigma(mxy) = 0$$

und

$$\Sigma(mxz) = 0,$$

während

$$M_x - \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x'$$

zufolge der Gleichung (592) von selbst verschwindet.

Alle diese Bedingungen drücken aus, dass die Drehaxe eine freie Axe (siehe p. 623) des Körpers sein muss. Sie bleibt Drehaxe, wenn der Körper ursprünglich frei und in Ruhe ist oder eine Winkelgeschwindigkeit um diese Axe besitzt, vorausgesetzt, dass nur das Kräftepaar M_x auf den Körper wirkt. Ist die Axe fest, so erfährt sie unter denselben Umständen keine Reactionen.

§ 118.

Beispiele der ungleichförmigen Drehung um eine feste Axe.

Sich drehende Welle ohne Reibung.

1) Eine Welle (Fig. 443) rotire ohne Reibung in ihren Lagern. Auf die Welle möge eine

zu ihrer Axe senkrechte, unveränderliche Kraft P in dem Abstande r von der Axe wirken. Die Kraft P kann man sich als die Spannung eines Fadens, welcher auf- oder abgewickelt wird, denken. Die Winkelbeschleunigung der ungleichförmigen Drehung ist

$$\varepsilon = \frac{Pr}{K},$$

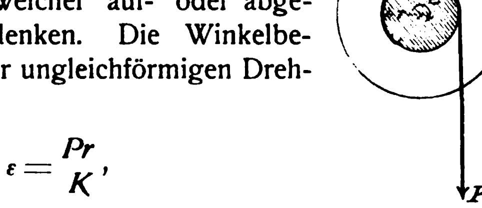


Fig. 443.

wo K das Trägheitsmoment der Welle in Bezug auf ihre Axe bezeichnet. Da ε constant ist, so ist die Drehung gleichförmig veränderlich. Bezeichnet man mit μ die auf den Abstand r reducirte Masse der Welle, so erhält man

$$K = \mu r^2$$

und

$$\varepsilon = \frac{Pr}{\mu r^2} = \frac{P}{\mu}\frac{1}{r}. \tag{593}$$

Ein Punkt in dem Abstande r besitzt eine Tangentialbeschleunigung

$$a_t = r\varepsilon = \frac{P}{\mu};$$

dieselbe Beschleunigung würde ein freier Punkt von der Masse μ unter dem Einfluss des Kraft P annehmen.

Es sei ω_0 die Winkelbeschleunigung zur Zeit $t = 0$; zur Zeit t ist dann

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

d. h.

$$\omega = \omega_0 + \frac{P}{\mu r} t. \tag{594}$$

Wäre die Welle ursprünglich in Ruhe, so hätte man

$$\omega = \frac{P}{\mu r} t.$$

Statt der Zeit t kann man auch den Weg s einführen, den ein Punkt im Abstande r von der Axe in seiner kreisförmigen Bahn zurücklegt. Setzt man $s = 0$ für $t = 0$, so ist

$$s = ct + \frac{r\varepsilon}{2} t^2.$$

Die Constante c ergiebt sich aus der Winkelgeschwindigkeit ω_0 zur Zeit $t = 0$. Man hat

$$c = r\omega_0$$

und erhält damit

$$s = r\{\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2\} = r\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\frac{P}{\mu} t^2. \tag{595}$$

Eliminirt man t zwischen den Gleichungen (594) und (595), so erhält man die Beziehung

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2Ps}{\mu r^2} \tag{596}$$

zwischen ω und s. Dasselbe Resultat liefert das Princip der lebendigen Kraft, und zwar in der Form

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2A}{K},$$

wo A die während der Zeit t von der Kraft P ausgeführte Arbeit ist.

Sich drehende Welle, mit Berücksichtigung der Reibung.

2) Rie Reibung soll berüksichtigt werden. Eine Welle liege in zwei gleichen cylindrischen Lagern (Fig. 444), in welchen Reibung stattfindet; auf sie wirke eine zur Axe senkrechte Kraft P in dem Abstande r. Nimmt man an, dass P vertical ist, so erhält man in beiden Lagern einen Zapfendruck $\frac{1}{2}(G + P)$, wo G die

Schwere der Welle bezeichnet. Ist ϱ der Radius der Zapfen und f der Zapfenreibungscoefficient, so ist die Summe der Zapfenreibungsmomente

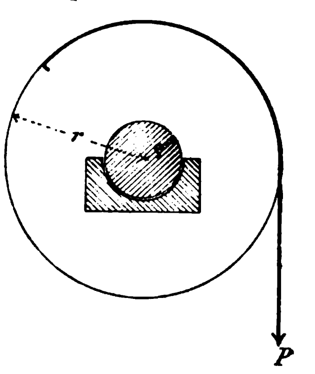


Fig. 444.

$$2f\frac{G+P}{2}\varrho = f\varrho\,(G+P),$$

und das ganze Kraftmoment in Bezug auf die Axe der Welle

$$M = Pr - f\varrho\,(G+P).$$

Aus der Gleichung (585) ergiebt sich die Winkelbeschleunigung

$$(597) \qquad \varepsilon = \frac{Pr - f\varrho\,(G+P)}{K} = \frac{Pr - f\varrho\,(G+P)}{\mu r^2}.$$

Da ε constant bleibt, so ist die Drehung gleichförmig beschleunigt. Das Princip der lebendigen Kraft liefert die Gleichung

$$(598) \qquad \omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2A}{K} = \frac{2s}{K}\left\{P - f\frac{\varrho}{r}(G+P)\right\},$$

wo s der von einem Punkte in dem Abstande r von der Axe der Welle beschriebene Bogen ist und die Werte $s=0$, $\omega=\omega_0$ einander entsprechen.

Man nehme an, dass P gleich Null sei, und dass die Welle in einem gewissen Augenblicke die Winkelgeschwindigkeit ω_0 besitze, und untersuche, wann die Bewegung aufhört. Setzt man zu diesem Zwecke in der Gleichung (598) $P=0$ und $\omega=0$, so findet man

$$\omega_0^2 = \frac{2s}{K}f\frac{\varrho}{r}G$$

und

$$s = \frac{K}{G}\frac{\omega_0^2 r}{2f\varrho}.$$

Bezeichnet n die Anzahl der Umläufe, welche die Welle ausführt, bevor sie stehen bleibt, so ist

$$n = \frac{s}{2\pi r} = \frac{K}{G}\frac{\omega_0^2}{4\pi f\varrho}.$$

Atwoods Fallmaschine.

3) Atwoods Fallmaschine. Die Fallmaschine dient zur Ausführung von Experimenten über die Beschleunigung der Schwerkraft. Sie besteht aus einem sehr leicht beweglichen Rade mit einer horizontalen Axe, welche auf Frictionsrollen gelagert ist, und einem über das Rad gelegten Faden, an dessen Enden Gewichte aufgehängt werden können (Fig. 445). Bei der folgenden Berechnung sind das Gewicht des Fadens und die Reibung an der Axe vernachlässigt worden. Die angehängten Gewichte seien Mg auf der einen und $(M+m)g$ auf der anderen Seite; das Trägheitsmoment des Rades in Bezug auf seine Axe sei $K = \mu r^2$. In einem bestimmten Augenblicke besitzen die Gewichte eine gewisse Beschleunigung a, deren Richtung die Figur zeigt, und das Rad die Winkelbeschleunigung

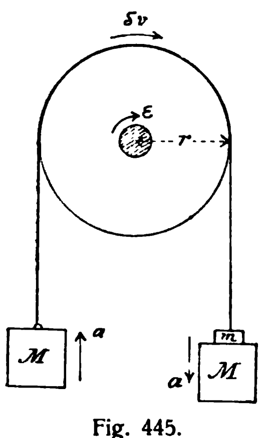


Fig. 445.

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

Die Grösse a soll jetzt mit Hülfe von d'Alemberts Princip berechnet werden. Für das Gewicht $(M+m)g$ rechts erhält man eine verlorene Kraft $(M+m)(g-a)$ mit der Richtung nach unten, für das Gewicht Mg links eine verlorene Kraft $M(g+a)$, die ebenfalls nach abwärts gerichtet ist. Dreht man das Rad um den unendlich kleinen Winkel δv, so liefern diese verlorenen Kräfte die virtuellen Arbeiten $(M+m)(g-a)r\delta v$ und $-M(g+a)r\delta v$, wäh-

rend die virtuelle Arbeit am Rade $-\varepsilon K\delta v = -\mu a r \delta v$ beträgt. Da die Summe dieser virtuellen Arbeiten gleich Null sein muss, so folgt

$$(M+m)(g-a)r\delta v - M(g+a)r\delta v - \mu a r\delta v = 0,$$

und

$$a = \frac{m}{2M+m+\mu} g. \tag{599}$$

Die Beschleunigung a bleibt also constant während der Bewegung; d. h. *die Bewegung des Systems ist gleichförmig beschleunigt.* Die Beschleunigung der Schwere ist in dem Verhältnis der Masse des Übergewichts zu der Summe sämtlicher bewegten Massen vermindert worden, wobei das Rad durch seine auf den Umfang reducirte Masse vertreten ist. Wenn das Rad eine cylindrische Scheibe ist, so ist die reducirte Masse gleich der Hälfte der wirklichen Masse.

Auch die Spannung des Fadens kann berechnet werden; sie ist gleich der verlorenen Kraft. Auf der Seite des Übergewichts findet man die Spannung

$$S = (M+m)(g-a) = \frac{(M+m)(2M+\mu)}{2M+m+\mu} g$$

und auf der anderen Seite die Spannung

$$S' = M(g+a) = \frac{M(2M+2m+\mu)}{2M+m+\mu} g.$$

4) Ein homogener Stab von überall gleicher Dicke liegt symmetrisch auf zwei Stützen in einer Horizontalebene (Fig. 446). Welches ist der Druck auf die eine Stütze in dem Augenblicke, in welchem die andere Stütze entfernt wird?

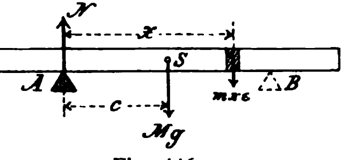


Fig. 446.

Um die Aufgabe zu lösen, denkt man sich den Stab als frei;

auf ihn wirken das Gewicht Mg im Schwerpunhte S und die unbekannte Reaction N im Stützpunkte A. Unmittelbar nach dem Entfernen der Stütze B ist die Bewegung eine Drehung um A mit der Winkelgeschwindigkeit 0 und einer Winkelbeschleunigung ε; die Gleichung (585) liefert

$$\varepsilon = \frac{Mgc}{K_s + Mc^2},$$

wo K_s das Trägheitsmoment des Stabes in Bezug auf die Axe durch den Schwerpunkt ist. Bezeichnet man den Trägheitsradius in Bezug auf diese Axe mit k, so ergiebt sich

$$K_s = Mk^2$$

und

$$\varepsilon = \frac{c}{k^2 + c^2} g.$$

Ein Massenelement m des Stabes, dessen Abstand von A gleich x ist, besitzt die Tangentialbeschleunigung $x\varepsilon$ lotrecht nach unten; dieser Beschleunigung entspricht die effective Kraft $mx\varepsilon$ nach unten und ein ebenso grosser Trägheitswiderstand nach oben. Setzt man die Projectionssumme der äusseren Kräfte, inclusive N, und der Trägheitswiderstände auf die Verticale gleich Null, so erhält man

$$Mg - N - \Sigma(mx\varepsilon) = 0,$$

oder

$$N = Mg - \varepsilon Mc.$$

Durch Einsetzen von ε findet man schliesslich

$$N = \frac{k^2}{k^2 + c^2} Mg. \tag{600}$$

Wäre c speciell gleich dem Trägheitsradius k, so würde sich $N = \frac{1}{2} Mg$ ergeben, d. h. gleich dem Drucke im Falle der Ruhe.

§ 119.

Das Schwungrad.

Zweck der Schwungräder.

Gemäss der Gleichung (585) ist die Winkelbeschleunigung der Drehung eines starren Körpers um eine feste

Axe umgekehrt proportional dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf diese Axe. Vergrössert man die Masse und das Trägheitsmoment des Körpers, während die äusseren Kräfte die gleichen bleiben, so vermindert sich der absolute Wert der Winkelbeschleunigung, und die Bewegung nähert sich einer gleichförmigen Drehung um die feste Axe. Um diesen Zweck zu erreichen, werden sog. Schwungräder benützt. Es werde z. B. die rotirende Bewegung der Triebwelle einer Dampfmaschine dadurch erzeugt, dass die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens durch die Schubstange auf das an der Triebwelle befestigte Schwungrad übertragen

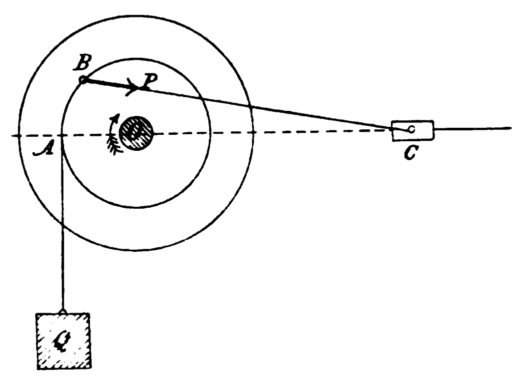


Fig. 447.

werde (Fig. 447). Auf die Welle wirkt ausser der Triebkraft P längs der Schubstange ein gewisser Widerstand Q, welcher von der auszuführenden nützlichen Arbeit abhängt. Es werde angenommen, dass Q unverändert bleibe und somit das constante Moment Qr (Fig. 448) in Bezug auf die feste Axe O liefere. Die Kraft P verändert ihre Grösse und Richtung; speciell ändert sie ihren Richtungssinn in den beiden Totlagen (vergl. p. 103). Um die Aufgabe der Bewegung des Schwungrades, deren vollständige Behandlung hier zu weit führen würde, möglichst zu vereinfachen, wollen wir die veränderliche

Vereinfachte Annahme.

Kraft P durch eine Kraft P von constanter Grösse ersetzen, welche parallel zu AC ist und ihren Richtungssinn in den beiden Totlagen wechselt (Fig. 448).

Man bezeichne mit ω_0 die Winkelgeschwindigkeit, wenn die Kurbel OB die Lage OA hat, die eine Totlage ist und $\varphi = 0$ entspricht. Die Bewegung des Schwungrades, welche nicht eine genau gleichförmige Drehung sein kann, muss periodisch sein, so dass die Winkelgeschwindigkeit nach einem ganzen Umlauf wieder den gleichen Wert ω_0 erlangt. Hierzu ist eine gewisse Beziehung zwichen P und Q erforderlich, welche zunächst abgeleitet werden soll. Am einfachsten bedient man sich des Princips der lebendigen Kraft; und zwar der Gleichung (548). Da die kinetische Energie des Schwungrades für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ dieselbe ist, so muss die gesamte von den Kräften P und Q während einer Umdrehung ausgeführte Arbeit gleich Null sein. Die Arbeit der Kraft P ist $2Pr$ während einer halben und $4Pr$ während einer ganzen Umdrehung, die Arbeit des Widerstandes Q beträgt $-2Q\pi r$. Man erhält also

Beziehung zwischen Kraft und Last.

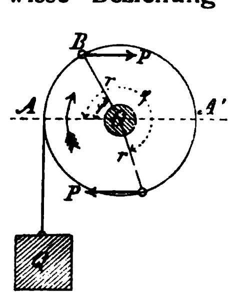


Fig. 448.

$$4Pr - 2Q\pi r = 0$$

und

$$Q = \frac{2}{\pi} P = 0.6366\, P. \tag{601}$$

Diese Beziehung wird als erfüllt vorausgesetzt; die Drehung ist dann periodisch.

Winkelgeschwindigkeit.

Um den Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung zu berechnen, muss die Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeit näher untersucht werden. Die Summe der Momente der Kräfte P und Q in Bezug auf die Axe O

hat den Wert $\pm Pr \sin\varphi - Qr$, wo das obere Zeichen für $0 < \varphi < \pi$, das untere Zeichen für $\pi < \varphi < 2\pi$ gilt. Die Winkelbeschleunigung ist also

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Pr}{K}\left\{\pm \sin\varphi - \frac{2}{\pi}\right\}, \tag{602}$$

wo K das Trägheitsmoment des Schwungrades und der Welle bezeichnet. Um die Winkelgeschwindigkeit ω in einer beliebigen Lage der Kurbel zu berechnen, benütze man das Princip der lebendigen Kraft. Während φ von 0 zu φ wächst, führen die Kräfte P und Q zusammen die Arbeit

(603)

$$A = Pr\{2 \mp (1 + \cos\varphi)\} - Qr\varphi = Pr\left\{2 \mp (1 + \cos\varphi) - \frac{2}{\pi}\varphi\right\}$$

aus, wo das obere Zeichen für die obere halbe Umdrehung, das untere Zeichen für die untere halbe Umdrehung gilt. Nach der Gleichung (548) erhält man dann

$$\tfrac{1}{2}K(\omega^2 - \omega_0^2) = A = Pr\left\{2 \mp (1 + \cos\varphi) - \frac{2}{\pi}\varphi\right\}$$

oder

$$\frac{K}{2Pr}(\omega^2 - \omega_0^2) = 2 \mp (1 + \cos\varphi) - \frac{2}{\pi}\varphi. \tag{604}$$

Die Veränderungen der Winkelgeschwindigkeit können mit Hülfe der Gleichungen (602) und (604) discutirt werden. Für $\varphi = 0$ ist ε negativ und die Winkelgeschwindigkeit ω nimmt mit wachsendem φ von ω_0 bis zu einem Werte $\omega_{\min}$, welcher sich für $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$ ergiebt, beständig ab. Man findet für den entsprechenden Wert α des Winkel φ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

(605) $$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}$$

und zwar berechnet man

(606) $a = 0.6901$ abs. Winkeleinh. $= 39°32'.4$.

Dann folgt

$$1 - \cos a - \frac{2}{\pi} a = -0.2105,$$

und ω_{min} ergiebt sich aus der Gleichung

(607) $$\frac{K}{2Pr}(\omega_{min}^2 - \omega_0^2) = 1 - \cos a - \frac{2}{\pi} a = -0.2105.$$

Wenn φ weiter über a hinaus wächst, so beginnt ω zuzunehmen, da ja $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ jetzt positiv ist. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liefert die Gleichung (604) $\omega = \omega_0$. Die Winkelgeschwindigkeit ω erreicht ihren grössten Wert ω_{max} für $\omega = \pi - a$, welcher Wert die Gleichung (605) erfüllt und $\varepsilon = 0$ giebt. Zur Bestimmung des Maximums dient die Gleichung

(608) $$\frac{K}{2Pr}(\omega_{max}^2 - \omega_0^2) = 1 - \cos(\pi - a) - \frac{2}{\pi}(\pi - a) =$$

$$= -1 + \cos a + \frac{2}{\pi} a = 0.2105.$$

Nachdem das Maximum erreicht ist, beginnt ω wieder abzunehmen, wird gleich ω_0 für $\varphi = \pi$ und gleich ω_{min} für $\varphi = \pi + a$; dann wächst ω innerhalb des Intervalls $\pi + a < \varphi < 2\pi - a$ bis zum Werte ω_0, welcher $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ entspricht, und dann weiter bis zu dem Werte ω_{max}, nimmt nachher ab und erreicht nach einem ganzen Umlauf des Rades wieder den ursprünglichen Wert ω_0. Dieselben Veränderungen wiederholen sich während der folgenden Umdrehungen. Die Fig. 449 veranschaulicht die Werte von ω und ε.

Aus den Gleichungen (607) und (608) ergiebt sich

$$(609) \qquad \frac{K}{2Pr}(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = 0.4210$$

$$\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2 = 2\omega_0^2.$$

Man bezeichne mit Ω einen durch die Gleichung

$$(610) \qquad \Omega = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

bestimmten mittleren Wert der Winkelgeschwindigkeit, und definire den Ungleichförmigkeitsgrad δ (vergl. p. 113) durch die Formel

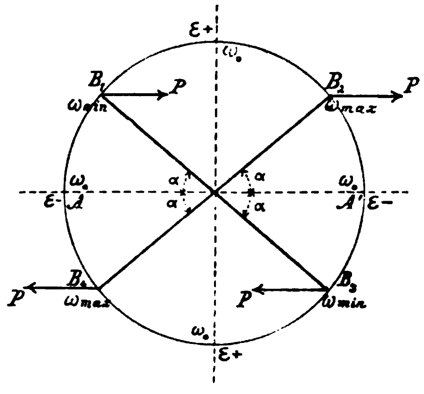


Fig. 449.

$$(611) \qquad \delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\Omega}.$$

Dann berechnet man aus den Gleichungen (609), (610) und (611)

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\delta\Omega^2 = 2 \times 0.4210 \frac{Pr}{K}$$

und

$$K = 0.4210 \frac{Pr}{\delta\Omega^2}.$$

Ersetzt man noch P durch Q mit Hülfe der Gleichung (601), so ergiebt sich

$$(612) \qquad K = 0.6613 \frac{Qr}{\delta\Omega^2}.$$

Vermittelst dieser Gleichung kann das erforderliche Trägheitsmoment des Schwungrades und der Welle berechnet

werden, wenn die mittlere Winkelgeschwindigkeit Ω und der Ungleichförmigkeitsgrad gegeben sind.

Anwendung.

Ein Schwungrad, das 80 Umdrehungen in der Minute macht, besteht aus einem schweren Kranz von 1 m Halbmesser und dazugehörenden Speichen zur Nabe hin. Wie schwer muss der Kranz sein, wenn der Arbeitswiderstand 750 kg in 0.4 m Entfernung von der Axe des Rades beträgt und der Ungleichförmigkeitsgrad $\frac{1}{25}$ nicht überschreiten darf?

Die Formel (612) liefert das erforderliche Trägheitsmoment des Schwungrades

$$K = 0.6613 \frac{750 \times 0.4}{0.04 \times \left(\frac{80}{60} 2\pi\right)^2} = 70.67 \text{ kg m Sec}^2.$$

Vernachlässigt man das Trägheitsmoment der Speichen und der Nabe des Rades, so findet man andererseits

$$K = \frac{G}{g} R^2 = \frac{G}{9.81} \text{ kg m Sec}^2.$$

Für das Gewicht des Kranzes ergiebt sich hieraus

$$G = 9.81 \times 70.67 = 693.9 \text{ kg}.$$

Wenn der Abstand des Angriffspunktes der unveränderlichen Kraft P von der Axe des Schwungrades 0.4 m beträgt, so erhält man

$$P = \frac{\pi}{2} 750 = 1178 \text{ kg}.$$

§ 120.

Das physische Pendel.

Physisches Pendel.

Das physische Pendel besteht aus einem starren Körper, welcher allein unter dem Einfluss der Schwere Schwingungen um eine feste horizontale Axe ausführt (Fig. 450). Der Abstand des Schwerpunktes S von der Aufhängeaxe O werde mit a, der Winkel, den die Ebene

durch den Schwerpunkt und die Axe O mit der Verticalebene einschliesst, mit φ, die Masse des Körpers mit M, sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Aufhängeaxe mit K bezeichnet. Das statische Moment der Schwerkraft in Bezug auf die Axe O ist dann

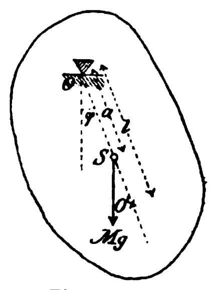


Fig. 450.

$$Mga \sin \varphi;$$

für die Winkelbeschleunigung ergiebt sich somit

$$\varepsilon = \frac{Mga \sin \varphi}{K}. \tag{613}$$

Für ein einfaches Pendel von der Länge l und der Masse m würde man $K = ml^2$ und

$$\varepsilon = \frac{mgl \sin \varphi}{ml^2} = \frac{g}{l} \sin \varphi \tag{614}$$

erhalten. Wählt man die Länge l so, dass

$$\frac{g}{l} = \frac{Mga}{K} \tag{615}$$

ist, so sind die Winkelbeschleunigungen des physischen und des einfachen Pendels für denselben Wert des Ausschlagswinkels φ gleich gross. Sind ausserdem die Anfangsamplituden die gleichen, so stimmen die Bewegungen des einfachen Pendels und der Geraden SO des physischen Pendels mit einander völlig überein. Beide Pendel besitzen auch dieselbe Schwingungszeit; dies gilt mit grosser Genauigkeit noch, wenn die Anfangsamplituden nicht gleich gross sind, weil ja die Anfangsamplitude einen fast unmerklichen Einfluss auf die Schwingungszeit ausübt, so lange sie klein bleibt (vergl. p. 215). Die durch die Gleichung (615) bestimmte Länge

Reducirte Pendellänge.

$$l = \frac{K}{Ma} \tag{616}$$

des einfachen Pendels, dessen Schwingungen mit denjenigen des physischen Pendels isochron sind, heisst die reducirte Pendellänge des physischen Pendels. Nach der Gleichung (117) ist die Schwingungszeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{K}{Mga}}. \tag{617}$$

Schwingungsmittelpunkt. Reversionspendel.

Der Punkt O', welcher auf der Geraden OS in dem Abstande l von O liegt, heisst Schwingungsmittelpunkt. Der Schwingungsmittelpunkt hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Schwingungszeit des Pendels sich nicht ändert, wenn die frühere Aufhängeaxe durch eine ihr parallele, durch den Schwingungsmittelpunkt geführte neue Axe ersetzt wird. Hierauf gründen sich die sog. Reversionspendel. Sie sind mit zwei parallelen Schneiden versehen, deren Ebene durch den Schwerpunkt des Pendels geht und von welchen wenigstens die eine beweglich ist. Die Schneiden werden so eingestellt, dass die Schwingungszeit für beide die gleiche ist. Der Abstand der Schneiden von einander ist dann gleich der reducirten Pendellänge.

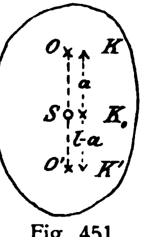


Fig. 451.

Um zu beweisen, dass die Schwingungszeit für Axen durch O und O' die gleiche ist, berechnet man die reducirte Pendellänge l' für die Axe O'. Zwischen den Trägheitsmomenten K, K_0 und K' in Bezug auf die zu einander parallelen Axen durch O, S und O' (Fig. 451) bestehen die Beziehungen

$$K = K_0 + Ma^2 = Mla,$$
$$K' = K_0 + M(l-a)^2.$$

Man findet daraus mit Hülfe der Gleichung (616)

$$K' = K + Ml^2 - 2Mla = Ml(l-a).$$

Für die reducirte Pendellänge l' ergiebt sich dann

$$l' = \frac{K'}{M(l-a)} = \frac{Ml(l-a)}{M(l-a)} = l,$$

d. h. sie ist gleich der reducirten Pendellänge l für die Axe O. Folglich sind auch die Schwingungszeiten gleich, w. z. b. w.

Anwendungen.

1) Ein physisches Pendel bestehe aus einer homogenen Kugel vom Radius r und einem gewichtslosen Faden von der Länge $a-r$ (Fig. 452). Für das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die Aufhängeaxe O ergiebt sich mit Hülfe der Formeln (539) und (521)

$$K = Ma^2 + \frac{2}{5} Mr^2.$$

Die reducirte Pendellänge ist

$$l = \frac{K}{Ma} = a + \frac{2}{5}\frac{r^2}{a}. \tag{618}$$

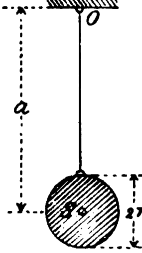


Fig. 452.

Das zweite Glied der rechten Seite ist gewöhnlich sehr klein im Verhältnis zum ersten Gliede.

2) Wenn das Pendel ein dünner, homogener Stab von constanter Dicke ist, welcher die Länge L hat und an dem einen Ende aufgehängt ist (Fig. 453), so erhält man mit Hülfe der Formeln (521), (616) und (533) für die reducirte Pendellänge den Wert

$$l = \frac{K}{M\frac{1}{2}L} = \frac{\frac{1}{4}ML^2 + \frac{1}{12}ML^2}{\frac{1}{2}ML} = \frac{2}{3}L. \tag{619}$$

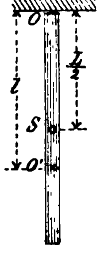


Fig. 453.

3) Das physische Pendel kann benützt werden, das Trägheitsmoment eines starren Körpers in Bezug auf eine Axe experimentell zu ermitteln. Zu diesem Zwecke hängt man den Körper so auf, dass diese Axe die horizontale Aufhängeaxe wird, lässt ihn schwingen und beobachtet die Schwingungszeit T. Wenn G das Gewicht des Körpers und a der Abstand seines Schwerpunktes von der Aufhängeaxe ist, so erhält man

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Ga}}$$

und folglich

(620)
$$K = \frac{T^2}{\pi^2} aG.$$

4) Eine Thür, deren Pfosten nach innen geneigt ist, wird ein wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt. Welcher Art ist die dabei entstehende Bewegung, wenn die Reibung in den Charnieren vernachlässigt werden kann?

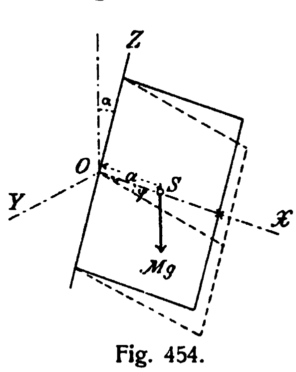


Fig. 454.

Der Neigungswinkel zwischen dem Pfosten und der Verticalen sei α (Fig. 454), ferner φ der Winkel, den die Ebene der Thür mit der Verticalebene durch die feste Axe einschliesst. Von dem Schwerpunkte S ziehe man eine Senkrechte SO auf die feste Axe, nehme OS als x-Axe, die feste Axe als z-Axe und die zu beiden Senkrechte als y-Axe an. In Bezug auf dieses Coordinatensystem liefert das Gewicht Mg der Thür die Componenten

$$Mg \sin\alpha \cos\varphi, \quad Mg \sin\alpha \sin\varphi, \quad -Mg\cos\alpha$$

nach der x-, y- und z-Axe. Nur die mittlere dieser Componenten hat ein Moment in Bezug auf die feste Axe, und zwar von der Grösse

$$Mg\, a \sin\alpha \sin\varphi,$$

wo a die x-Coordinate des Schwerpunktes ist. Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Thür in Bezug auf die z-Axe, so ist die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{Mga \sin\alpha}{K} \sin\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Werte (614), so erkennt man, dass die Schwingungen der Thür mit denjenigen eines einfachen Pendels von der Länge

$$l = \frac{K}{Ma \sin\alpha}$$

übereinstimmen. Die Schwingungszeit beträgt

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{K}{Mga \sin\alpha}}.$$

Die Formeln verlieren nur für $\alpha = 0$ ihre Bedeutung; der Pfosten ist dann vertical und es ist nur eine gleichförmige Drehung um ihn möglich.

§ 121.

Gleichzeitige translatorische und drehende Bewegung. Translatorische Bewegung.

Allgemeine Bewegung des freien starren Körpers.

Um die allgemeine Bewegung eines freien starren Körpers, auf den äussere Kräfte wirken, zu untersuchen, bestimmt man zunächst die Bewegung des Schwerpunktes mit Hülfe des in § 113 entwickelten Satzes. Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein materieller Punkt, dessen Masse gleich der Gesamtmasse des Körpers ist, und auf den mit den gegebenen äusseren Kräften gleich grosse und gleich gerichtete Kräfte wirken. Verschwindet die Resultirende der gegebenen Kräfte, so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig; wirkt nur die Schwerkraft, so ist die Bewegung die bekannte parabolische u. s. w. Dann untersucht man die relative Drehung des Körpers um den Schwerpunkt innerhalb eines Raumes, der eine mit der Bewegung des Schwerpunktes übereinstimmende translatorische Bewegung besitzt. Diese relative Drehung geschieht unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte und einer im Schwerpunkt angebrachten Kraft, welche entgegengesetzt gleich der Resultirenden ist (oder w. d. i. so, als ob der Schwerpunkt fest wäre und die gegebenen Kräfte auf den Körper wirken würden). Dieses Kräftesystem ist einem Kräftepaare äquivalent. Im allgemeinen ändert sich die Axe der Drehung mit der Zeit; nur in dem Falle, wo sie eine freie Axe des Körpers ist und die Ebene des Kräftepaares senkrecht zu ihr steht, verbleibt sie Drehaxe zu jeder Zeit, wenn sie es ursprünglich war.

Wenn der Geschwindigkeitszustand des starren Körpers in einem Augenblicke bekannt ist, d. h. wenn man

die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, die Axe der augenblicklichen Drehung um den Schwerpunkt und die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung kennt, so kann die kinetische Energie des Körpers in diesem Augenblicke berechnet werden.

Anwendungen.

Am Umfange eines homogenen Umdrehungskörpers vom Gewichte G ist ein gewichtsloser Faden befestigt und in einer durch den Schwerpunkt normal zur Axe geführten Ebene um den Körper gewickelt. (Fig. 455). An dem freien Ende des Fadens wirkt eine unveränderliche Kraft P. Welche Bewegung nimmt der Körper an, wenn er ursprünglich in Ruhe war?

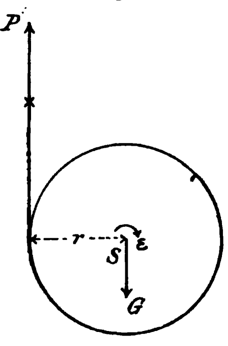


Fig. 455.

Der Schwerpunkt bewegt sich längs der Verticalen mit einer constanten, nach unten gerichteten Beschleunigung von der Grösse

$$a = \frac{G-P}{M} = \frac{G-P}{G} g.$$

Bezeichnet man mit s die Fallhöhe des Schwerpunktes und wählt $s = 0$ für $t = 0$, so ist die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes

$$s = \tfrac{1}{2} a t^2 = \tfrac{1}{2} \frac{G-P}{G} g t^2.$$

Für $G > P$ erfolgt die Bewegung nach unten, für $G < P$ nach oben; ist $G = P$, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe.

Die Axe des Umdrehungskörpers ist eine freie Axe; sie bleibt Drehaxe und verschiebt sich zu sich selbst parallel in der Verticalebene. Die Winkelbeschleunigung ε der Drehung hat den unveränderlichen Wert

$$\varepsilon = \frac{Pr}{K} = \frac{P}{\mu r};$$

die Tangentialbeschleunigung eines Punktes in dem Abstande r von der Axe beträgt

$$r\varepsilon = \frac{P}{\mu}.$$

Die Drehung ist gleichförmig beschleunigt und besitzt die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{P}{\mu r} t.$$

Die Beschleunigung eines Punktes auf dem geraden Teile des Fadens ist

$$r\varepsilon - a = \frac{P}{\mu} - \frac{G-P}{M}$$

und wird positiv nach oben gerechnet. Würde man das freie Ende des Fadens befestigen, so müsste diese Beschleunigung Null sein und man erhielte als Spannung des Fadens

$$P = \frac{\mu}{M+\mu} G.$$

In diesem Falle ist die Beschleunigung der Bewegung des Schwerpunktes

$$a = r\varepsilon = \frac{P}{\mu} = \frac{M}{M+\mu} g.$$

Wäre der Körper ein Cylinder, das Ende des Fadens frei und $P = G$, so würde sich $a = 0$ ergeben, d. h. der Schwerpunkt würde in Ruhe bleiben; ausserdem hätte man

$$r\varepsilon = 2g,$$

d. h. die Tangentialbeschleunigung in dem Abstande r wäre doppelt so gross als die Beschleunigung der Schwere.

Wäre dagegen das Ende des Fadens fest, so erhielte man

$$a = r\varepsilon = \frac{2}{3} g$$

und als Spannung des Fadens

$$P = \frac{1}{3} G.$$

Damit sich die Bewegung des starren Körpers auf eine translatorische Bewegung ohne Drehung beschränke, darf keine ursprüngliche Drehung vorhanden sein und müssen die äusseren Kräfte in jedem Augenblick eine Re-

sultirende liefern, welche durch den Schwerpunkt geht, dagegen kein resultirendes Kräftepaar.

Als Beispiel soll die gleitende Bewegung eines parallelepipedischen Blockes längs einer horizontalen Unterlage unter dem Einfluss der horizontalen Kraft H untersucht werden (Fig. 456 a und b). Man verlangt besonders die Bedingungen zu finden, die erfüllt sein müssen, damit der Block nicht umkippt. Die Unterlage übt auf den Block einen Druck N aus, der gleich dem Gewichte Mg des Blockes ist. Wenn keine Reibung vorhanden ist, so wirken Mg und N längs der Verticalen durch den Schwerpunkt; die Kraft H muss dann durch den Schwer-

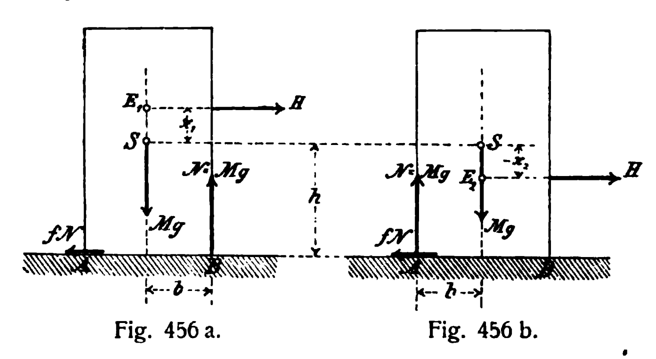


Fig. 456 a. Fig. 456 b.

punkt S gehen. Kommt dagegen Reibung vor, so giebt es ein gewisses Gebiet, innerhalb dessen die Kraft H in der Verticalebene verschoben werden kann, ohne dass die Bewegung aufhört translatorisch zu sein. In der einen Grenzlage wirkt der Druck N in dem Punkte B, die Kraft H schneidet dann die Verticale des Schwerpunktes in einem Punkte E_1; in der anderen Grenzlage wirkt N in dem Punkte A; H schneidet die Verticale von S in einem Punkte E_2. Man erhält die Lagen von E_1 und E_2, indem man die Momentensumme der Kräfte Mg, N, fN und H in Bezug auf den Schwerpunkt S gleich Null setzt. Mit den Bezeichnungen der Figur ergiebt sich dabei

$$Hx_1 - Nb + fNh = 0,$$
$$Hx_2 + Nb + fNh = 0,$$

somit

$$x_1 = \frac{N}{H}(b - fh) = \frac{Mg}{H}(b - fh),$$

$$x_2 = -\frac{N}{H}(b + fh) = -\frac{Mg}{H}(b + fh).$$

Die Grösse x_2 ist immer negativ, d. h. E_2 liegt unterhalb des Schwerpunktes; x_1 kann positiv oder negativ sein, d. h. E_1 kann oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes liegen.

Schneidet die Richtungslinie der Kraft H die Verticale des Schwerpunktes in einem Abstande x von S, welcher die Bedingungen

$$x_2 \gtreqless x \leqq x_1$$

erfüllt, so ist die Bewegung stabil und hat die Beschleunigung

$$a = \frac{H - fMg}{M}.$$

Mit Anwendung eines durch die Gleichung

$$H = Mg \operatorname{tg} \alpha$$

bestimmten Winkels α findet man

$$a = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi)\, g = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \cos \varphi}\, g.$$

Die Bewegung ist beschleunigt für $\alpha > \varphi$ oder $H > fN$, verzögert für $\alpha < \varphi$ oder $H < fN$.

§ 122.

Bewegung eines Umdrehungskörpers auf der schiefen Ebene.

Ein interessantes Beispiel der gleichzeitigen translatorischen und drehenden Bewegung eines starren Körpers bietet ein homogener Umdrehungskörper, der

unter dem Einfluss seiner Schwere sich so auf einer schiefen Ebene bewegt, dass die horizontal liegende Umdrehungsaxe sich translatorisch parallel der Ebene verschiebt. Es werde angenommen, dass der Umdrehungskörper symmetrisch in Bezug auf die Ebene des Parallelkreises ist, die den Schwerpunkt enthält. Bei der Bewegung wird die Ebene entweder von diesem Kreise oder von einer Anzahl von Kreisen berührt, welche denselben Radius r besitzen und symmetrisch in Bezug auf den Parallelkreis des Schwerpunktes liegen. Die Spuren auf der schiefen Ebene sind Falllinien (Fig. 457).

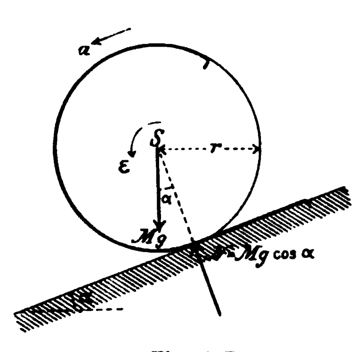


Fig. 457.

Weil der Abstand des Schwerpunktes von der schiefen Ebene unveränderlich bleibt, so besitzt der Schwerpunkt keine Beschleunigung senkrecht zu dieser Ebene; der normale Druck N der Ebene gegen den Körper ist deshalb gleich der zur Ebene senkrechten Componente $Mg \cos \alpha$ der Schwere.

Würde kein tangentialer Widerstand längs der Ebene wirken und wäre der Körper ursprünglich in Ruhe oder hätte er eine translatorische Bewegung, so würde er eine translatorische oder gleitende Bewegung ausführen ohne zu rollen, und zwar bestimmt man diese Bewegung mit Hülfe des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes. Das Gleiten ist gleichförmig beschleunigt mit der zu den Falllinien der schiefen Ebene parallelen Beschleunigung $g \sin \alpha$ in der Richtung abwärts.

Wenn es dagegen einen tangentialen Widerstand giebt, wie angenommen werden soll, so besteht die Bewegung in einem Rollen, das mit einem Gleiten verbunden ist, oder in einem Rollen ohne Gleiten.

Rollen ohne Gleiten.

Zunächst soll das Rollen ohne Gleiten untersucht werden. Die notwendige Bedingung dafür ist, dass der tangentiale Widerstand eine genügende Stärke besitze. Man kann diesen Fall auch so herbeiführen, dass man einen Faden um den Körper wickelt, das eine Ende am Körper und das andere an der schiefen Ebene befestigt, wie die Figur zeigt. Der Widerstand ist dann die noch unbekannte Spannung P des Fadens. Um P zu berechnen, beachte man, dass der Schwerpunkt die Beschleunigung

$$a = \frac{Mg \sin \alpha - P}{M}$$

parallel der schiefen Ebene besitzt. Die Tangentialbeschleunigung ε der Drehung um die Schwerpunktaxe ist

$$\varepsilon = \frac{Pr}{K} = \frac{P}{\mu r},$$

somit die Peripheriebeschleunigung

$$r\varepsilon = \frac{P}{\mu}.$$

Beim Rollen ohne Gleiten muss die Beschleunigung des Berührungspunktes des Körpers und der Ebene parallel der Ebene gleich Null sein. Man erhält folglich

$$a - r\varepsilon = \frac{Mg \sin \alpha - P}{M} - \frac{P}{\mu} = 0$$

und berechnet daraus

$$P = \frac{M\mu}{M + \mu} g \sin \alpha.$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes ist dann

$$a = \frac{Mg \sin \alpha - P}{M} = \frac{M}{M + \mu} g \sin \alpha \tag{621}$$

und die Winkelbeschleunigung der Drehung um die Schwerpunktaxe

$$\varepsilon = \frac{P}{\mu r} = \frac{M}{(M+\mu)r} g \sin a. \tag{622}$$

Beide bleiben unverändert während der Bewegung.

Gewöhnlich rührt der tangentiale Widerstand P, der bei der obigen Ableitung die Spannung eines Fadens war, von einer gleitenden Reibung her, welche unvollständig entwickelt sein kann. Die vollständig entwickelte Reibung hat die Grösse

$$F = fN = fMg \cos a,$$

und eine notwendige Bedingung des Rollens ohne Gleiten ist also

$$P \leqq F.$$

Setzt man hier die Werte von P und F ein, so findet man

$$\operatorname{tg} a \leqq \left(1 + \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \varphi\right). \tag{623}$$

Die Neigung der Ebene darf also eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Beim Rollen ohne Gleiten ist die Bewegung des Körpers in jedem Augenblicke eine Drehung um eine der Axe des Körpers parallele Axe durch die Berührungspunkte mit der Ebene; sämtliche Punkte dieser Axe besitzen keine Geschwindigkeit. Damit ein Rollen ohne Gleiten zu stande komme, muss nicht nur die Bedingung (623) erfüllt sein, sondern es dürfen die Punkte der genannten Axe auch ursprünglich keine Geschwindigkeit besitzen. Die Werte der Beschleunigung a und der Winkelbeschleunigung ε sind in den Formeln (621) und (622) enthalten.

Der directe, von einer rollenden **Reibung** (§ 104) herrührende Widerstand der Bewegung ist oben ausser Acht gelassen worden. Näheres hierüber folgt in § 123.

Anwendung.

Beim Rollen ohne Gleiten ist

für einen dünnen cylindrischen Ring	einen Cylinder	eine Kugel	einen materiellen Punkt
$\mu = M$	$\mu = \frac{1}{2} M$	$\mu = \frac{2}{5} M$	$\mu = 0$
$\operatorname{tg} \alpha \leqq 2 \operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \alpha \leqq 3 \operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \alpha \leqq \frac{7}{2} \operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \alpha \leqq \infty$
$a = \frac{1}{2} g \sin \alpha$	$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$	$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$	$a = g \sin \alpha.$

Wenn der Ring, der Cylinder und die Kugel gleichzeitig längs einer schiefen Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit zu rollen beginnen, so bewegt sich die Kugel am schnellsten, dann folgt der Cylinder und zuletzt der Ring.

Rollen mit Gleiten.

Die Bewegung des Umdrehungskörpers längs der schiefen Ebene ist wenigstens während einer gewissen Zeit ein mit Gleiten verbundenes Rollen, wenn die Geschwindigkeiten der Berührungspunkte des Körpers mit der schiefen Ebene anfänglich nicht gleich Null sind. Das Gleiten kann entweder während der ganzen Bewegung fortdauern oder es kann in einem bestimmten Augenblicke aufhören und nachher in ein Rollen ohne Gleiten übergehen. Im letzteren Falle muss die Bedingung (623) erfüllt sein. Während des mit einem Gleiten verbundenen Rollens wirkt die Reibung als eine Reibung der Bewegung; während des Rollens ohne Gleiten handelt es sich um eine im allgemeinen unvollständig entwickelte Reibung der Ruhe; nur in dem Grenzfalle ist sie vollständig entwickelt. Der Unterschied zwischen der vollständig entwickelten Reibung der Ruhe und der Reibung der Bewegung hat in einigen Fällen der Praxis eine Bedeutung; bei der folgenden Untersuchung werde jedoch vorausgesetzt, dass der Unterschied Null ist.

Zu der Anfangszeit $t = 0$ sei die translatorische Geschwindigkeit der Axe des Umdrehungskörpers c, positiv nach unten gerechnet, ferner sei die Peripheriegeschwindigkeit in der Drehung um die Axe v positiv in dem in der Figur 458 angegebenen Sinne; zur Zeit t mögen die Werte dieser Geschwindigkeiten bez. u und w sein. Beim

Beginn der Bewegung sei die Geschwindigkeit $c + v$ des Berührungspunktes von Null verschieden.

Die Bewegung des Schwerpunktes hat eine unveränderliche Beschleunigung

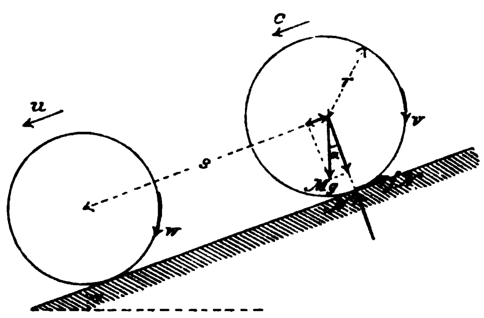


Fig. 458.

$$a = \frac{Mg \sin \alpha - fMg \cos \alpha}{M} =$$

(624)

$$(\sin \alpha - f \cos \alpha)\, g = \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}\, g$$

parallel der schiefen Ebene und abwärts gerichtet. Die Winkelverzögerung bei der Drehung um die Schwerpunktaxe ist

(625) $$\varepsilon = \frac{rfMg \cos \alpha}{K} = \frac{fMg \cos \alpha}{\mu r},$$

die Peripherieverzögerung ist

$$r\varepsilon = \frac{fM}{\mu} g \cos \alpha;$$

dieser Wert ändert sich nicht, so lange ein Gleiten stattfindet.

In den obigen Gleichungen wird vorausgesetzt, dass der Berührungspunkt abwärts gleite und der Reibungswiderstand nach oben gerichtet sei; wenn der Berührungspunkt nach oben gleitet, so muss man die Zeichen von f und φ umkehren. Es soll nun die Zeit bestimmt

werden, nach welcher die Geschwindigkeit $u + w$ das Vorzeichen ändert.

Zur Zeit t haben die Geschwindigkeiten u und w die Werte

$$u = c + at = c + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} gt,$$

$$w = v - r\varepsilon t = v - \frac{fM}{\mu} g \cos\alpha \,.\, t.$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes ist gleich Null, wenn

$$u + w = 0$$

d. h.

$$c + v + (a - r\varepsilon)\, t = 0.$$

Wird der zugehörige Zeitpunkt mit T bezeichnet, so ist also

$$T = \frac{c + v}{r\varepsilon - a} = \frac{c + v}{g \cos\alpha \left\{ \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha \right\}}. \tag{626}$$

Unter der Voraussetzung, dass $c + v > 0$, d. h. die Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunktes abwärts gerichtet ist, erkennt man, dass

$$\operatorname{tg}\alpha < \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) \operatorname{tg}\varphi$$

sein muss. Dies ist die Bedingung (623) für die Möglichkeit eines Rollens ohne Gleiten. Ist diese Bedingung erfüllt, so beginnt das Rollen ohne Gleiten in der Richtung abwärts zur Zeit T, zu welcher die Geschwindigkeit den Wert

$$u_1 = -w_1 = c + aT = -v + r\varepsilon T = \frac{c - \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right) v}{1 + \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right)}$$

besitzt.

Ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) \operatorname{tg} \varphi,$$

so erhält man $T = \infty$ und die Bewegung nähert sich mehr und mehr einem Rollen ohne Gleiten, das jedoch in Wirklichkeit nie eintritt.

Wenn $c + v < 0$ ist, wenn also der Berührungspunkt zur Zeit $t = 0$ aufwärts gleitet, so erlangt er die Geschwindigkeit Null zu einer Zeit T, welche aus der Gleichung

$$u + w = c + v + (a - r\varepsilon)\, T = 0$$

berechnet wird. Man findet daraus

$$T = \frac{-(c+v)}{g \cos \alpha \left\{\left(1 + \frac{M}{\mu}\right) \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha\right\}}. \tag{627}$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes hat zur Zeit T den Wert

$$u_1 = -w_1 = \frac{c - \frac{\mu}{M}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f}\right) v}{1 + \frac{\mu}{M}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f}\right)}.$$

Erfüllt der Neigungswinkel α die Bedingung

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) \operatorname{tg} \varphi,$$

so ist die Bewegung nach der Zeit T ein Rollen ohne Gleiten. Ist dagegen α grösser als der obige Grenzwert, so fängt nach der Zeit T ein mit Gleiten verbundenes Rollen in entgegengesetzter Richtung an.

Anwendungen.

Wenn die Bewegung des Umdrehungskörpers längs einer horizontalen Ebene vor sich geht, so bleibt sie ein Rollen ohne Gleiten, wenn

sie es ursprünglich war, d. h. wenn $c+v=0$ ist. Es werde aber zunächst angenommen, dass $c+v>0$ sei. Mit den Bezeichnungen der Figur 458 erhält man dann

$$a=-fg,$$

$$r\varepsilon=f\frac{M}{\mu}g,$$

$$u=c+at=c-fgt,$$

$$w=v-r\varepsilon t=v-f\frac{M}{\mu}gt,$$

das Rollen ohne Gleiten beginnt zur Zeit

$$T=\frac{c+v}{f\left(1+\frac{M}{\mu}\right)g}. \tag{628}$$

Während der ersten Periode der Bewegung ist die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes

$$s=ct-\tfrac{1}{2}fgt^2.$$

Bis zur Zeit T hat der Schwerpunkt den Weg

$$L=\frac{(c+v)\left\{c\left(1+2\frac{M}{\mu}\right)-v\right\}}{2f\left(1+\frac{M}{\mu}\right)^2g}$$

zurückgelegt, und besitzt dann die Geschwindigkeit

$$U=\frac{\frac{M}{\mu}c-v}{1+\frac{M}{\mu}}. \tag{629}$$

Es ist bemerkenswert, dass nur T und L, nicht aber U von dem Reibungscoefficienten f abhängen.

Das nach dem Ende der ersten Zeitperiode beginnende Rollen ohne Gleiten verläuft gleichförmig mit der Geschwindigkeit U und geschieht in derselben Richtung oder in entgegengesetzter Richtung zu der Bewegung in der ersten Zeitperiode, je nachdem U positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem

$$v<\frac{M}{\mu}c \text{ oder } v>\frac{M}{\mu}c$$

ist. Im letzteren Falle giebt es einen Umkehrpunkt der Bewegung des Schwerpunktes, und zwar zur Zeit

$$T_1 = \frac{c}{fg} < T.$$

Wäre speciell

$$v = \frac{M}{\mu} c,$$

so kommt der Körper nach der Zeit

$$T_1 = T = \frac{c}{fg}$$

im Abstande

$$L = \frac{c^2}{2fg}$$

vom Ausgangspunkte zur Ruhe.

Es werde jetzt angenommen, dass $c + v < 0$ sei. In diesem Falle muss man das Zeichen von f umkehren, und erhält

$$a = fg,$$

$$\varkappa = -f \frac{M}{\mu} g.$$

$$u = c + fgt,$$

$$w = v + f \frac{M}{\mu} gt.$$

Das Rollen ohne Gleiten beginnt, wenn $u + w$ Null ist; dies tritt zur Zeit

$$T = -\frac{(c + v)}{f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right) g} \tag{630}$$

ein, im Abstande

$$L = \frac{(c + v)\left\{v - \left(1 + 2\frac{M}{\mu}\right) c\right\}}{2f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)^2 g}$$

vom Anfangspunkte. Nachdem das Gleiten aufgehört hat, ist die Geschwindigkeit der rollenden Bewegung

$$U = \frac{\frac{M}{\mu} c - v}{1 + \frac{M}{\mu}}; \tag{631}$$

man erkennt, dass U unabhängig von der Zeit ist.

2) Eine Kreissäge springt aus den Lagern und setzt ihre Bewegung längs eines horizontalen Brettes fort; wie geht die Bewegung vor sich?

In diesem Falle ist

$$c = 0$$

und annähernd

$$\mu = \tfrac{1}{2} M.$$

Die Gleichung (629) liefert für die Geschwindigkeit U des vollständigen Rollens

$$U = -\tfrac{1}{3} v,$$

also den dritten Teil der Peripheriegeschwindigkeit der Drehung. Das Rollen geschieht in der Richtung, welche durch die Geschwindigkeit des höchsten Punktes der Kreissäge angegeben wird.

3) Es soll das Princip der lebendigen Kraft auf die Bewegung eines Umdrehungskörpers angewandt werden, der ohne zu gleiten längs einer schiefen Ebene rollt. Mit Hülfe des auf p. 645 aufgestellten Ausdruckes für die kinetische Energie eines rollenden Körpers findet man

$$\tfrac{1}{2} (M + \mu)(u^2 - c^2) = A = Mgs \sin \alpha,$$

und also

$$u = \pm \sqrt{c^2 + 2 \frac{M}{M + \mu} gs \sin \alpha},$$

wo der Weg s und die Geschwindigkeit u positiv in der Richtung abwärts gerechnet sind.

Beispielweise ergiebt sich für die auf p. 683 betrachteten Umdrehungskörper, nachdem sie ohne Anfangsgeschwindigkeit auf gleich langen Wegen längs derselben schiefen Ebene abwärts gerollt sind,

für den Ring	für den Cylinder	für die Kugel
$u = \sqrt{gs \sin \alpha}$	$u = \sqrt{\tfrac{4}{3} gs \sin \alpha}$	$u = \sqrt{\tfrac{10}{7} gs \sin \alpha}$.

§ 123.

Bewegung der Fuhrwerke. Zapfenreibung. Rollende Reibung.

Bewegung der Fuhrwerke, ohne Zapfenreibung und rollende Reibung.

Bei einem Fuhrwerk, das sich auf einer geneigten Bahn bergan oder bergab bewegt, hat die Hauptmasse des Fuhrwerkes eine translatorische Bewegung und ein kleinerer Teil, bestehend aus den Rädern oder den Rädern nebst den Axen, eine rollende Bewegung. Es sei m die

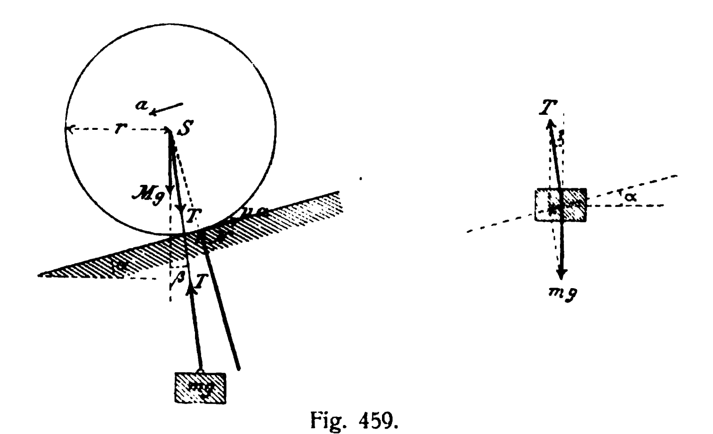


Fig. 459.

Masse, welche sich translatorisch bewegt, M die Masse derjenigen Teile, welche rollen. Vernachlässigt man zunächst die Zapfenreibung und die rollende Reibung an der Unterlage, so ist die Berechnung der Beschleunigung der Bewegung die gleiche wie bei der rollenden Bewegung eines Umdrehungskörpers von der Masse M, an dessen Axe eine Masse m z. B. vermittelst eines Seiles so aufgehängt oder aufgelagert ist, dass sie nur an der translatorischen Bewegung teilnimmt (Fig. 459). Das Seil schliesst mit der Verticalen einen Winkel β ein; in demselben findet eine gewisse Spannung T statt. Die Beschleunigung der Bewegung der Axe sei a. Beim Rollen wirkt eine un-

vollständig oder vollständig entwickelte gleitende Reibung von der Grösse μa (vergl. p. 681) aufwärts, wo μ die auf den Umfang des Berührungskreises reducirte Masse des Umdrehungskörpers ist. Der Schwerpunkt des als frei gedachten gesamten Systems bewegt sich so, als ob die Masse $M+m$ im ihm concentrirt wäre, die Schwerkraft $(M+m)g$, der normale Druck N an der Unterlage und der Reibungswiderstand μa auf ihn wirken würden. Durch Aufstellung der Projectionsgleichungen für die Richtungen parallel der Ebene und senkrecht zu ihr findet man dann

$$(M+m)\,g\sin\alpha - \mu a - (M+m)\,a = 0,$$

$$(M+m)\,g\cos\alpha - N = 0.$$

Die letztere Gleichung liefert den normalen Druck N, die erstere die Beschleunigung

$$a = \frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{M+m+\mu}. \tag{632}$$

Um die Spannung T des Seiles und den Winkel β zu berechnen, beachte man, dass die Masse m unter dem Einfluss ihres Gewichtes mg und der nach oben gerichteten Spannkraft T die Beschleunigung a parallel der schiefen Ebene annimmt. Aus den Projectionsgleichungen für die horizontale und die verticale Richtung ergiebt sich

$$\begin{aligned} T\cos\beta - mg &= -\,ma\sin\alpha, \\ T\sin\beta &= ma\cos\alpha, \end{aligned} \tag{633}$$

wo der Wert von a noch eingesetzt werden müsste.

Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt. Ist $\alpha = 0$, d. h. geschieht die Bewegung in einer horizontalen Ebene, so ist sie gleichförmig.

Einfluss der Zapfenreibung.

Wenn der Körper vom Gewichte mg auf der Axe des rollenden Körpers gelagert ist (Fig. 460) und in den Lagern eine Zapfenreibung stattfindet, so ist der Wert der Beschleunigung a etwas von dem Werte (632) verschieden. Wird der Zapfendruck mit T bezeichnet, so ist das Zapfenreibungsmoment genügend genau gleich

$$f\varrho T,$$

wo ϱ der Zapfenradius und f der Zapfenreibungscoefficient ist. Die Winkelbeschleunigung der Drehung ist bei der Bewegung abwärts

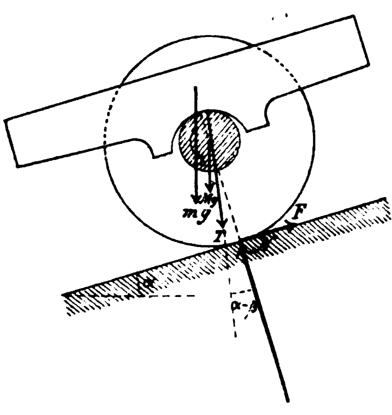


Fig 460.

$$\varepsilon = \frac{Fr - f\varrho T}{K} = \frac{Fr - f\varrho T}{\mu r^2},$$

wo F den Reibungswiderstand bezeichnet, welcher an der Ebene entwickelt werden muss. Daraus folgt

$$a = r\varepsilon = \frac{F - f\frac{\varrho}{r}T}{\mu}$$

und als Wert von F

$$F = \mu a + f\frac{\varrho}{r}T.$$

Wendet man den Satz von der Bewegung des Schwerpunktes auf das ganze System an, so findet man die Gleichung

$$(634) \qquad (M + m) g \sin\alpha - \mu a - f\frac{\varrho}{r}T = (M + m)a.$$

Für T und β gelten die Gleichungen

$$T \cos \beta = mg - ma \sin \alpha,$$

$$T \sin \beta = ma \cos \alpha$$

wie vorhin. Für die Bestimmung von a könnte man eine Gleichung zweiten Grades ableiten, deren eine Wurzel den gesuchten Wert liefern würde. In Wirklichkeit ist a eine kleine Grösse; man erhält den Einfluss der Zapfenreibung genügend genau, wenn man

$$T = mg$$

wählt, und findet dann aus der Gleichung (634)

$$a = \frac{(M + m) g \sin \alpha - fmg \frac{\varrho}{r}}{M + m + \mu}. \tag{635}$$

Die Formeln gelten noch, wenn die Masse M mehreren gleichen Räderpaaren angehört und mg eine auf den Axen dieser Räder verteilte Totalbelastung ist, wie z. B. für einen Eisenbahnwagen, ein Fuhrwerk u. s. w.

Die Gleichung (635) zeigt, dass die Beschleunigung die gleiche ist wie für einen materiellen Punkt von der Masse $M + m + \mu$, auf den die Componente $(M + m) g \sin \alpha$ des Gewichtes des Systems parallel der Ebene und ausserdem eine von der Zapfenreibung herrührende Kraft

$$X = fmg \frac{\varrho}{r} \tag{636}$$

entgegengesetzt der Richtung der Bewegung wirken. Man nennt X den auf den Radumfang reducirten Zapfenreibungswiderstand, weil sein Moment in Bezug auf die Radaxe, d. h.

$$Xr = f\varrho mg$$

gleich dem Momente der Zapfenreibung ist.

Einfluss der rollenden Reibung.

Die rollende Bewegung abwärts ist gleichförmig, wenn der Neigungswinkel den durch die Gleichung

$$\sin \alpha_1 = f \frac{\varrho}{r} \frac{m}{M+m} \tag{637}$$

bestimmten Wert hat.

Bei der Bewegung aufwärts muss das Zeichen der Grösse f in der Formel (635) durch das entgegengesetzte Zeichen ersetzt werden.

Ausser der Zapfenreibung in den Axenlagern wirkt die rollende Reibung als ein Hindernis bei der Bewegung. Nach § 104 liefert dieser Widerstand in Bezug auf die Axe des Körpers das Moment $e(M+m)g\cos\alpha$, wo der Coefficient f des § 104 zum Vermeiden einer Verwechselung durch e ersetzt worden ist; man kann also diesen Widerstand durch eine Kraft

$$Y = \frac{e}{r}(M+m)g\cos\alpha$$

am Radumfang darstellen. Da α klein ist, so genügt auch der Näherungswert

$$Y = \frac{e}{r}(M+m)g. \tag{638}$$

Allgemeine Formeln.

Zieht man jetzt sowohl die Zapfenreibung als auch die rollende Reibung in Betracht, so erhält man für die Bewegung abwärts die Beschleunigung

$$a = \frac{(M+m)g\sin\alpha - fmg\frac{\varrho}{r} - \frac{\varrho}{r}(M+m)g}{M+m+\mu} =$$

$$= \frac{(M+m)g\sin\alpha - X - Y}{M+m+\mu} \tag{639}$$

und für die Bewegung aufwärts die Beschleunigung

(640) $$a = \frac{(M+m) g \sin a + X + Y}{M + m + \mu},$$

wo a fortwährend positiv abwärts gerechnet worden ist.

Die Bewegung abwärts ist gleichförmig bei einer durch die Gleichung

(641) $$\sin a_1 = f \frac{\varrho}{r} \frac{m}{M+m} + \frac{e}{r}$$

bestimmten Neigung a_1.

Mit einer genügenden Annäherung können die Sinusse der kleinen Winkel a und a_1 durch die Winkel selbst ersetzt werden. Dabei liefern die Gleichungen (639) und (640)

(642) $$a = \frac{(M+m)(a \mp a_1)}{M+m+\mu} g,$$

wo das Zeichen — für die Bewegung nach unten, das Zeichen + für die Bewegung nach oben gilt und a positiv abwärts gerechnet wird.

Um eine gleichförmige Bewegung aufwärts zu erhalten, ist eine der Bewegungsrichtung parallele Zugkraft von der Grösse

$$P = (M+m) g \sin a + X + Y$$

oder einfacher

(643) $$P = (M+m)(a + a_1) g$$

erforderlich.

Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung gross ist, so muss man ausser den jetzt behandelten Widerständen noch den Luftwiderstand in Betracht ziehen.

§ 124.

Übungsaufgaben betreffend die Bewegung der starren Körper.

1) Man leite die für das Centrifugalpendel geltenden Formeln (578) und (579) durch directe Anwendung des Princips von d'Alembert ab.

2) Die Reactionen an der festen Axe eines sich gleichförmig drehenden Körpers sollen auf drei Kräfte reducirt werden, von welchen eine längs der Axe und die beiden anderen senkrecht dazu und senkrecht zu einander wirken. Ausserdem sollen die Angriffspunkte der beiden letzteren Kräfte bestimmt werden.

3) Ein Faden liegt auf einer glatten horizontalen Scheibe, welche sich um eine verticale Axe dreht; er hat die Form eines Kreises mit dem Mittelpunkte auf der Axe. Man berechne die Spannung des Fadens.

4) Wie viel höher muss die äussere Schiene einer Eisenbahncurve mit gegebenem Radius liegen als die innere, damit eine Locomotive, welche die Curve mit bekannter Geschwindigkeit durchfährt, keinen Seitendruck auf die Schienen ausübe?

5) Man führe die im Beispiel 2) angezeigte Reduction der Reactionen an der Axe eines starren Körpers aus, der sich ungleichförmig um die Axe dreht.

6) Mit Hülfe von Fäden befestigt man die Gewichte P und Q an dem Rade und an der Welle des Rades an der Welle (p. 372). Welcher Art ist die Bewegung und wie gross sind die Spannungen der Fäden, wenn man ihre Gewichte vernachlässigt?

7) Man berechne die reducirte Länge eines physischen Pendels, das aus einem homogenen Stabe besteht, welcher am einen Ende eine homogene Kugel trägt und am anderen Ende befestigt ist.

8) Mit welcher Geschwindigkeit muss eine Schaukel sich durch die Gleichgewichtslage bewegen, damit sie rings herum schwinge? Die Zapfenreibung an der Aufhängeaxe werde vernachlässigt.

9) Wie gross muss die Winkelgeschwindigkeit der Schaukel in der untersten Lage sein, damit eine Person, welche sich auf der Schaukel befindet ohne sich mit den Händen fest zu halten, nicht herunterfalle, wenn die Schaukel rings herum schwingt?

10) Eine verticale Schraube dreht sich unter dem Einfluss ihres eigenen Gewichtes, und zwar ohne Reibung in der Schraubenmutter. Wie erfolgt die Bewegung und welches ist die kinetische Energie der Schraube in einem bestimmten Augenblicke?

11) Man leite für die Schwingungszeit des Bifilarpendels den Ausdruck

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

unter der Annahme kleiner Schwingungen ab. (Vergl. über die Bezeichnungen p. 438).

12) Mit welcher Geschwindigkeit muss eine Kugel längs der geneigten Rinne einer Kegelbahn bergan geworfen werden, damit sie

bis zum anderen Ende der Rinne gelange, wenn sie rollt ohne zu gleiten?

13) Ein Umdrehungskörper ist homogen und symmetrisch in Bezug auf die Ebene des Breitenkreises, der seinen Schwerpunkt enthält. Der Radius r dieses Kreises ist kleiner als der Radius R der Kreise, welche eine schiefe Ebene berühren, auf der der Körper sich befindet (Fig. 461). Um den Kreis vom Radius r ist ein Seil gelegt, dessen freier Teil parallel zur schiefen Ebene gespannt und in einem Punkte A befestigt ist. An der schiefen Ebene kommt gleitende Reibung vor. Wann verharrt der Körper in Ruhe und wann kommt er in Bewegung? Welches ist die Spannung des Seiles in beiden Fällen?

14) Das Seil im Beispiele 13) werde vom Punkte A losgelöst und durch eine Zugkraft T gespannt. Unter welchen Bedingungen wird der Körper bergan rollen ohne zu gleiten?

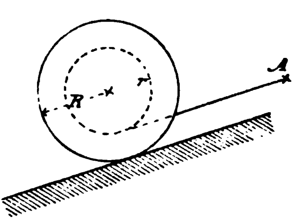
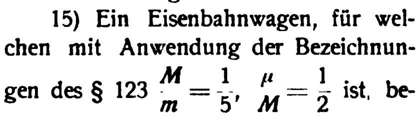


Fig. 451.

15) Ein Eisenbahnwagen, für welchen mit Anwendung der Bezeichnun-


gen des § 123 $\frac{M}{m} = \frac{1}{5}$, $\frac{\mu}{M} = \frac{1}{2}$ ist, bewegt sich unter dem Einfluss der Schwere allein gleichförmig bergab längs einer Neigung von 0.0025. Der Wagen möge 1 km längs einer Neigung von 0.010 ohne Anfangsgeschwindigkeit rollen. Wie weit setzt er seine Bewegung längs einer horizontalen Bahnstrecke fort?

16) Welche Arbeit ist erforderlich um ein gegebenes Stück einer schweren Kette hinauf zu winden, wenn keine schädlichen Widerstände in Betracht gezogen werden.

17) Eine homogene Kugel dreht sich gleichförmig mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe. Wie verändert sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, wenn die Kugel sich so zusammenzieht, dass ihr Radius um $\frac{1}{n}$ ihrer Länge vermindert wird?

18) Eine horizontale kreisförmige Platte kann sich ohne Widerstand um ihre verticale Axe, welche fest ist, drehen. Während die Platte in Ruhe ist, steht eine Person auf ihr und zwar dicht am Umfang. Um wie viel dreht sich die Platte, wenn die Person ein Mal um den Umfang herumgeht?

Fünfzehnter Abschnitt.

Die Lehre vom Stosse.

§ 125.

Gerader centraler Stoss.

Stosslinie.

Wenn zwei Körper, von denen wenigstens der eine sich bewegt, zusammentreffen, so entsteht ein Stoss zwischen ihnen. Die sog. Stosslinie oder Stossrichtung ist die Normale im Berührungspunkte zur gemeinsamen Berührungsebene der Körper am Anfang des Stosses.

Centraler und excentrischer Stoss.

Der Stoss heisst central, wenn die Schwerpunkte beider Körper auf der Stosslinie liegen, excentrisch, wenn dies nicht der Fall ist.

Gerader und schiefer Stoss.

Der Stoss wird ferner ein gerader genannt, wenn beide Schwerpunkte sich unmittelbar vor dem Stosse parallel der Stosslinie bewegen; anderenfalls heisst er schief.

Wenn zwei homogene Kugeln zusammenstossen, so ist der Stoss immer central; dasselbe ist der Fall, wenn eine Kugel gegen eine feste Wand stösst.

Gerader Stoss zwischen zwei homogenen Kugeln.

Zwei homogene Kugeln, welche sich translatorisch längs der gemeinsamen Centrallinie bewegen, mögen zusammenstossen. Der Stoss ist ein gerader centraler und erzeugt keine Drehung; die Bewegung der Kugeln ist also auch nach dem Stosse translatorisch. Die Massen der Kugeln seien M_1 und M_2, ihre Geschwindigkeiten vor

dem Stosse c_1 und c_2, und zwar positiv in der Richtung von M_1 nach M_2 (Fig. 462). Durch den gegenseitigen Einfluss der Körper auf einander während des Stosses ändern sich die Geschwindigkeiten. Da die Körper nicht absolut starr sind, derartige Körper sind in Wirklichkeit nicht vorhanden, so ändert sie ihre Form während des Stosses. Gemäss dem Satze von der Wirkung und Gegenwirkung treten die Kräfte, welche die Formänderungen bewirken, paarweise gleich gross und entgegengesetzt gerichtet auf. Der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes (p. 649) zeigt dann, dass sie keine Änderung der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes der beiden Körper verursachen können. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit c, die Geschwindigkeiten von M_1 und M_2 in einem beliebigen Augenblicke des Stosses mit v_1 und v_2, so erhält man

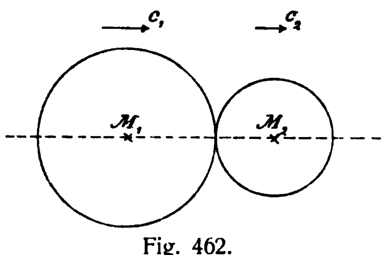


Fig. 462.

Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

$$c = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}. \tag{644}$$

Daraus folgt

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2. \tag{645}$$

Sämtliche Glieder dieser Gleichung bezeichnen nach p. 646 Bewegungsgrössen, welche hier mit denselben Zeichen wie die Geschwindigkeiten gerechnet werden sollen. Nach der Gleichung (645) *erleidet die Summe der Bewegungsgrössen beider Körper keine Veränderung während des Stosses.*

Um die Geschwindigkeitsänderungen der beiden Kugeln zu berechnen, teilt man die ganze Stosszeit in zwei

Perioden von den Längen T_1 und T_2 ein. Die erste Periode T_1 erstreckt sich bis zu dem Augenblicke, in welchem die beiden Kugeln keine relative Geschwindigkeit zu einander besitzen, sondern beide sich mit der Geschwindigkeit c des Schwerpunktes bewegen; die zweite Periode T_2 umfasst den übrigen Teil der Stosszeit.

Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_1.

Während der Zeit T_1 ändern sich die Geschwindigkeiten um folgende Beträge:

für den Körper M_1 um

$$c - c_1 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_1 = \frac{M_2 (c_2 - c_1)}{M_1 + M_2}, \tag{646 a}$$

und für den Körper M_2 um

$$c - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}. \tag{646 b}$$

Die eine Geschwindigkeitsänderung ist positiv, die andere negativ, so dass die eine Geschwindigkeit wächst, die andere abnimmt.

Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_2.

Die Vorgänge während der zweiten Zeitperiode T_2 des Stosses hängen von der physischen Beschaffenheit der Körper und gewöhnlich auch in geringem Grade von der Heftigkeit des Stosses ab. Die Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_2 können deshalb nur annähernd berechnet werden. Eine Ausnahme bilden zwei Grenzfälle, welche aber in der Natur nie vollkommen ausgeprägt vorkommen.

Am Ende des Stosses seien u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten von M_1 und M_2. Vermittelst des Satzes von den Bewegungsgrössen findet man

$$M_1 u_1 + M_2 u_2 = (M_1 + M_2) c.$$

Für den Quotienten der Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_2 ergiebt sich hieraus

$$\frac{u_1 - c}{u_2 - c} = -\frac{M_2}{M_1}.$$

Während der Zeit T_1 hat dieser Quotient gemäss der Gleichung (644) den Wert

$$\frac{c - c_1}{c - c_2} = -\frac{M_2}{M_1}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{u_1 - c}{c - c_1} = \frac{u_2 - c}{c - c_2} = \varepsilon, \tag{647}$$

wo das beiden Körpern gemeimsame Verhältnis aus den Geschwindigkeitsänderungen in den Perioden T_2 und T_1 mit ε bezeichnet worden ist. Die Grösse ε, welche von der physischen Beschaffenheit der Körper und auch etwas von der Heftigkeit des Stosses abhängt, nennt man Stosselasticitätscoefficient. Wenn er bekannt ist, so kann die Aufgabe der Berechnung der Geschwindigkeiten der zusammenstossenden Kugeln nach dem Stosse vollständig gelöst werden.

Stosselasticitätscoefficient.

Die Gleichungen (647) und (646) liefern für die Geschwindigkeitsänderungen der Körper M_1 und M_2 in der zweiten Zeitperiode

$$u_1 - c = \varepsilon (c - c_1) = \varepsilon \frac{M_2 (c_2 - c_1)}{M_1 + M_2},$$

$$u_2 - c = \varepsilon (c - c_2) = \varepsilon \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während der ganzen Stosszeit $T_1 + T_2$ sind die Geschwindigkeitsänderungen

$$\begin{aligned} u_1 - c_1 &= (1 + \varepsilon)(c - c_1) = \frac{M_2 (1 + \varepsilon)(c_2 - c_1)}{M_1 + M_2}, \\ u_2 - c_2 &= (1 + \varepsilon)(c - c_2) = \frac{M_1 (1 + \varepsilon)(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}. \end{aligned} \tag{648}$$

Die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 nach dem Stosse haben die Werte

Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

$$u_1 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2 + \varepsilon M_2 (c_2 - c_1)}{M_1 + M_2},$$

(649)

$$u_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2 + \varepsilon M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Kinetische Energie der zusammenstossenden Körper.

Vor dem Stosse besitzt das System die kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} (M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2)$$

und nach dem Stosse die Energie

$$\tfrac{1}{2} (M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2).$$

Während des Stosses nimmt die kinetische Energie um einen Betrag Φ ab, für den man mit Hülfe der Ausdrücke (649) den Wert

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (c_1 - c_2)^2 (1 - \varepsilon^2) \tag{650}$$

berechnet.

Unelastischer und elastischer Stoss.

Unter den Werten des Stosselasticitätscoefficienten ε sind die beiden Grenzwerte $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ bemerkenswert. Der Stoss heisst in dem ersten Falle vollkommen unelastisch, in dem zweiten Falle vollkommen elastisch. Wenn ε keinen von diesen Grenzwerten hat, so ist der Stoss unvollkommen elastisch.

Beim Zusammendrücken der beiden Körper während der Zeitperiode T_1 entstehen elastische Spannkräfte, welche während der Zeit T_2 in entgegengesetzter Richtung wirken und die Schwerpunkte der beiden Körper von einander entfernen. Die Körper suchen dabei ihre ursprüngliche Form wiederanzunehmen; dieser Rückgang der Formänderung kann mehr oder weniger vollständig sein.

Wenn der Stoss vollkommen unelastisch ist, so bleibt der am Ende der Zeit T_1 erreichte Deformationszustand unverändert; die Körper setzen ihre Bewegung mit der gemeinsamen Geschwindigkeit c fort, gerade so als ob

sie einen einzigen Körper bilden würden. Die Zeit T_2 ist dann gleich Null; eine weitere Geschwindigkeitsänderung tritt nicht ein und der Stosselasticitätscoefficient ε hat den Wert Null. Die Gleichung (650) zeigt, dass der Stoss mit einem Verlust von kinetischer Energie verbunden ist. Diese Energie ist in eine andere Form umgesetzt worden, indem sie teils zur Formänderung selbst, teils zur Erwärmung der Körper und zur Erzeugung von Schallwellen im umgebenden Mittel u. s. w. verbraucht wurde. Wie die Naturanschauung unserer Zeit lehrt, geht in der Wirklichkeit keine Energie verloren, es wechselt nur ihre Form.

Man kann sich andererseits vorstellen, dass dieselben Lagen der Körper relativ zu einander in der Periode T_2 eintreten wie in der Periode T_1, aber in umgekehrter Reihenfolge. Dann ist $T_2 = T_1$, und die Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_2 sind die gleichen wie in der Zeit T_1. Für den vollkommen elastischen Stoss, um den es sich hier handelt, hat man somit $\varepsilon = 1$. Nach dem Stosse haben die Körper ihre ursprüngliche Form zurückerlangt; die Gleichung (650) zeigt, dass keine Änderung der kinetischen Energie eingetreten ist. Bei dem vollkommen elastischen Stosse kann also keine Erwärmung der Körper oder Fortpflanzung von Schwingungen nach dem umgebenden Mittel stattfinden.

Wie schon hervorgehoben wurde, ist kein Stoss in der Wirklichkeit vollkommen unelastisch oder vollkommen elastisch; doch giebt es Fälle, in denen ohne merkbaren Fehler vorausgesetzt werden kann, dass das eine oder das andere stattfindet.

Bestimmung des Stosselasticitätscoefficienten.

Der Stosselasticitätscoefficient zweier Körper aus demselben Material kann in folgender Weise bestimmt werden. Eine Kugel von dem zu prüfenden Material wird von einer Höhe h auf eine horizontale ebene Unterlage aus demselben Material fallen gelassen. Die Kugel wird dabei zurückgeworfen und steigt bis zu einer gewissen

Höhe h_1, welche beobachtet wird. Aus den Gleichungen (648) findet man dabei, wenn man

$$c_2 = 0,\ M_2 = \infty,$$

$$c_1 = \sqrt{2gh},$$

$$c = 0,$$

$$u_1 = -\sqrt{2gh_1}$$

einsetzt,

$$u_1 - c_1 = -(1 + \varepsilon)\, c_1,$$

d. h.

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{c_1} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}. \tag{651}$$

Bei angestellten Versuchen hat man als mittlere Werte

für Elfenbein . . . $\varepsilon = \frac{8}{9}$,
für Stahl und Kork $\varepsilon = \frac{5}{9}$,
für Glas. . . . . $\varepsilon = \frac{15}{16}$

gefunden.

Wenn eine Explosion gleichzeitig mit dem Stosse stattfindet, oder wenn eine Explosion innerhalb eines Körpers entsteht, der sich in Bewegung befindet, ohne dass er auf einen anderen Körper stösst, so kann die kinetische Energie auch eine Vermehrung erfahren; dabei ist ε grösser als 1. Im folgenden werde jedoch vorausgesetzt, dass ε zwischen den Grenzen 0 und 1 liege oder mit einem dieser Grenzwerte zusammenfalle.

§ 126.

Der unelastische Stoss.

Beim unelastischen Stoss ist $\varepsilon = 0$; dann ist die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stosse

(652) $$u_1 = u_2 = c = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Der Verlust an kinetischer Energie beträgt nach der Formel (650)

Kinetische Energie.

(653) $$\Phi = \tfrac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (c_1 - c_2)^2;$$

nach dem Stosse bleibt die kinetische Energie

(654) $$R = \tfrac{1}{2} (M_1 + M_2) c^2 = \tfrac{1}{2} \frac{(M_1 c_1 + M_2 c_2)^2}{M_1 + M_2}.$$

Die Geschwindigkeitsänderungen der Körper während des unelastischen Stosses sind

Carnots Satz.

$$u_1 - c_1 = \frac{M_2 (c_2 - c_1)}{M_1 + M_2},$$

$$u_2 - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Wenn der Zähler und Nenner des Ausdruckes (653) mit $M_1 + M_2$ multiplicirt wird, so kann man demselben auch die Form

(655) $$\Phi = \tfrac{1}{2} \left\{ M_1 \left[\frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \right]^2 + M_2 \left[\frac{M_1 (c_2 - c_1)}{M_1 + M_2} \right]^2 \right\} = \tfrac{1}{2} \left\{ M_1 (u_1 - c_1)^2 + M_2 (u_2 - c_2)^2 \right\}$$

geben. Diese Gleichung enthält den Satz von Carnot: *Bei dem vollkommen unelastischen Stosse findet ein Verlust von kinetischer Energie statt, welcher gleich der Summe der kinetischen Energien ist, die den Geschwindigkeitsänderungen der Körper entsprechen.*

Wenn der Körper M_2 sich vor dem Stosse in Ruhe befindet, so erhält man

Der Körper M_2 ruht vor dem Stosse.

$$c_2 = 0,$$

$$u_1 = u_2 = c = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

$$\text{(656)} \qquad \Phi = \tfrac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} c_1^2,$$

$$R = \tfrac{1}{2} \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} c_1^2.$$

R als Nutzarbeit.

Wenn die Bewegung, welche der Körper M_2 nach dem Stosse besitzen würde, unmittelbar durch ein Hindernis gehemmt wird, so erleidet auch der Rest R der kinetischen Energie eine Verwandlung; gewöhnlich geht er in mechanische Arbeit über. Dies ist beispielsweise der Fall beim Eintreiben eines Nagels, eines Keiles, beim Einrammen eines Pfahles in den Boden u. s. w.

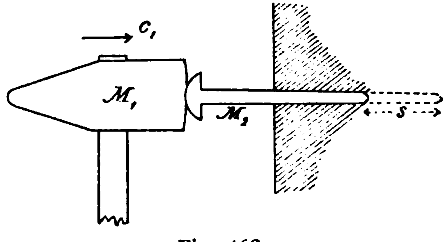


Fig. 463.

Wenn der Nagel (Fig. 463) durch einen Schlag des Hammers um das Stück s eindringt, so hat man

$$R = \tfrac{1}{2} \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} c_1^2 = W.s,$$

wo W die mittlere Grösse des Widerstandes in der Längsrichtung des Nagels ist. Um den grösst möglichen nützlichen Effect zu erzielen, muss der Quotient $R : \frac{1}{2} M_1 c_1^2$ so gross als möglich gemacht werden. Dieser Quotient hat den Wert $\frac{M_1}{M_1 + M_2}$. Es muss also $\frac{M_2}{M_1}$ möglichst klein, d. h. die Masse des vom Stosse getroffenen Körpers möglichst klein im Verhältnis zu der Masse des stossenden Körpers sein.

Wenn die Massen durch die Gewichte G_1 und G_2 ersetzt werden, so erhält man

$$\Phi = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{G_1}{g}\,c_1^2\right),$$

$$R = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{G_1}{g}\,c_1^2\right),$$

$$R = Ws.$$

Wenn s beobachtet worden ist, so kann W berechnet werden.

Beispielsweise seien für einen Nagel, der in eine Wand hineingeschlagen wird,

das Gewicht des Hammers . . $G_1 = 2$ kg.
„ „ „ Nagels . . . $G_2 = 0.2$ kg,
die Geschwindigkeit des Hammers $c_1 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$,
das beobachtete Eindringen . . $s = 0.01$ m.

Dann ist die totale angewandte Arbeit

$$A = \tfrac{1}{2}\,\frac{G_1}{g}c_1^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{9.81}\,5^2 = 2.55 \text{ kg m},$$

die Nutzarbeit

$$R = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\,A = \frac{2}{2 + 0.2}\,2.55 = 2.32 \text{ kg m},$$

und die schädliche Arbeit

$$\Phi = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\,A = \frac{0.2}{2 + 0.2}\,2.55 = 0.23 \text{ kg m}.$$

Von der totalen Arbeit kommt somit $\frac{10}{11}$ als Nutzarbeit beim Eintreiben zur Verwendung, während $\frac{1}{11}$ verloren geht (zur Erwärmung, Formänderung u. s. w.)

Der Widerstand der Wand beträgt im Mittel

$$W = \frac{R}{s} = \frac{2.32}{0.01} = 232 \text{ kg}.$$

In Wirklichkeit ändert sich diese Grösse während des Schlages.

Bei einem Pfahl, der in den Boden eingerammt wird, verrichtet auch die Schwerkraft eine Arbeit, welche jedoch

um so kleiner ist, je kleiner die Einsenkung bei einem Schlage ist (Fig. 464). Ist die Fallhöhe H, so erhält man

$$\frac{G_1}{G_1+G_2} G_1 H + (G_1+G_2) s = Ws.$$

Das erste Glied der linken Seite ist der nützliche Teil R der kinetischen Energie, das zweite Glied $(G_1+G_2) s$ die directe Arbeit der Schwere beim Einsinken.

Hat man beispielsweise

$$G_1 = 1.2 \text{ Tonnen}, \; G_2 = 0.6 \text{ Tonnen}, \\ H = 3 \text{ m}, \; s = 0.1 \text{ m},$$

so erhält man

$$W = \frac{1}{0.1}\left\{\frac{1.2}{1.8} 1.2 \times 3 + 1.8 \times 0.1\right\} = 25.8 \text{ t},$$

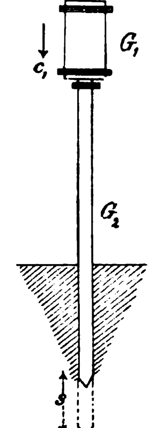


Fig. 464.

sowie

die totale Arbeit $= G_1 H + (G_1+G_2) s$	$= 3.78$ tm,
die nützliche Arbeit	$= 2.58$ „,
die schädliche Arbeit	$= 1.20$ „.

Der Widerstand W dient als Mass der Tragfähigkeit des Baugrundes. Man betrachtet eine Belastung jedes Pfahles als zulässig, wenn sie ein bestimmter Bruchteil (etwa $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$) des Wertes von W ist.

Φ als Nutzarbeit.

In anderen Fällen ist es wünschenswert, dass ein möglichst grosser Teil der kinetischen Energie des stossenden Körpers für die Deformation des getroffenen Körpers verwendet werde. In diesem Falle stellt Φ die nützliche, R die schädliche Arbeit dar. Damit Φ ein möglichst grosser Teil der totalen Arbeit werde, muss die Masse des vom Stosse getroffenen Körpers möglichst gross im Verhältnis zu der Masse des stossenden Körpers sein. Man erreicht dies, wenn man den gestossenen Körper in Verbindung mit einer grossen Masse setzt, die zugleich vom Stosse getroffen wird. So z. B. beim Nie-

ten, bei Dampfhämmern, Pochwerken u. s. w. (Fig. 465 und 466).

Hätte man z. B. bei einem Dampfhammer

das Gewicht des Hammers $G_1 = 10$ t,
» » » Ambos $G_2 = 60$ t,
die Fallhöhe $H = 2.0$ m,

so würde sich eine totale Arbeit

$$G_1 H = 20 \text{ tm}$$

ergeben. Der Teil

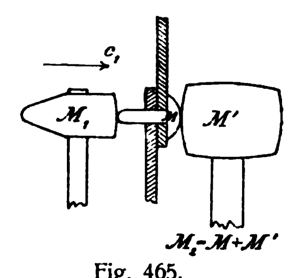


Fig. 465.

$$\Phi = \frac{G_2}{G_1 + G_2} G_1 H = 17.1 \text{ tm}$$

stellt die Nutzarbeit dar, durch welche die Deformation des Arbeitsstückes hervorgebracht wird, während der Teil

$$R = \frac{G_1}{G_1 + G_2} G_1 H = 2.9 \text{ tm}$$

die schädliche Arbeit ist, welche eine eventuelle Lagenänderung des Ambos, Erschütterungen der Unterlage u. s. w. hervorbringt. Wird das Arbeitsstück um 3 cm zusammengedrückt, so wirkt bei der Deformation im Mittel ein Druck W von der Grösse

$$W = \frac{\Phi}{s} = \frac{17.1}{0.03} = 570 \text{ t.}$$

Bei dieser Berechnung ist das eigene Gewicht des Arbeitsstückes, das meistens klein im Verhältnis zum Gewicht des Ambos ist, vernachlässigt worden.

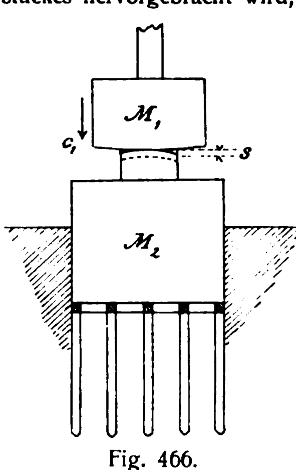


Fig. 466.

§ 127.

Elastischer Stoss.

Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

Wählt man in den Gleichungen (648) und (649) $\varepsilon = 1$, so erhält man als totale Geschwindigkeitsänderungen während des elastischen Stosses

$$u_1 - c_1 = \frac{2M_2(c_2 - c_1)}{M_1 + M_2},$$

$$u_2 - c_2 = \frac{2M_1(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

und für die Geschwindigkeiten nach dem Stosse die Werte

$$(657) \quad u_1 = \frac{(M_1 - M_2)c_1 + 2M_2c_2}{M_1 + M_2},$$

$$u_2 = \frac{(M_2 - M_1)c_2 + 2M_1c_1}{M_1 + M_2}.$$

Wie die Formel (650) zeigt, geht keine kinetische Energie durch den Stoss verloren. Es ist somit

$$M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2,$$

wie übrigens auch die Gleichungen (657) erkennen lassen.

Gleiche Massen. Hätte man speciell $M_1 = M_2$, so würde man

$$u_1 = c_2,$$

$$u_2 = c_1$$

finden, d. h. die Körper vertauschen beim Stosse ihre Geschwindigkeiten. Befindet sich der eine Körper vor dem Stosse in Ruhe, so bleibt der andere Körper nach dem Stosse unbeweglich.

Wenn der gemeinsame Schwerpunkt beider Körper vor dem Stosse ruht, d. h. wenn

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = 0$$

ist, so findet man mit Hülfe der Gleichungen (657)

$$u_1 = -c_1,$$

$$u_2 = -c_2,$$

d. h. die Körper ändern beim Stosse die Richtungen ihrer Geschwindigkeiten, während die Grösse derselben unver-

ändert bleibt. Der gemeinsame Schwerpunkt verharrt in Ruhe.

Der eine Körper bleibt nach dem Stosse in Ruhe.

Man nehme an, dass beide Körper entgegengesetzt gerichtete gleich grosse Geschwindigkeiten besitzen; und untersuche, wann der eine Körper nach dem Stosse in Ruhe bleibt. Wählt man dazu in den Gleichungen (657) $c_2 = -c_1$, so erhält man

$$u_1 = \frac{M_1 - 3M_2}{M_1 + M_2} c_1,$$

$$u_2 = \frac{3M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1.$$

Damit einer der beiden Körper nach dem Stosse die Geschwindigkeit Null habe, muss seine Masse drei Mal so gross als die Masse des anderen Körpers sein.

Der eine Körper ruht.

Wenn der Körper M_2 unbeweglich, z. B. eine feste Ebene ist, welche senkrecht von dem Körper M_1 getroffen wird, so hat man

$$c_2 = 0, \ M_2 = \infty$$

und erhält

$$u_1 = - c_1,$$

d. h. der Körper wird von der festen Ebene in entgegengesetzter Richtung mit gleich grosser Geschwindigkeit zurückgeworfen.

Anwendung.

Drei vollkommen elastische Kugeln von den Massen M_1, M_2 und M_3 liegen mit ihren Mittelpunkten in gerader Linie. Man teilt dem Körper M_1 eine gewisse Geschwindigkeit in der Richtung nach M_2 mit; M_1 stösst gegen M_2 und M_2 nachher gegen M_3. Welche Grösse muss die Masse M_2 besitzen, damit M_3 die grösst mögliche Geschwindigkeit nach dem Stosse erlange?

Es sei c_1 die Geschwindigkeit von M_1; die Geschwindigkeiten von M_2 und M_3 sind vor dem Stosse Null; ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse mögen mit u_2 und u_3 bezeichnet werden. Man findet dann

$$u_2 = \frac{2M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

$$u_3 = \frac{2M_2 u_2}{M_2 + M_3}.$$

Eliminirt man u_2 zwischen diesen Gleichungen, so ergiebt sich

$$u_3 = \frac{4M_1 M_2 c_1}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)}.$$

Damit u_3 ein Maximum werde, muss M_2 so gewählt werden, dass $\frac{M_2}{(M_1 + M_2)(M_2 + M_3)}$ ein Maximum erreicht. Bildet man die Ableitung dieses Ausdruckes in Bezug auf M_2 und setzt sie gleich Null, so erhält man als Lösung der Aufgabe

$$M_2 = \sqrt{M_1 M_3}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt.

§ 128.

Schiefer centraler Stoss.

Beim geraden Stosse findet keine Lagenänderung des einen Körpers hinsichtlich des anderen in der Richtung senkrecht zur Stosslinie statt. Beim schiefen Stosse tritt aber im allgemeinen eine solche relative seitliche Verschiebung ein; eine Ausnahme macht nur der Fall, in welchem die Componenten der Geschwindigkeiten beider Körper senkrecht zur Stosslinie die gleichen sind. Die Beschaffenheit des Stosses ist deshalb davon abhängig, ob es einen tangentialen Widerstand, z. B. eine Reibung, in der Berührungsebene giebt oder nicht.

Schiefer Stoss ohne tangentialen Widerstand.

Zunächst werde angenommen, dass kein tangentialer Widerstand vorhanden sei, ferner dass die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte beider Körper in einer Ebene liegen, welche auch die Stosslinie enthält (Fig. 467). Man wähle die Stosslinie in der Richtung von S_1 nach S_2 als

x-Axe und eine zu ihr Senkrechte als y-Axe. Die Geschwindigkeiten der Körper vor dem Stosse seien c_1 und c_2, ihre Winkel mit der positiven x-Axe α_1 und α_2. Da die Körper keinen Einfluss in tangentialer Richtung auf einander ausüben, so bleiben die der y-Axe parallelen Geschwindigkeitscomponenten $c_1 \sin \alpha_1$ und $c_2 \sin \alpha_2$ während des Stosses unverändert. Dagegen ändern sich die der Stosslinie parallelen Geschwindigkeitscomponenten $c_1 \cos \alpha_1$ und $c_2 \cos \alpha_2$ in derselben Weise wie bei dem geraden centralen Stosse. Die Geschwindigkeit eines Körpers nach dem Stosse ergiebt sich durch Zusammensetzung der zur y-Axe parallelen unveränderten Componente und der durch den Stoss veränderten Componente nach der x-Axe. Nennt man die beiden Geschwindigkeiten u_1 und u_2, ihre Winkel mit der x-Axe β_1 und β_2, so findet man vermittelst der Gleichungen (649)

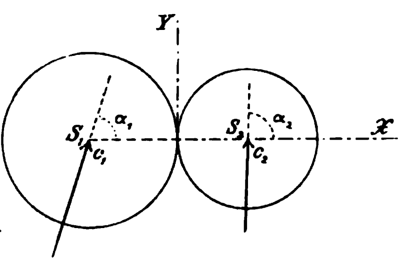


Fig 467.

$$u_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1,$$

$$u_2 \sin \beta_2 = c_2 \sin \alpha_2,$$

$$u_1 \cos \beta_1 = \frac{M_1 c_1 \cos \alpha_1 + M_2 c_2 \cos \alpha_2 + \varepsilon M_2 (c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1)}{M_1 + M_2},$$

(658)

$$u_2 \cos \beta_2 = \frac{M_1 c_1 \cos \alpha_1 + M_2 c_2 \cos \alpha_2 + \varepsilon M_1 (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)}{M_1 + M_2}.$$

Diese Gleichungen bestimmen vollständig die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 sowie die Winkel β_1 und β_2.

Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand.

Ein specieller Fall des schiefen Stosses ist der Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand (Fig. 468). Vorausgesetzt dass keine Reibung stattfindet, gelten die Formeln

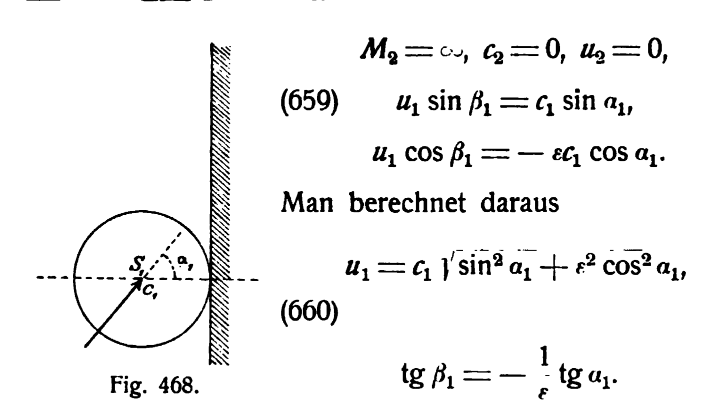


Fig. 468.

$$M_2 = \infty, \; c_2 = 0, \; u_2 = 0,$$

$$(659) \qquad u_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1,$$

$$u_1 \cos \beta_1 = - \varepsilon c_1 \cos \alpha_1.$$

Man berechnet daraus

$$u_1 = c_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \varepsilon^2 \cos^2 \alpha_1},$$

$$(660)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Wenn der Stoss vollkommen unelastisch ist, so bewegt sich die Kugel nach dem Stosse parallel der festen Wand mit der Geschwindigkeit $c_1 \sin \alpha_1$; die zur Wand normale Geschwindigkeitscomponente ist durch den Stoss vernichtet worden. Beim vollkommen elastischen Stosse ändert die normale Componente ihre Richtung, nicht aber ihre Grösse. Die Geschwindigkeit u_1 nach dem Stosse ist dann gleich der Geschwindigkeit c_1 vor dem Stosse und schliesst mit der Normalen zur Wand denselben Winkel α_1 ein wie vor dem Stosse, aber nach der anderen Seite (die Gleichungen (659) liefern in der That $\beta_1 = \pi - \alpha_1$). Die Geschwindigkeiten c_1 und u_1 liegen in einer Normalebene zur Wand. Dieses Gesetz der Zurückwerfung ist das aus der Physik bekannte, welches auf Licht- und Wärmestrahlen, Schallwellen, elektrische Wellen u. s. w. Anwendung findet.

Schiefer Stoss, mit Reibung.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass ein Reibungswiderstand während des Stosses wirke. Wir beschränken uns auf den Fall, dass ein homogener Umdrehungskörper mit einer zur Axe senkrechten Symmetrieebene durch den Schwerpunkt gegen eine feste Wand in solcher Weise stösst, dass die Axe während der Bewegung parallel der Wandfläche ist und ihre Lage translatorisch ändert, während der Schwerpunkt des Körpers sich in einer zur Wand

und zur Axe senkrechten Ebene bewegt (Fig. 469); der Körper kann auch eine ursprüngliche Drehung um seine Axe besitzen. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Körpers sei ω_0 vor dem Stosse und ω nach dem Stosse, und zwar rechne man sie positiv, wenn die Berührungspunkte mit der Wand durch die Drehung und durch die Translation der Axe nach derselben Richtung bewegt werden.

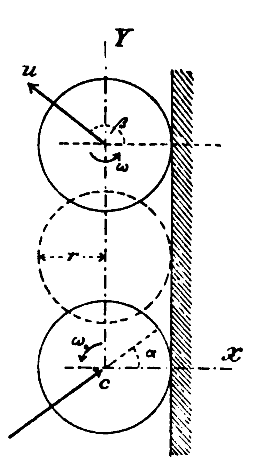


Fig. 469.

Für die zur Wand senkrechten Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes gilt die zweite Formel (659). Mit den Bezeichnungen der Figur (469) findet man somit

(661) $$u \cos \beta = - \varepsilon c \cos \alpha.$$

Was die der Wand parallelen Componenten betrifft, so sind sie verschieden, je nachdem ein Gleiten längs der Wand während der ganzen Stosszeit stattfindet oder die Bewegung längs der Wand während eines Teiles der Stosszeit oder vielleicht während der ganzen Stosszeit in einem Rollen ohne Gleiten besteht. Es soll zuerst angenommen werden, dass ein Gleiten während der ganzen Zeit vorkommt. Dabei wirkt ein Reibungswiderstand, dessen Grösse in jedem Augenblicke gleich dem Product aus dem normalen Drucke und dem Reibungscoefficienten f ist. Weil das Verhältnis aus dem Tangentialwiderstande und dem normalen Drucke unverändert gleich f bleibt, so muss auch das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderungen der Axe des Umdrehungskörpers parallel der Wand und senkrecht dazu constant und gleich f sein. Man erhält also

Gleiten während der ganzen Stosszeit.

$$\frac{u \sin \beta - c \sin \alpha}{u \cos \beta - c \cos \alpha} = f$$

und mit Hülfe der Gleichung (661)

(662) $$u \sin \beta = c \sin \alpha - f(1 + \varepsilon)\, c \cos \alpha.$$

Die Gleichungen (661) und (662) bestimmen die Geschwindigkeit der Axe des Körpers nach dem Stosse.

Durch die Reibung an der Wand wird auch die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Körpers um seine Axe geändert. Den Winkelgeschwindigkeiten ω_0 und ω entsprechen die Peripheriegeschwindigkeiten $r\omega_0$ und $r\omega$. Die Änderung $r(\omega - \omega_0)$ der Peripheriegeschwindigkeit muss sich zu der Änderung der Geschwindigkeitscomponente des Schwerpunktes parallel der Wand wie die Masse M des Körpers zu der auf den Abstand r reducirten Masse μ verhalten, da ja das Verhältnis der entsprechenden Beschleunigungen den constanten Wert $\frac{M}{\mu}$ beibehält. Somit findet man

$$\frac{r(\omega - \omega_0)}{u \sin \beta - c \sin \alpha} = \frac{M}{\mu}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (662) ergiebt sich hieraus

(663) $$\omega = \omega_0 - \frac{f(1 + \varepsilon)}{r} \frac{M}{\mu} c \cos \alpha.$$

Der Geschwindigkeitszustand des Umdrehungskörpers nach dem Stosse ist also durch die Gleichungen (661), (662) und (663) völlig bestimmt, vorausgesetzt dass ein Gleiten längs der Wand während der ganzen Stosszeit stattfindet.

Die Bedingung für dieses Gleiten kann jetzt ohne Schwierigkeit aufgestellt werden. Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes parallel der Wand ist $c \sin \alpha + r\omega_0$ am Anfang des Stosses und $u \sin \beta + r\omega$ am Ende des Stosses. Sie darf nicht gleich Null werden und darf auch ihre Richtung nicht ändern. Da $c \sin \alpha + r\omega_0$ als positiv vorausgesetzt werden kann, so ist die Bedingung dafür

$$u \sin\beta + r\omega \geqq 0,$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (662) und (663)

$$c \sin\alpha + r\omega_0 \geqq f(1+\varepsilon)\left(1+\frac{M}{\mu}\right) c \cos\alpha. \tag{664}$$

Da der Geschwindigkeitszustand beim Beginn des Stosses bekannt ist, so lässt sich stets erkennen, ob diese Bedingung erfüllt ist oder nicht.

Rollen ohne Gleiten während eines Teiles der Stosszeit.

Es werde jetzt angenommen, dass die Bedingung (664) nicht erfüllt sei, sondern dass

$$c \sin\alpha + r\omega_0 < f(1+\varepsilon)\left(1+\frac{M}{\mu}\right) c \cos\alpha \tag{665}$$

sei. Dann entsteht während der Stossperiode früher oder später ein Rollen des Umdrehungskörpers ohne Gleiten. Der Widerstand der gleitenden Reibung wirkt nur während der ersten Periode des Stosses; während der zweiten Periode ist die Bewegung ein gleichförmiges Rollen längs der Wand. Die von der Reibung verursachten Änderungen der Geschwindigkeit der Axe des Körpers und der Winkelgeschwindigkeit der Drehung um diese Axe bilden jetzt nur einen Teil, den n:ten Teil der entsprechenden Änderungen in dem vorhin betrachteten Falle. Die zur Wand senkrechte Geschwindigkeitscomponente ist dieselbe wie vorhin. Man erhält also

$$\begin{aligned} u\cos\beta &= -\varepsilon c \cos\alpha, \\ u\sin\beta &= c\sin\alpha - \frac{1}{n} f(1+\varepsilon)\, c\cos\alpha, \\ \omega &= \omega_0 - \frac{1}{n}\frac{f(1+\varepsilon)}{r}\frac{M}{\mu}\, c\cos\alpha. \end{aligned} \tag{666}$$

Um die unbekannte Grösse $\frac{1}{n}$ zu finden, beachte man, dass das vollkommene Rollen anfängt, wenn die Ge-

schwindigkeit des Berührungspunktes Null geworden ist. Daraus ergiebt sich

$$(667)\quad c \sin \alpha + r\omega_0 - \frac{1}{n} f(1+\varepsilon)\left(1+\frac{M}{\mu}\right) c \cos \alpha = 0.$$

Setzt man den so bestimmten Wert von $\frac{1}{n}$ in den Gleichungen (666) ein, so erhält man schliesslich zur Berechnung des Geschwindigkeitszustandes nach dem Stosse die Gleichungen

$$(668)\quad \begin{cases} u \cos \beta = -\varepsilon c \cos \alpha, \\ u \sin \beta = \dfrac{\frac{M}{\mu} c \sin \alpha - r\omega_0}{1+\frac{M}{\mu}}, \\ \omega = \dfrac{r\omega_0 - \frac{M}{\mu} c \sin \alpha}{r\left(1+\frac{M}{\mu}\right)}. \end{cases}$$

Dabei ist $u \sin \beta = -r\omega$, wie das Rollen ohne Gleiten verlangt.

§ 129.

Excentrischer Stoss.

Stossmittelpunkt.

Es soll nur der specielle Fall betrachtet werden, dass die Stosslinie durch den Schwerpunkt S_1 des Körpers M_1 geht und in einer Ebene durch den Schwerpunkt S_2 des Körpers M_2 liegt, die eine centrale Hauptträgheitsebene ist (§ 107). Die durch S_2 geführte Senkrechte zu dieser Ebene ist also eine freie Axe des Körpers (siehe § 115).

Ausserdem werde noch angenommen, dass der Stoss ein gerader sei (Fig. 470).

Der Körper M_1, der sich translatorisch bewegt, habe vor dem Stosse die Geschwindigkeit c_1; der Schwerpunkt des Körpers M_2 besitze die Geschwindigkeit c_2; ausserdem möge sich dieser Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 in dem in der Figur angegebenen Sinne um seine Axe drehen. Dieselben Grössen seien am Ende der ersten Stossperiode T_1, d. h. in dem Augenblicke, in dem die Formänderungen ihr Maximum erreicht haben, der Reihe nach gleich v_1, v_2 und w, sowie am Ende der zweiten Periode T_2 des Stosses bez. u_1, u_2 und ω. Ferner werde der Abstand des Punktes S_2 von der Stosslinie mit a, die auf den Abstand a reducirte Masse des Körpers M_2 mit $\mu_2 \left(= \frac{K}{a^2}\right)$ bezeichnet.

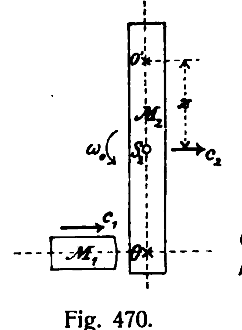


Fig. 470.

Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit T_1.

Die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte beider Körper folgen denselben Gesetzen wie beim centralen Stosse. Man findet somit am Ende der Zeit T_1 (siehe p. 717)

$$(669) \qquad \frac{v_1 - c_1}{v_2 - c_2} = -\frac{M_2}{M_1}.$$

Es sei N der Wert des Stossdruckes in einem Augenblicke; er veranlasst eine Beschleunigung $-\frac{N}{M_1}$ in der Bewegung von M_1 und eine Tangentialbeschleunigung $\frac{N}{\mu_2}$ des Stosspunktes in der Drehung des Körpers M_2 um die freie Axe durch S_2. Das Verhältnis dieser Beschleunigungen, d. h. $-\frac{\mu_2}{M_1}$ bleibt unverändert während des Stosses und ist somit gleich dem Verhältnis der entspre-

chenden Geschwindigkeitsänderungen. Am Ende der Zeit T_1 ergiebt sich somit

$$(670) \qquad \frac{v_1 - c_1}{aw - a\omega_0} = -\frac{\mu_2}{M_1}.$$

Drückt man noch die Bedingung aus, dass der Körper M_1 und der Stosspunkt des Körpers M_2 am Ende der Zeit T_1 dieselbe Geschwindigkeit besitzen, so findet man die Gleichung

$$(671) \qquad v_1 = v_2 + aw.$$

Aus den Gleichungen (669), (670) und (671) leitet man für die Geschwindigkeitsänderungen während der Zeit T_1 die Werte ab:

$$(672) \qquad \begin{aligned} v_1 - c_1 &= \frac{c_2 + a\omega_0 - c_1}{1 + \frac{M_1}{M_2} + \frac{M_1}{\mu_2}}, \\ v_2 - c_2 &= \frac{c_1 - (c_2 + a\omega_0)}{1 + \frac{M_2}{M_1} + \frac{M_2}{\mu_2}}, \\ a(w - \omega_0) &= \frac{c_1 - (c_2 + a\omega_0)}{1 + \frac{\mu_2}{M_1} + \frac{\mu_2}{M_2}}. \end{aligned}$$

Die Grösse $c_2 + a\omega_0$ ist die Geschwindigkeit des Stosspunktes von M_2 vor dem Stosse.

Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

Die Geschwindigkeitsänderungen während der ganzen Stosszeit $T_1 + T_2$ sind $1 + \varepsilon$ Mal so gross wie die Ausdrücke (672) (vergl. p. 717). Also ergiebt sich

$$u_1 - c_1 = \frac{(1 + \varepsilon)(c_2 + a\omega_0 - c_1)}{1 + \frac{M_1}{M_2} + \frac{M_1}{\mu_2}},$$

$$(673)\qquad u_2 - c_2 = \frac{(1+\varepsilon)\{c_1 - (c_2 + a\omega_0)\}}{1 + \frac{M_2}{M_1} + \frac{M_2}{\mu_2}},$$

$$a(\omega - \omega_0) = \frac{(1+\varepsilon)\{c_1 - (c_2 + a\omega_0)\}}{1 + \frac{\mu_2}{M_1} + \frac{\mu_2}{M_2}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen berechnet man u_1, u_2 und ω, d. h. den Geschwindigkeitszustand nach dem Stosse.

Von dem Stosse unbeeinflusste Axe.

Man kann jetzt die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers M_2 leicht bestimmen. Der Körper hat eine ebene Bewegung, parallel der Ebene durch den Schwerpunkt und die Stosslinie. Es werde eine zu dieser Ebene senkrechte Axe in's Auge gefasst, die in der Normalebene durch S_2 zur Stosslinie liegt und den Abstand x von S_2 hat; der Punkt S_2 liege zwischen dieser Axe und der Stosslinie. Die Punkte dieser Axe besitzen vor dem Stosse die Geschwindigkeit $c_2 - x\omega_0$ und nach dem Stosse die Geschwindigkeit $u_2 - x\omega$. Damit die betrachtete Axe keinen Einfluss durch den Stoss erleide, muss

$$c_2 - x\omega_0 = u_2 - x\omega$$

sein. Man erhält daraus zur Bestimmung der Lage einer solchen Axe

$$x = \frac{u_2 - c_2}{\omega - \omega_0},$$

und wenn man von den Gleichungen (673) Gebrauch macht,

$$(674)\qquad x = \frac{\mu_2}{M_2}\,a.$$

Die Lage der Axe ist folglich unabhängig von dem Stosselasticitätscoefficienten ε. Wäre die Axe fest, so würde durch den Stoss keine Reaction an ihr fühlbar werden.

Stossmittelpunkt.

In der Figur 470 stellt O' die betreffende Axe dar, während O der Schnittpunkt der Stosslinie mit einer zu ihr senkrechten Ebene durch S_2 ist. Der Punkt O heisst Stossmittelpunkt in Bezug auf die Axe O'. Würde man die reducirte Pendellänge (p. 687) des Körpers für O' als Aufhängeaxe berechnen, so erhielte man

$$l = \frac{\mu_2 a^2 + M_2 x^2}{M_2 x} = a + x = OO',$$

d. h. O ist der entsprechende Schwingungsmittelpunkt.

Anwendungen.

1) Es sei ein homogener parallelepipedischer Stab von der Länge L und einem zur Längsrichtung senkrechten rechteckigen Querschnitt mit den Seiten a und b gegeben; man wähle die den Kanten a parallele Symmetrieaxe der einen Endfläche und berechne die Lage des entsprechenden Stossmittelpunktes.

Für den Abstand l dieses Punktes von der betrachteten Endfläche erhält man

$$l = \frac{L}{2} + \frac{\mu_2}{M_2}\frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left\{1 + \frac{L^2 + b^2}{3L^2}\right\} = \tfrac{2}{3} L + \tfrac{1}{6}\frac{b^2}{L}.$$

2) Wenn ein homogener cylindrischer Stab von der Länge L und Dicke $2r$, der eine horizontale Lage einnimmt, einen zur Längsrichtung senkrechten horizontalen Stoss erfährt, so ist die Bewegung des Stabes im ersten Augenblicke eine Drehung um eine verticale Axe, welche sich auf der anderen Seite in Bezug auf die Mitte des Stabes in der Entfernung

$$x = \tfrac{1}{6} L + \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{L}$$

befindet.

§ 130.

Stoss sich drehender Körper.

Der eine Körper hat eine feste Axe.

Wenn ein Körper, der sich um eine feste Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit w_2 dreht (Fig. 471), von einem Körper M_1 getroffen wird, so ändert sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die feste Axe. Es werde angenommen, dass die Stosslinie in einer Normalebene zur festen Axe liege, und dass M sich vor dem

Stosse parallel der Stosslinie mit der Geschwindigkeit c_1 bewege. Der Abstand O_2N_2 der Stosslinie von der festen Axe sei a_2; die auf den Abstand a_2 reducirte Masse des Körpers M_2 sei gleich μ_2. Man erkennt, dass die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, nämlich u_1 für M_1 und $a_2\omega_2$ für den Punkt N_2 des Körpers M_2 dieselben sind, wie bei einem geraden centralen Stosse zwischen den Massen M_1 und μ_2, die sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und a_2w_2 bewegen. Mit Hülfe der Gleichungen (649) ergiebt sich somit für die Geschwindigkeiten nach dem Stosse

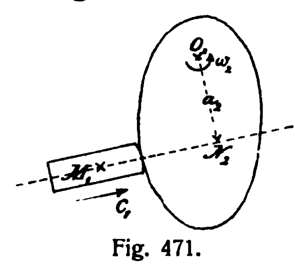


Fig. 471.

(675)
$$u_1 = \frac{M_1c_1 + \mu_2 a_2w_2 + \varepsilon\mu_2(a_2w_2 - c_1)}{M_1 + \mu_2},$$
$$a_2\omega_2 = \frac{M_1c_1 + \mu_2 a_2w_2 + \varepsilon M_1(c_1 - a_2w_2)}{M_1 + \mu_2}.$$

Im allgemeinen wird die feste Axe durch den Stoss beeinflusst. In § 131 wird gezeigt, wie man diesen Einfluss bestimmt; zugleich werden die Bedingungen aufgestellt, dass die Axe keine Stosswirkung erleide.

In dem speciellen Falle, wo der Körper M_2 vor dem Stosse in Ruhe ist, findet man für seine Winkelgeschwindigkeit nach dem Stosse den Wert

(676)
$$\omega_2 = \frac{(1+\varepsilon)M_1c_1}{a_2(M_1+\mu_2)}.$$

Anwendungen.

1) Man wünscht zu wissen, wie der Körper M_1 mit einer gegebenen Geschwindigkeit c_1 den ruhenden Körper M_2 treffen muss, damit die dem Körper M_2 erteilte kinetische Energie ein Maximum werde.

Nach dem Stosse ist die kinetische Energie von M_2

$$E_2 = \tfrac{1}{2}\,\mu_2 a_2^2 \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\,K_2 \omega_2^2,$$

wo K_2 das Trägheitsmoment in Bezug auf die feste Axe bezeichnet und ω_2 den Wert (676) hat. Damit E_2 ein Maximum werde, muss ω_2 seinen grössten Wert annehmen. Ersetzt man a_2 durch x, so ist

$$\omega_2 = \frac{(1+\varepsilon)\,M_1 c_1}{M_1 x + \dfrac{K_2}{x}}.$$

Dieser Ausdruck wird für

$$x = \sqrt{\frac{K_2}{M_1}}$$

am grössten. Der Maximalwert der Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\max \omega_2 = \frac{1+\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{M_1}{K_2}}\,c_1,$$

und das Maximum der kinetischen Energie ist

$$\max E_2 = \frac{(1+\varepsilon)^2}{4}\,.\,\tfrac{1}{2}\,M_1 c_1^2.$$

Wären die Körper vollkommen elastisch, d. h. $\varepsilon = 1$, so erhielte man

$$\max\, E_2 = \tfrac{1}{2}\,M_1 c_1^2,$$

d. h. die totale kinetische Energie des Körpers M_1 würde auf M_2 übertragen werden. Der Körper M_1 würde dann nach dem Stosse in Ruhe bleiben.

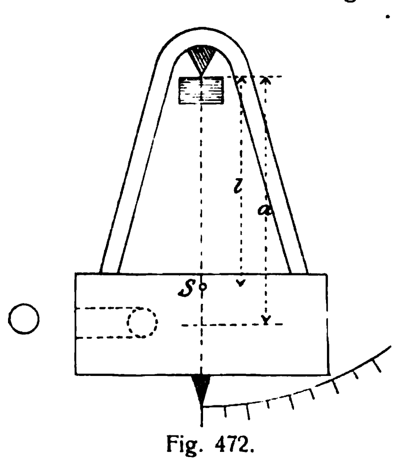


Fig. 472.

2) D a s b a l l i s t i s c h e P e n d e l. Wenn das Pendel (Fig. 472) durch ein Geschoss getroffen wird, das in ihm stecken bleibt, so macht es einen Ausschlag α, den man beobachten kann. Kennt man die Masse des Pendels und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Aufhängeaxe, so lässt sich die Geschwindigkeit des Geschosses in folgender Weise berechnen.

Der Stoss ist unelastisch. Es sei die Geschwindigkeit des Geschosses c, seine Masse m, die Masse des Pendels M und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die feste Axe K. Ferner bezeichne man mit a und l die Abstände der festen Axe von der Stosslinie und von dem gemeinsamen Schwerpunkte des Pendels und des Geschosses. Die Formel (676) liefert dann für die Winkelgeschwindigkeit ω des Pendels nach dem Stosse den Wert

$$\omega = \frac{mc}{a\left(m + \frac{K}{a^2}\right)}.$$

Daraus folgt

$$c = a\omega\left(1 + \frac{K}{ma^2}\right).$$

Die Grösse K wird durch einen vorher angestellten Pendelversuch ermittelt (vergl. p. 689). Nach dem Eindringen des Geschosses ist K_1 das Trägheitsmoment, und zwar ergiebt sich mit Hülfe eines neuen Pendelversuchs

$$K_1 = \frac{T^2}{\pi^2}\, l\,(M + m)\, g.$$

Da α der Ausschlag ist, den das Pendel mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω macht, erhält man vermittelst des Princips der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} K_1 \omega^2 = (M + m)\, gl\,(1 - \cos\alpha) =$$

$$= 2\,(M + m)\, gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Eliminirt man K_1 aus den beiden letzten Gleichungen, so folgt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Die Geschwindigkeit des Geschosses ergiebt sich also aus der Formel

$$c = \frac{2a\pi}{T}\left(1 + \frac{K}{ma^2}\right) \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Um das Pendel haltbar zu machen, muss man es so construiren, dass die feste Axe fast keine Wirkung durch den Stoss erleide.

Beide Körper drehen sich um parallele feste Axen.

Zwei um feste parallele Axen O_1 und O_2 (Fig. 473) sich drehende Körper mögen so gegen einander stossen, dass die Stosslinie in einer Normalebene zu den beiden

Axen liegt. Zur Berechnung der Geschwindigkeiten betrachtet man die beiden reducirten Massen μ_1 und μ_2 in den Fusspunkten der Senkrechten von den festen Axen auf die Stosslinie, und lässt sie einen geraden centralen Stoss erleiden. Sind die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stosse w_1 und w_2, nach dem Stosse ω_1 und ω_2, wobei sie positiv in der

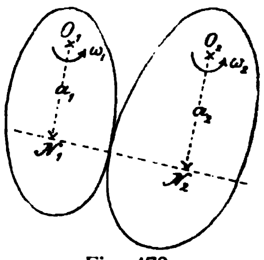


Fig. 473.

in der Figur angezeigten Richtung gerechnet werden, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen (649) zur Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes nach dem Stosse

$$a_1\,\omega_1 = \frac{\mu_1\,a_1\,w_1 + \mu_2\,a_2\,w_2 + \varepsilon\mu_2\,(a_2\,w_2 - a_1\,w_1)}{\mu_1+\mu_2},$$

(677)

$$a_2\,\omega_2 = \frac{\mu_1\,a_1\,w_1 + \mu_2\,a_2\,w_2 + \varepsilon\mu_1\,(a_1\,w_1 - a_2\,w_2)}{\mu_1+\mu_2}.$$

§ 131.

Momentankräfte an einem starren Körper.

Momentankraft.

Die Wirkung eines Stosses auf einen materiellen Punkt besteht darin, dass die Geschwindigkeit des Punktes sich in einer sehr kurzen Zeit um einen endlichen Betrag ändert. Als Mass der Wirkung des Stosses wird deshalb das Product mu aus der Masse m des Punktes und seiner Geschwindigkeitsänderung u gewählt. Diese Bewegungsgrösse wird als das Resultat einer beim Stosse erzeugten Stosskraft oder Momentankraft von der Grösse mu und der der Geschwindigkeitsänderung angehörenden Richtung betrachtet, in derselben Weise wie die Beschleunigung a eines freien Punktes von der Masse m durch die Kraft ma in der Richtung von a entsteht. Die Momentankraft werde mit P bezeichnet, ihre Compo-

nenten nach drei zu einander senkrechten Axen seien P_x, P_y und P_z, der veränderliche Stossdruck sei N, seine Componenten nach denselben Axen seien X, Y und Z, die Coordinaten des Punktes mit der Masse m seien x, y und z. Es ergiebt sich dann

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dt und führt die Integration in Bezug auf t für die Zeit des Stosses aus, so erhält man

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dx}{dt} - c_x\right) &= \int X\,dt, \\ m\left(\frac{dy}{dt} - c_y\right) &= \int Y\,dt, \qquad (678) \\ m\left(\frac{dz}{dt} - c_z\right) &= \int Z\,dt, \end{aligned}$$

wo c_x, c_y und c_z die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes vor dem Stosse, $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$, $\frac{dz}{dt} = u_z$ die nämlichen Grössen nach dem Stosse sind. Die rechten Seiten stellen somit die Componenten der Änderung der Bewegungsgrösse oder der Momentankraft dar, man erhält also

$$\begin{aligned} P_x &= \int X\,dt, \\ P_y &= \int Y\,dt, \qquad (679) \\ P_z &= \int Z\,dt. \end{aligned}$$

D'Alemberts Princip für Momentankräfte.

Die Momentankräfte werden in derselben Weise wie die Bewegungsgrössen reducirt (siehe § 113). An einem starren Körper liefern sie also eine Resultirende und ein resultirendes Paar.

Wenn ein System von Momentankräften auf ein unveränderliches oder veränderliches Punktsystem wirkt, so ändert sich der Geschwindigkeitszustand des Systems. Das System kann übrigens wie die in § 110 betrachteten Systeme gewissen Bedingungen unterworfen sein. Bei der Bestimmung der Änderungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte benützt man das auf ein System von Momentankräften angewandte d'Alembertsche Princip. Man gelangt dazu, wenn man die Gleichung

$$\Sigma\left\{(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\,\delta x+(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\,\delta y+(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z)\,\delta z\right\}=0$$

mit dt multiplicirt und eine Integration für die ganze Stosszeit ausführt. Wegen der Kürze dieser Zeit können δx, δy und δz als constant angesehen werden, d. h. dieselben virtuellen Verschiebungen sind für jeden Augenblick der Stosszeit möglich. Mit Anwendung der Gleichungen (679) findet man

$$\text{(680)}\quad \Sigma\{((P_x-m\,(u_x-c_x))\,\delta x+(P_y-m\,(u_y-c_y))\,\delta y+ \\ +(P_z-m\,(u_z-c_z))\,\delta z\}=0,$$

wo die Bedeutung der Grössen c_x, c_y, c_z, u_x, u_y und u_z die vorhin angegebene ist. P_x, P_y und P_z sind die Componenten einer bestimmten, auf das System wirkenden äusseren Momentankraft; $m(u_x-c_x)$, $m(u_y-c_y)$, $m(u_z-c_z)$ sind die Componenten der Änderung der Bewegungsgrösse eines Punktes, d. h. der sog. effectiven Momentankraft. Nach der Gleichung (680) *halten die äusseren Momentankräfte den den effectiven Momentankräften entgegengesetzt gleichen Kräften das Gleichgewicht mit Rücksicht auf die Bedingungen des Systems.*

In der Gleichung (680) dürfen nur solche virtuelle Verschiebungen betrachtet werden, welche mit den Bedingungen verträglich sind. Wäre das System ursprünglich in Ruhe, so hätte man

(681) $$\Sigma\{(P_x - mu_x)\,\delta x + (P_y - mu_y)\,\delta y + (P_z - mu_z)\,\delta z\} = 0.$$

Momentankräfte an einem starren Körper.

Verschiebt man einen freien starren Körper translatorisch parallel den Coordinatenaxen, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (681)

$$\Sigma P_x = \Sigma(mu_x),$$

$$\Sigma P_y = \Sigma(mu_y),$$

$$\Sigma P_z = \Sigma(mu_z).$$

Vermittelst der Formeln (55) liefern sie noch

(682) $$M\frac{d\xi}{dt} = \Sigma P_x,\quad M\frac{d\eta}{dt} = \Sigma P_y,\quad M\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma P_z,$$

d. h. *der Schwerpunkt des Körpers erlangt die gleiche Geschwindigkeit, als ob die ganze Masse in ihm concentrirt wäre und die äusseren Momentankräfte unverändert an ihm angebracht wären.*

Betrachtet man virtuelle Drehungen um die Coordinatenaxen, so erkennt man, dass *die Momentensummen der erzeugten Bewegungsgrössen gleich den Momentensummen der gegebenen Momentankräfte in Bezug auf dieselben Axen sind.*

Einfluss des Stosses auf eine feste Axe.

Schliesslich soll der Stoss berechnet werden, den eine feste Axe eines ursprünglich ruhenden starren Körpers durch die Wirkung eines Systems von Momentankräften

erfährt. Zu diesem Zwecke muss man zunächst die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung des Körpers um die feste Axe berechnen und nachher die äusseren Momentankräfte und die den effectiven Momentankräften entgegengesetzt gleichen Kräfte für einen Punkt der Axe reduciren. Am zweckmässigsten wählt man wie in § 115 den Fusspunkt der Normalen vom Schwerpunkte auf die Axe. Auch die Coordinatenaxen sollen in derselben Weise wie in § 115 gewählt werden. Zu dem bei der Reduction gefundenen Systeme von Momentankräften bilden die Reactionen an der festen Axe das entgegengesetzte System.

Es seien P_x, P_y, P_z die Componenten der Resultirenden der äusseren Momentankräfte, G_x, G_y und G_z die Componenten ihres resultirenden Paares. Man erhält die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn man die Bedingung ausdrückt, dass die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die feste Axe gleich G_x sein muss. Bezeichnet r den Abstand eines Punktes mit der Masse m von der Axe, so ergiebt sich

$$G_x = \Sigma(m\omega r^2) = K\omega, \tag{683}$$

wo K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe ist. Ohne Schwierigkeit berechnet man ferner für die Resultirende der Bewegungsgrössen

$$\mathfrak{P}_x = 0,$$

$$\mathfrak{P}_y = -\omega M\zeta,$$

$$\mathfrak{P}_z = \omega M\eta,$$

und für ihr resultirendes Paar

$$\mathfrak{G}_x = \omega K,$$

$$\mathfrak{G}_y = -\omega\Sigma(mxy),$$

$$\mathfrak{G}_z = -\omega\Sigma(mxz).$$

Der Stoss gegen die Axe hat also eine Resultirende mit den Componenten

$$
\begin{aligned}
&P_x - \mathfrak{P}_x = P_x, \\
(684) \qquad &P_y - \mathfrak{P}_y = P_y + \omega M \zeta, \\
&P_z - \mathfrak{P}_z = P_z - \omega M \eta,
\end{aligned}
$$

und ein resultirendes Paar mit den Componenten

$$
\begin{aligned}
&G_x - \mathfrak{G}_x = 0, \\
(685) \qquad &G_y - \mathfrak{G}_y = G_y + \omega \Sigma(mxy), \\
&G_z - \mathfrak{G}_z = G_z + \omega \Sigma(mxz),
\end{aligned}
$$

wo der Wert (683) der Grösse ω überall eingesetzt werden muss.

Es werde jetzt der specielle Fall betrachtet, in welchem der Stoss von einer einzelnen Momentankraft oder von einem System von Momentankräften herrührt, das auf eine einzelne Resultirende reducirt werden kann. Man wünscht die Bedingungen kennen zu lernen, unter denen die feste Axe keine Stosswirkung erleidet. Zweckmässigerweise wählt man jetzt das Coordinatensystem ein wenig anders wie vorhin, und zwar so, dass die feste Axe die x-Axe ist, die yz-Ebene durch den Angriffspunkt $(0, b, c)$ der gegebenen Momentankraft geht und die xz-Ebene den Schwerpunkt des Körpers enthält. Bei der Reduction für den Angriffspunkt ergiebt sich dabei das momentane Kräftesystem

$$
\begin{gathered}
P_x, P_y + \omega M \zeta, P_z, \\
0; cP_x + \omega \Sigma(mxy); - bP_x + \omega \Sigma(mxz),
\end{gathered}
$$

wo

$$
(686) \qquad \omega = \frac{bP_z - cP_y}{K}
$$

ist. Damit die Axe keinen Stoss erleide, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
&P_x = 0, \\
&P_y + \omega M\zeta = 0, \\
(687) \qquad &P_z = 0, \\
&cP_x + \omega\Sigma(mxy) = 0, \\
-&bP_x + \omega\Sigma(mxz) = 0.
\end{aligned}
$$

Die drei ersten Gleichungen zeigen, dass *die äussere Momentankraft der y-Axe parallel sein muss, also senkrecht zu einer durch den Schwerpunkt und die feste Axe geführten Ebene.* Da $P_x = 0$ ist, liefern die beiden letzten Gleichungen

$$\Sigma(mxy) = 0 \text{ und } \Sigma(mxz) = 0,$$

d. h. *die feste Axe muss eine Hauptträgheitsaxe in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt sein, der ja mit dem Fusspunkte der Senkrechten vom Angriffspunkte der Momentankraft auf die feste Axe zusammenfällt.* Setzt man den Wert von ω in die zweite Gleichung (687) ein, so ergiebt sich

$$K = c\zeta M. \tag{688}$$

Bezeichnet k den Trägheitsradius in Bezug auf die der festen Axe parallele Schwerpunktaxe, so ist also

$$K = M(k^2 + \zeta^2) \tag{689}$$

und die Gleichung (688) liefert

$$c = \zeta + \frac{k^2}{\zeta}. \tag{690}$$

Um zu untersuchen, ob ein Körper mit einer festen Axe so gestossen werden könne, dass die Axe keine Einwirkung erfährt, untersucht man zuerst, ob die feste Axe in Bezug auf irgend einen ihrer Punkte eine Hauptträgheitsaxe ist. Vorausgesetzt, dass dies für einen Punkt eintritt, führt man durch den Punkt eine Normalebene

zur Axe; in dieser Ebene muss die Stosskraft liegen und senkrecht auf der Ebene durch den Schwerpunkt und die feste Axe stehen; ihr Abstand von der Axe wird durch die Gleichung (690) bestimmt. Der Punkt, in dem die Richtungslinie der Stosskraft eine zu ihr senkrechte Ebene durch den Schwerpunkt schneidet, heisst dann Stossmittelpunkt in Bezug auf die feste Axe (vergl. p. 738).

§ 132.

Übungsaufgaben zur Lehre vom Stosse.

1) Man vergleiche mit einander die Geschwindigkeiten einer Kanonenkugel, welche in horizontaler Richtung abgeschossen wird, wenn die Kanone in der Horizontalebene frei beweglich ist und wenn die Kanone fest ist. Es wird angenommen, dass die Arbeit der Schiesspulvergase nur von dem Raume abhängt, den sie einnehmen.

2) Man berechne den Verlust der kinetischen Energie für drei Kugeln, deren Mittelpunkte sich längs einer Geraden bewegen, wenn alle drei Kugeln zusammenstossen und der Stoss unelastisch ist.

3) Wann bleibt der eine Körper nach einem vollkommen elastischen geraden centralen Stosse in Ruhe?

6) Eine homogene Kugel stösst schief gegen eine feste ebene Wand. Man untersuche den Vorgang, vorausgesetzt dass der Stoss vollkommen elastisch ist.

5) Eine Keule besteht aus einem Cylinder mit einem cylindrischen Stiel, beide aus demselben Material. Wo muss man den Stiel fassen um die kleinste Einwirkung auf die Hand bei einem Schlage mit der Keule zu fühlen?

6) Man berechne den Verlust der kinetischen Energie bei einem unelastischen geraden Stosse zwischen zwei Körpern, von welchen der eine sich um eine feste Axe drehen kann.

7) Man berechne den Verlust der kinetischen Energie bei dem auf p. 742 untersuchten Stosse zweier sich um parallele Axen drehender Körper.

8) Eine offene rechteckige Thür erfärht an ihrer äusseren Kante einen zu ihrer Ebene senkrechten unelastischen Stoss durch einen Körper, dessen Masse ein Drittel von derjenigen der Thür ist und dessen Geschwindigkeit bekannt ist. Welche Geschwindigkeit erlangt die äussere Kante der Thür, wenn der Widerstand der Charniere vernachlässigt werden kann?

9) Ein homogener Cylinder ruht auf einer glatten horizontalen Unterlage. In welchem Punkte muss ein horizontaler Stoss gegen den Cylinder geführt werden, damit er ohne zu gleiten in Bewegung gerate?

10) Wie muss man einem dünnen Stabe einen zu ihm senkrechten Stoss erteilen, damit der Stab sich um einen bestimmten Punkt mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit drehe?

